MARTINGALES ET TEMPS D'ARRÊT

Exercice 1 (Temps d'arrêt). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ un espace filtré. Parmi les variable aléatoires suivantes, lesquelles sont des temps d'arrêt ?

1. Le minimum de deux temps d'arrêt.

   Oui car $\{T \wedge S \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\}$

2. Le maximum de deux temps d'arrêt.

   Oui car $\{T \vee S \leq t\} = \{T \leq t\} \cup \{S \leq t\}$

3. La somme de deux temps d'arrêt.

   Oui, et on peut le prouver même sans continuité de la filtration en passant au complémentaire. On écrit $\{S + T > t\} = \cup_{x\in\mathbb{Q}, x<t}\{S > x\} \cap \{T > t - x\}$ ce qui est bien $\mathcal{F}_t$ mesurable.

4. Le premier instant où un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$mouvement brownien atteint une valeur donnée $a \in \mathbb{R}$.

   Oui, mais il faut être attentif à bien écrire l'événement en terme d'union et d'intersection dénombrable. Supposons pour simplifier les notations que $a > 0$. On peut remarquer que comme l'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé, on a $T \leq t \Leftrightarrow \forall b \in (0, a), \exists s < t, B_s > b$. Dans l'expression de droite on peut clairement se restreindre au rationnels ce qui conclue.

5. Le dernier zéro d'un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$mouvement brownien sur l'intervalle $[0, 1]$.

   C'est clairement faux. On peut par exemple le prouver en constatant qu'on obtient une contradiction en appliquant le théorème d'arrêt à ce temps et à la martingale $B_t^2 - t$.

Exercice 2 (Quelques martingales du mouvement brownien). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$mouvement brownien.

1. Montrer que $\{B_t\}_{t\geq 0}$ est une martingale.

   On doit vérifier que B_t est bien intégrable à tout temps, adapté ainsi que la propriété de martingale pour tout paire de temps t et $t + s$. Tout est trivial.

2. Montrer que $\{B_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ est une martingale.

   L'intégrabilité et l'adaptation sont triviales. On a $\mathbb{E}(B_{t+s}^2 - t - s \mid \mathcal{F}_t) = B_t^2 - t + \mathbb{E}((B_t + s - B_t)^2 - s) + 2\mathbb{E}(B_t(B_t + s - B_t) \mid \mathcal{F}_t)$ et le deux second termes sont clairement nuls.

3. Construire une martingale à partir du processus $\{B_t^3\}_{t\geq 0}$.

   On développe $B_{t+s}^3 = B_t^3 + 3B_t^2(B_{t+s} - B_t) + 3B_t(B_{t+s} - B_t)^2 + (B_{t+s} - B_t)^3$. Il est alors facile de voir que $B_t^3 - 3tB_t$ sera alors une martingale.

4. Construire une martingale à partir du processus $\{B_t^4\}_{t\geq 0}$.

Même technique que ci dessus, on peut partir des termes de plus haut degré et voir comment les compenser. On trouve $B_t^4 - 6B_t^2 t + 3t^2$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que le processus $\{e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}\}_{t\geq 0}$ est une martingale.

Même chose que dans les questions précédentes mais il faut passer par le calcul de l'intégrale $\mathbb{E}(e^N)$ pour une loi normale comme pour la fonction caractéristique.

6. Construire une martingale à partir du processus $\{\cosh(\lambda B_t)\}_{t\geq 0}$.

Simplement par linéarité, $\cosh(\lambda B_t)e^{-\lambda^2 t/2}$ est une martingale.

Exercice 3 (Loi de temps d'atteinte). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $a > 0$.

1. À l'aide de la martingale $\{B_t^2 - t\}_{t\geq 0}$, calculer l'espérance de $T_a^\star := \inf\{t \geq 0 \colon |B_t| = a\}$.

C'est exactement comme dans l'application classique avec des marches aléatoires, on obtient $\mathbb{E}(T_a^*) = a^2$.

2. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la variance de $T_a^\star$.

On utilise la martingale pour B_t^4. On peut bien prendre l'espérance car T_a^{*2} est intégrable et on obtient
$$0 = a^4 - 6a^2.a^2 + 3\mathbb{E}(T_a^{*2})$$
ce qui donne $\mathrm{Var}(T_a^*) = \frac{5}{3}a^4 - a^4$. Notez qu'il est normal d'arriver sur un multiple de a^4 d'après les propriétés d'invariance du mouvement brownien.

3. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la transformée de Laplace de $T_a^\star$.

On utilise la martingale en $\cosh$ pour obtenir que pour $s \geq 0$, $\mathbb{E}(e^{-sT_a^*}) = \frac{1}{\cosh\sqrt{2s}a)}$

4. Calculer la transformée de Laplace de $T_a := \inf\{t \geq 0 \colon B_t = a\}$ et retrouver le fait que T_a a même loi que $(a/B_1)^2$. Que vaut $\mathbb{E}[T_a]$?

Pour calculer e^{-sT_a} pour $s \geq 0$, on veut utiliser la martingale de la question 5 de l'exercice précédent avec $\lambda = +\sqrt{2s}$ et maintenant le signe devient important. En effet cette martingale est bornée par $e^{\lambda a}$ avant T_a donc permet d'échanger limite et espérance ce qui n'est pas le cas de la martingale avec $-\sqrt{2s}$. On obtient $\mathbb{E}(e^{-sT_a}) = e^{-\sqrt{2s}a}$.
Pour vérifier l'identité en loi demandée, on calcule la transformé de Laplace de $(a/B_1)^2$ et on peut clairement prendre $a = 1$ pour simplifier les notations. On a
$$\mathbb{E}(e^{-s/B_1^2}) = 2\int_0^\infty e^{-\frac{s}{x^2}-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 2\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2s}}{x}-x)^2}e^{-\sqrt{2s}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$
On fait un changement de variable $u = x - \frac{\sqrt{2s}}{x}$ qui donne $x = \frac{u+\sqrt{u^2+4\sqrt{2s}}}{2}$ (attention au choix du signe en résolvant l'équation, x doit être positif) et donc
$$dx = \frac{du}{2} + \frac{udu}{2\sqrt{u^2+4\sqrt{2s}}}.$$
La partie de l'intégrale en $\frac{du}{2}$ redonne exactement le terme souhaité tandis que la partie en $\frac{udu}{2\sqrt{u^2+4\sqrt{2s}}}$ est antisymétrique et donne donc une intégrale nulle.

Exercice 4 (Maximum du mouvement brownien avec dérive). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. On fixe $a, b > 0$ et on pose $\tau := \inf\{t \geq 0 \colon B_t - bt = a\}$.

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt relativement à la filtration naturelle.

   Même chose que l'exercice 1 question 4.

2. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la transformée de Laplace de τ.

   On considère à nouveau la martingale $e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2}$. Pour tout $\lambda > 2b$ on a une martingale bornée jusqu'au temps τ et donc

   $$\mathbb{E}[e^{(\frac{\lambda^2}{2} - \lambda b)\tau}] = e^{-\lambda a}$$

   soit en inversant la formule une transformée de Laplace $e^{-ab-\sqrt{b^2+2sa}}$.

3. En déduire la probabilité que la courbe du mouvement brownien soit au dessous de la demi-droite $t \mapsto a + bt$. Pouvait-on prévoir que la réponse ne dépendrait que de ab ?

   On cherche $\mathbb{P}(\tau = \infty)$ et il est facile de voir par convergence dominée que c'est $1 - \lim_{s\to 0} \mathbb{E}(e^{-s\tau}) = 1 - e^{-2ab}$. On pouvait le prévoir par grâce au changement d'échelle $B_t \to \sigma B_{t/\sigma^2}$

4. Quelle est la loi de la variable aléatoire $U := \sup_{t\geq 0} B_t - bt$?

   On vient de calculer la fonction de répartition de cette variable donc on voit que c'est une variable exponentielle de paramètre b.

