CALCUL STOCHASTIQUE & APPLICATIONS

Exercice 1 (Différentielle stochastique d'un produit). Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus d'Itô. Montrer que $(X_tY_t)_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô et calculer sa différentielle stochastique.

La fonction produit $(x,y) \to xy$ est une fonction $\mathcal{C}^2$ donc l'image de deux processus d'Itô par cette fonction reste un processus d'Itô. On a

$$\mathrm{d}(XY) = Y\mathrm{d}X + X\mathrm{d}Y + \mathrm{d}\langle X, Y\rangle.$$

Exercice 2 (Examen 2009). Soit $\{(B_t, \widetilde{B}_t)\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien plan, et

$$X_t := \int_0^t B_s\,\mathrm{d}\widetilde{B}_s - \int_0^t \widetilde{B}_s\,\mathrm{d}B_s, \qquad (t \geq 0).$$

1. Montrer que $\{X_t\}_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable.

   X_t est une martingale locale comme intégrale stochastique (ou intégrale de Wiener). Comme B et $\tilde{B}$ sont dans M^2, c.a.d comme on a $\int_0^t \mathbb{E}(B_s^2)ds < \infty$ pour tout t et similairement pour $\tilde{B}$, c'est une vrai martingale.

2. Soit $\lambda > 0$. Justifier que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}\big[e^{i\lambda X_t}\big] = \mathbb{E}\big[\cos(\lambda X_t)\big]$

   La paire $(B, \tilde{B})$ a la même loi que la paire $(\tilde{B}, B)$ donc X a la même loi que $-X$. L'intégration ne pose pas de problème puisque les exponentielles complexes sont bornées.

3. Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Calculer la différentielle stochastique des processus suivants :

   $$Y_t := \cos(\lambda X_t) \qquad \text{et} \qquad Z_t := h(t) - \frac{h'(t)}{2}(B_t^2 + \tilde{B}_t^2)$$

   Par définition on a $\mathrm{d}X = B\mathrm{d}\tilde{B} - \tilde{B}\mathrm{d}B$ et donc $\mathrm{d}\langle X\rangle = (\tilde{B}^2 + B^2)\mathrm{d}t$. Par la Formule d'Itô

   $$\mathrm{d}Y = -\lambda\sin(X)dX - \frac{1}{2}\lambda^2\cos(X)\mathrm{d}\langle X\rangle = -\lambda\sin(X)B\mathrm{d}\tilde{B} + \lambda\sin(X)\tilde{B}\mathrm{d}B - \frac{\lambda^2}{2}Y(B^2+\tilde{B}^2)\mathrm{d}t$$

   Comme h est juste une fonction $\mathcal{C}^2$ déterministe, on a $\mathrm{d}h = h'\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}h' = h''\mathrm{d}t$. Ainsi

   $$\begin{aligned}\mathrm{d}Z &= h'\mathrm{d}t - \frac{h''}{2}(B^2 + \tilde{B}^2)\mathrm{d}t - \frac{h'}{2}(2B\mathrm{d}B + \mathrm{d}t + 2\tilde{B}d\tilde{B} + \mathrm{d}t)\\ &= -h'(B\mathrm{d}B + \tilde{B}d\tilde{B}) - \frac{h''}{2}(B^2 + \tilde{B}^2))\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

4. Calculer le crochet $\langle Y, Z\rangle$.

   Comme le crochet de B et $\tilde{B}$ est nul par indépendance, on a

   $$\mathrm{d}\langle Y, Z\rangle = B.2\tilde{B}\mathrm{d}t - \tilde{B}.2B\mathrm{d}\tilde{t} = 0$$

