INTÉGRALE DE WIENER

Dans toute cette feuille, on considère un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ sur lequel est défini un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$−mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$.

Exercice 1 (Propriétés générales). Soit $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Pour $t \geq 0$ on pose

$$M_t := \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s.$$

1. Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien à accroissements indépendants.
2. Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.
3. Construire une martingale à partir de $(M_t^2)_{t\geq 0}$.
4. Soit $\theta \in \mathbb{C}$. Construire une martingale à partir de $(e^{\theta M_t})_{t\geq 0}$.
5. Pour quels choix de f le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est-il un mouvement brownien ?
6. Soit $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ et $N_t := \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}B_s$. $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(N_t)_{t\geq 0}$ sont-ils indépendants ?

Exercice 2 (Exemple). Que dire du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ défini par la formule suivante ?

$$X_t := \int_0^{\sqrt{t}} \sqrt{2s}\,\mathrm{d}B_s.$$

Exercice 3 (Pont brownien). Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère le processus $(Z_t)_{0\leq t<1}$ défini par

$$Z_t := a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}B_s \qquad (0 \leq t < 1).$$

1. Montrer que $(Z_t)_{0\leq t<1}$ est un processus gaussien dont on explicitera les paramètres.
2. Que dire de ce processus dans le cas $a = b = 0$?

3. Montrer que lorsque $t \to 1$, on a $Z_t \to b$ au sens de la convergence L^2.
4. Montrer que la convergence a en fait lieu presque-sûrement.

Exercice 4 (Processus d'Ornstein-Uhlenbeck). Soit V_0 une variable aléatoire réelle indépendante de $(B_t)_{t\geq 0}$, et $b, \sigma > 0$. On définit un processus $(V_t)_{t\geq 0}$ par

$$V_t := e^{-bt}\left(V_0 + \sigma \int_0^t e^{bs}\,\mathrm{d}B_s\right).$$

1. Montrer que V_t converge en loi lorsque $t \to \infty$, et déterminer la limite.
2. On suppose désormais que $V_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2b}\right)$. Montrer que $(V_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien stationnaire dont on précisera les paramètres.
3. Que dire du processus $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ défini ci-dessous ?

$$W_t := \frac{\sigma}{\sqrt{2b}} e^{-bt} B_{e^{2bt}}.$$

Exercice 5 (Intégration par partie). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Établir que pour tout $t \geq 0$, on a presque-sûrement

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t f'(s)B_s\,\mathrm{d}s = f(t)B_t.$$

2. Sous les hypothèses supplémentaires $f(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ et $\int_0^\infty |f'(t)|\sqrt{t}\ \mathrm{d}t < \infty$, en déduire

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(s)\,\mathrm{d}B_s = -\int_{\mathbb{R}_+} f'(s)B_s\,\mathrm{d}s.$$

Exercice 6 (Espace gaussien). Soit H^B l'espace gaussien engendré par $(B_t)_{t\geq 0}$:

$$H^B := \overline{\mathrm{Vect}(B_t\colon t \geq 0)}^{L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})}.$$

1. Établir l'égalité

$$H^B = \left\{\int_{\mathbb{R}_+} f(s)dB_s \colon f \in L^2(\mathbb{R}_+)\right\}.$$

2. Soit $X \in H^B$ et $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
   (a) $X = \int_{\mathbb{R}_+} f(s)\,\mathrm{d}B_s$
   (b) $\mathbb{E}[XB_t] = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.