Exercice 5 (Maximum du pont brownien). Soit $\{Z_t\}_{0\leq t\leq 1}$ un pont brownien.

1. Pour $t \geq 0$ on pose $B_t = (1 + t)Z_{\frac{t}{1+t}}$. Vérifier que $\{B_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

   Fait dans la feuille 3.

2. En utilisant l'exercice précédant, déterminer la loi de la variable $V := \sup_{0\leq t\leq 1} Z_t$.

   On a $\mathbb{P}(V \geq b) = \mathbb{P}(\exists t \in \mathbb{R}_+, \frac{B_t}{1+t} \leq b) = \mathbb{P}(\exists t, B_t = b + bt) = e^{-2b^2}$ (on se permet de ne pas justifier la mesurabilité même si on écrit des conditions sur un ensemble non dénombrable de temps).

Exercice 6 (Une preuve du théorème d'arrêt). Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, on considère une martingale continue $\{M_t\}_{t\geq 0}$ et un temps d'arrêt T. Le but de cet exercice est de montrer que $\{M_{t\wedge T}\}_{t\geq 0}$ est encore une martingale. Dans tout l'exercice, *"discret"* signifiera à valeurs dans $\mathcal{D}_n := \{k2^{-n} \colon k \in \mathbb{N}\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que la famille $\{M_\tau \colon \tau \text{ temps d'arrêt discret} \leq t\}$ est uniformément intégrable.

   Si τ est un temps d'arrêt discret donné, on peut le voir comme un temps d'arrêt pour la martingale discrète $k \to M_{k2^{-n}}$. On a donc $\mathbb{E}(M_\tau 1_{M_\tau\geq C}) \leq \mathbb{E}(M_t 1_{M_\tau\geq C}) \leq \mathbb{E}|M_t|$ et en particulier $\mathbb{P}(M_\tau \geq C) \leq \mathbb{E}(|M_t|)/C$ pour tout C (ça n'est rien d'autre qu'un cas particulier de l'inégalité maximale). Comme M_t est intégrable, on doit donc aussi avoir $\mathbb{E}(M_t 1_{M_\tau\geq C}) \to 0$ quand $C \to \infty$ ce qui conclue.

2. Montrer que si s, t et T sont discrets avec $s \leq t$ deux réels non aléatoires, alors

   $$\mathbb{E}[M_{t\wedge T} | \mathcal{F}_s] = M_{s\wedge T}.$$

   On se fixe n convenant à s, t et T., c'est alors juste une application du théorème d'arrêt pour les martingales à temps discrets.

3. Exhiber une suite de temps d'arrêt discrets qui décroît vers T, et conclure.

On pose $T^n = (\langle 2^n T\rangle + 1)2^{-n}$. On a clairement $T^n > T$ pour tout n ce qui permet facilement de voir que T_n est un temps d'arrêt. On sait que $M_{t\wedge T^n}$ converge presque sûrement vers $M_{t\wedge T}$ par continuité de la martingale et on conclue donc par le théorème de convergence dominée pour les suite uniformément intégrable.

Exercice 7 (Tribu des événements antérieurs à T). Soit T un temps d'arrêt sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$. On rappelle que la tribu des événements antérieurs à T est

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} \colon \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Trivial, on vérifie chaque point dans la définition.

2. Soit S un temps d'arrêt tel que $S \leq T$. Montrer que $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

Soit $A \in \mathcal{F}_S$ et $t > 0$, il suffit de remarquer que $A \cap \{T \leq t\} = A \cap \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\}$.

3. Soit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un processus continu et adapté. Montrer que $X_T \mathbf{1}_{T<\infty}$ est $\mathcal{F}_T-$mesurable.

On pose $T^n = \langle 2^n T\rangle 2^{-n}$, il est facile de voir que X_{T^n} est $\mathcal{F}_T$ mesurable pour tout n car il suffit de considérer des unions dénombrables d'événements. Par ailleurs $T^n \to T$ et donc par continuité $X_{T^n} \to T$.