5. Montrer que $\{Y_t e^{Z_t}\}_{t\geq 0}$ est une martingale locale dès que h vérifie $h'' = (h')^2 - \lambda^2$.

On applique la formule d'Itô en dimension 2 à la fonction $y, z \to ye^z$ (dont les dérivées secondes sont triviales à calculer) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Ye^Z &= e^Z \mathrm{d}Y + Ye^Z dZ + \frac{1}{2} Ye^Z d\langle Z\rangle + e^Z \mathrm{d}\langle Y, Z\rangle \\
&= e^Z[-\lambda \sin(X) B\mathrm{d}\tilde{B} + \lambda \sin(X)\tilde{B}\mathrm{d}B - \frac{\lambda^2}{2} Y(B^2 + \tilde{B}^2)\mathrm{d}t] \\
&+ Ye^Z[-\frac{h'}{2}(2B\mathrm{d}B + 2\tilde{B}d\tilde{B}) - \frac{h''}{2}(B^2 + \tilde{B}^2))\mathrm{d}t] \\
&+ \frac{1}{2} Ye^Z (h')^2 (B^2 + \tilde{B}^2)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Si on veut avoir une martingale locale, il suffit que le terme en $\mathrm{d}t$ s'annule. On constante que c'est le cas si la condition est vérifié (il faut simplifier par $Ye^Z(B^2 + \tilde{B}^2)$.

6. Vérifier que $h\colon t \mapsto -\log\left\{\cosh\left(\lambda r - \lambda t\right)\right\}$ est solution, pour tout $r \geq 0$.

Simple claclul de dérivée.

7. En déduire $\mathbb{E}[e^{i\lambda X_t}]$, pour tout $t \geq 0$.

On a $h' = \lambda \frac{\sinh(\lambda r - \lambda t)}{\cosh(\lambda r - \lambda t)}$ et donc

$$Ye^Z = \cos(\lambda X_t) \frac{1}{\cosh(\lambda r - \lambda t)} \exp[-\frac{\lambda}{2} \frac{\sinh(\lambda r - \lambda t)}{\cosh(\lambda r - \lambda t)} (B_t^2 + \tilde{B}_t^2)].$$

On remarque que ces expressions sont bornées sur n'importe quel intervalle donc en fait Ye^Z est une vrai martingale. Par ailleurs si on fixe t et qu'on choisi $r = t$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{i\lambda X_t}) &= \mathbb{E}(\cos \lambda X_t) \\
&= \mathbb{E}(Y_0 e_0^Z) \\
&= 1.\frac{1}{\cosh(\lambda t)}.
\end{aligned}$$

En effet, dans la première ligne on a utilisé que le terme en $\sinh$ est nulle pour notre choix de r au temps t, et dans la dernière ligne on a utilisé que $B_0 = \tilde{B}_0 = 0$.

Exercice 3 (Loi de l'arcsinus). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel. Il est facile de voir que la formule d'Itô pour $\{f(B_t)\}_{t\geq 0}$ reste valable si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ partout sauf en un nombre fini de points au voisinage desquels f'' est bornée. Voici une application. Soit

$$H_t := \int_0^t \mathbf{1}_{(B_s \geq 0)}\, \mathrm{d}s \qquad (t \geq 0).$$

Il s'agit de montrer que la variable aléatoire $\frac{H_t}{t}$ admet pour densité $x \mapsto \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ sur $(0, 1)$.

1. Étant donnés $\alpha, \beta > 0$, trouver $a, b \in \mathbb{R}$ pour que f satisfasse les conditions ci-dessus, avec

$$f(x) := \begin{cases} a \exp\left(-\sqrt{2(\alpha+\beta)}x\right) + \frac{1}{\alpha+\beta} & \text{si } x \geq 0 \\ b \exp\left(\sqrt{2\alpha}x\right) + \frac{1}{\alpha} & \text{si } x < 0. \end{cases}.$$

Pour que f soit continu en 0, on doit vérifier la condition $a + \frac{1}{\alpha+\beta} = b + \frac{1}{\alpha}$. Pour que les dérivées soit continues il faut vérifier $-a\sqrt{2(\alpha+\beta)} = b\sqrt{2\alpha}$. Ces équations se résolvent et donnent

$$a = \frac{\sqrt{\beta+\alpha}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}(\alpha+\beta)}, \qquad b = \frac{\sqrt{\beta+\alpha}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha+\beta}(\alpha+\beta)}.$$

La dérivée seconde donne alors $2a\sqrt{\alpha+\beta}$ à droite de 0 et $2b\alpha$ à gauche de 0 ce qui est bien borné.

2. Construire une martingale bornée à partir de $\left\{f(B_t)e^{-(\alpha t+\beta H_t)}\right\}_{t\geq 0}$ et en déduire que

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathbb{E}\left[e^{-\beta H_t}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}.$$

H_t est clairement un processus à variation finie puisque c'est l'intégrale d'une quantité bornée. On peut donc appliquer la formule d'Itô et on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(B_t)e^{-(\alpha t+\beta H_t)} &= f'(B_t)e^{-(\alpha t+\beta H_t)}\mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}f''(B_t)e^{-(\alpha t+\beta H_t)}\mathrm{d}t \\
&\quad - (\alpha+\beta 1_{B_t\geq 0})f(B_t)e^{-(at+\beta H_t)}\mathrm{d}t \\
&= 1_{B_t\geq 0}e^{-\sqrt{2(\alpha+\beta)}B_t-\alpha t-\beta H_t}\Big[-a\sqrt{2(\alpha+\beta)}\mathrm{d}B + a(\alpha+\beta)\mathrm{d}t \\
&\quad - a(\alpha+\beta)\mathrm{d}t\Big] - 1_{B_t\geq 0}\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta}e^{-at+\beta H_t}\mathrm{d}t \\
&+ \text{formule analogue pour } B_t < 0
\end{aligned}$$

On voit donc que $M_t = f(B_t)e^{-(at+\beta H_t)} + \int_0^t e^{-(\alpha s+\beta H_s)}\mathrm{d}s$ est une martingale locale. Par ailleurs $f(B_t)e^{-(\alpha t+\beta H_t)}$ est borné d'après le choix des signes dans l'exponentielle du mouvement Brownien et $\int_0^t e^{-(\alpha s+\beta H_s)}\mathrm{d}s$ est borné car plus petit que l'intégrale d'une exponentielle décroissante. M_t est donc une vrai martingale bornée. En appliquant la convergence L^1 des martingales, et Fubini on obtient

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathbb{E}e^{-\beta H_t} = M_0 = a + \frac{1}{\alpha+\beta} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$$

3. On admet que $\int_0^\infty\int_0^1 e^{-\alpha t}\frac{e^{-\beta tx}}{\pi\sqrt{x(x-1)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$ pour tout α et β, conclure.

Remarque : Pour calculer l'intégrale dans la dernière question, après avoir fait l'intégrale en t, on peut utiliser une intégrale de contour en choisissant de définir sur $\mathbb{C}\setminus(1,1)$ la racine dans l'intégrale. Alternativement on peut symétriser autour de $x=\frac{1}{2}$ ce qui donne une intégrale de la forme $\sqrt{1-y^2}$ puis faire un changement de variable en sinus.

Exercice 4 (Partiel 2015). Soit B un mouvement brownien réel et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On considère le processus

$$M(t) = \Phi\left(\frac{B(t)}{\sqrt{1-t}}\right), \qquad t\in[0,1).$$

1. Calculer la differentielle stochastique de M. Qu'en concluez-vous ?

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \Phi'(\frac{B(t)}{\sqrt{1-t}})\mathrm{d}(\frac{B}{\sqrt{1-t}}) + \frac{1}{2}\Phi''(\frac{B(t)}{\sqrt{1-t}})d\langle\frac{B_t}{\sqrt{1-t}}\rangle \\
&= \Phi'(\frac{B(t)}{\sqrt{1-t}})\frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}B_t + \Phi'(\frac{B(t)}{\sqrt{1-t}})B(t)\frac{\mathrm{d}t}{2(1-t)^{3/2}} + \frac{1}{2}\Phi''(\frac{B(t)}{\sqrt{1-t}})\frac{\mathrm{d}t}{(1-t)}.
\end{aligned}$$

Or on a $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ et donc $\Phi''(x) = -x\Phi'$. On en déduit donc que M est une martingale locale. Comme en plus M est bornée, M est une vrai martingale (pour $t \in [0,1)$).