Exercice 8 (Martingale à variation finie). Une fonction $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est à variation finie si

$$V_t(f) := \sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \colon n \in \mathbb{N}^*, 0 = t_0 \leq \cdots \leq t_n = t\right\} < +\infty,$$

pour tout $t \geq 0$. On rappelle que si f est continue, alors $t \mapsto V_t(f)$ l'est aussi. Soit $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ une martingale dont les trajectoires sont continues et à variation finie. Montrer que p.s., les trajectoires de M sont constantes. *Indication :* on pourra supposer que $V_t(M) \in L^\infty$.

Quitte à introduire $T_n = \inf\{t : V_t(M) \geq n\}$ on suppose que $V_t(M)$ est borné par un certain n. En particulier M doit aussi être bornée. Par ailleurs on observe que $\sum_{i=0}^{n-1}(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 \leq V_t(f) \sup_i |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$ donc par continuité on voit que $\sum_{i=0}^{n-1}(M_{\frac{i+1}{n}} - M_{\frac{i}{n}})^2$ converge vers 0 quand n tends vers l'infini et est borné par $V_t(M)^2$. On peut donc passer à l'espérance. Or on vérifie facilement que $\mathbb{E}[\sum_{i=0}^{n-1}(M_{\frac{i+1}{n}} - M_{\frac{i}{n}})^2] = \mathrm{Var}(M_t - M_0)$. Cette variance doit donc être nulle ce qui conclue.

Exercice 9 (Caractérisation de Lévy). Sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, on considère une martingale continue $\{M_t\}_{t\geq 0}$. On suppose que $M_0 = 0$ et que $\{M_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ est une martingale.

1. Donner un exemple d'une telle martingale.

Le mouvement Brownien.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que f, f' et f'' sont bornées. Montrer que pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}[f(M_t)|\mathcal{F}_s] = f(M_s) + \frac{1}{2}\int_s^t \mathbb{E}[f''(M_u)|\mathcal{F}_s]du.$$

(On pourra subdiviser l'intervalle $[s, t]$ et utiliser le développement de Taylor de f.)

Pour simplifier les notations on considère seulement $s = 0$ et $t = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(M_t)) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} f(M_{i+1/n}) - f(M_{i/n}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} f'(M_{i/n})(M_{i+1/n} - M_{i/n}) + \frac{1}{2} f''((M_{i/n}))((M_{i+1/n} - M_{i/n}))^2 + o((M_{i+1/n} - M_{i/n})^2) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} \frac{1}{2} f''((M_{i/n})) \frac{1}{n} + o((M_{i+1/n} - M_{i/n})^2) \\
&\to \int \mathbb{E}(f''(M_u)) du
\end{aligned}$$

Dans la troisième ligne, on utilise la propriété de martingale pour M et $M^2 - t$. Dans la dernière ligne, on peut ignorer le $o((M_{i+1/n} - M_{i/n})^2)$ car le préfacteur qui intervient dans ce terme ne dépend que du module de continuité de f'' et est donc uniformément borné tandis que la somme des carrés des incréments est toujours intégrable.

3. En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda(M_t - M_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \int_s^t \mathbb{E}\left[e^{i\lambda(M_u - M_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] du.$$

Application directe de la question précédente.

4. En déduire que $\{e^{i\lambda M_t + \frac{\lambda^2 t}{2}}\}_{t \geq 0}$ est une martingale pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

De l'expression précédente, on voir que $\mathbb{E}(e^{i\lambda M_t} | \mathcal{F}_s)$ est dérivable en t et on vérifie trivialement que $\mathbb{E}(e^{i\lambda M_t} | \mathcal{F}_s)$ est en fait constant en t en calculant sa dérivée.

5. En conclure que $\{M_t\}_{t \geq 0}$ est en fait nécessairement un mouvement brownien !

On vient de calculer la fonction caractéristique de tout incrément.