2. Montrer l'existence et donner la valeur $M(1)$ de la limite p.s. de $M(t)$ quand t croit vers 1.

$B(t)$ a une limite presque sûrement non nulle quand t tends vers 1 tandis que $\sqrt{1-t}$ tends vers 0 donc $M(1) = 1_{B(1)>0}$.

3. Écrire $\mathbb{E}(M(1)|B(s); s \le t)$ comme une probabilité conditionnelle et en déduire que $(M(t); t \in [0,1])$ est une martingale.

On a $\mathbb{E}(M(1) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(B(1) > 0 \mid \mathcal{F}_t)$ puisque c'est l'espérance d'une indicatrice. Par ailleurs comme $M(t)$ est une martingale bornée, on sait que $M(t) \to M(1)$ dans L^1 quand $t \to 1$ et donc M est une martingale sur $[0,1]$.
Une méthode alternative plus dans l'esprit de l'exercice est d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M(1) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{P}(B_t - B_s \ge -B_s \mid \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{P}(N(0, t-s) \ge -B_s) = \mathbb{P}(N(0,1) \ge \frac{B_s}{\sqrt{t-s}}) \\
&= \Phi(\frac{B_s}{t-s}) = M(s).
\end{aligned}$$

où dans la deuxième ligne on utilise la propriété de Markov (et on note avec un petit abus de notation $N(0, t-s)$ pour une variable de cette loi).

4. Calculer la probabilité que B intersecte la courbe $t \mapsto \sqrt{1-t}$, $t \in [0,1]$.

Soit T le premier temps d'intersection de la courbe $\sqrt{1-t}$, ou $T = 1$ si le brownien n'intersecte pas la courbe. Sur l'événement $T = 1$, on a $M(1) = 0$. En appliquant le théorème d'arrêt à la martingale bornée $M_{t\wedge T}$, on a

$$M_0 = \frac{1}{2} = \mathbb{E}(M_T) = \Phi(1)\mathbb{P}(T < 1)$$

ce qui conclue.

Exercice 5 (Temps local). Soit $\{B_t\}_{t\ge 0}$ un mouvement brownien réel. La formule d'Itô

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)\,\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\mathrm{d}s$$

s'étend aisément à toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^2$ partout sauf en un nombre fini de points au voisinage desquels f'' reste bornée. Voici un exemple où cette extension est utile.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Calculer la différentielle stochastique du processus $\{f_\varepsilon(B_t)\}_{t\ge 0}$, où

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \ge \varepsilon \\ \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{x^2}{\varepsilon}\right) & \text{si } |x| < \varepsilon \end{cases}.$$

On vérifie facilement que la fonction f vérifie nos hypothèses. on a

$$\mathrm{d}f(B_t) = 1_{B \geq \epsilon}\mathrm{d}B_t - 1_{B \leq -\epsilon} dB_t + \frac{B_t}{\epsilon} 1_{|B| \leq \epsilon}\mathrm{d}B_t + \frac{1}{\epsilon} 1_{|B| \leq \epsilon}\mathrm{d}t.$$

2. On note Λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{1}{2\varepsilon}\Lambda \{s \in [0,t] \colon |B_s| < \varepsilon\} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{L^2} |B_t| - \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)\mathrm{d}B_s.$$

On écrit la forme intégrée de la différentielle stochastique de la question précédente :

$$f_\epsilon(B_t) = \frac{\epsilon}{2} + \int f'(s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t 1_{|B_s| \leq \epsilon}\mathrm{d}t.$$

Le terme le plus à droite est celui qui nous intéresse. Clairement pour tout t, on a $f_\epsilon(B_t) \to |B_t|$ et $f'_\epsilon(B_t) \to \mathrm{sgn}(Bs)$ presque sûrement mais aussi dans tout les L^p (pour le premier terme, les queues de distributions sont gaussiennes et pour le second toutes les variables sont bornées). La convergence L^2 de l'intégrande dans $\int f'_\epsilon dB_s$ implique la convergence L^2 de l'intégrale par le cours ce qui nous donne la conclusion.

Exercice 6 (Récurrence ou transience du mouvement brownien).

1. Trouver une fonction harmonique non-triviale $u \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ à symétrie sphérique, i.e.

$$\|z\| = \|z'\| \Longrightarrow u(z) = u(z').$$

Il est bien connu que $u(z) = \log(\|z\|)$ est une fonction harmonique. Cela se vérifie par un calcul simple en coordonnées.

2. On fixe $0 < r < R < \infty$ et $z \in \mathbb{R}^2$ tel que $r < \|z\| < R$. Soit $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien plan issu de z, et

$$\tau := \inf\{t \geq 0 \colon \|B_t\| \leq r \text{ ou } \|B_t\| \geq R\}.$$

Que dire du processus $\{u(B_{t \wedge \tau})\}_{t \geq 0}$? En déduire la probabilité que $\{B_t\}_{t \geq 0}$ atteigne le cercle de centre 0 et de rayon r avant d'avoir touché celui de rayon R.

On calcule la différentielle stochastique de $u(B_t)$, (en notant $B = (X, Y)$ et on obtient

$$\mathrm{d}u(B) = \partial_x u(B)\mathrm{d}X + \partial_y u(B)\mathrm{d}Y + \frac{1}{2}(\partial_x^2 u(B)\mathrm{d}t + \partial_y^2 u(B)\mathrm{d}t)$$

et le terme en $\langle X, Y\rangle$ est nul car X et Y sont indépendants. Pour notre choix de u, c'est donc une martingale (puisque par construction on est borné avant τ) et une application classique du théorème d'arrêt montre que $\mathbb{P}(\|B_\tau\| = r) = \frac{\log R - \log\|z\|}{\log R - \log r}$.

3. Montrer qu'un point donné distinct du point de départ ne sera presque-sûrement jamais visité par le mouvement brownien plan, mais que presque-sûrement, chaque ouvert de $\mathbb{R}^2$ est visité infiniment souvent.

Quitte à changer le point de départ, il suffit de considérer 0 comme le “point cible”. Soit $r > 0$, par la question précédente la probabilité qu'un brownien plan touche $B(0,r)$ avant de sortir de $B(0,R)$ tends vers 1 quand R tends vers l'infini. En particulier la probabilité que le Brownien plan visite $B(0,r)$ à un certain temps est égale à 1. En considérant une union sur tous le points de coordonnées rationnelles et sur tous les r rationnels, on obtient que le Brownien plan visite presque sûrement tous les ouverts.
Inversement, pour tout R, la question précédente montre (en prenant maintenant $r \to 0$) que la probabilité que le Brownien touche 0 avant de sortir de R est nulle. En prenant maintenant une union sur R rationnel, on obtient le résultat.

4. On se place désormais en dimension $d \geq 3$. Pour $r < \|z\| < R$, déterminer la probabilité qu'un mouvement brownien issu de z touche la sphère de rayon r avant celle de rayon R.

En dimension 3, on peut vérifier que $u(z) = \frac{1}{\|z\|}$ est harmonique. En répétant le même raisonnement qu'avant on obtient

$$\mathbb{P}(\tau_r < \tau_R) = \frac{r(R - \|z\|)}{\|z\|(R - r)}$$

5. Quelle est la probabilité qu'une fois sorti de la boule de rayon n^3, le mouvement brownien ne revienne plus jamais dans la boule de rayon n ?

L'expression précédente avec $R = 2n^3$, $\|z\| = n^3$ et $r = n$ donne

$$\mathbb{P}(\tau_n < \tau_{2n^3}) = \frac{n^4}{2n^6(1 - n^{-2})}.$$

On a donc une probabilité positive partant de n^3 que pour tout $k \geq 1$, le Brownien atteint $2^k n^3$ avant de revenir en $2^{k/3}n$. En dimension $d > 3$, le même résultat s'applique en ne considérant que les 3 premières coordonnées.

6. En déduire qu'en dimension $d \geq 3$, le mouvement brownien est transient : $\|B_t\| \to \infty$ p.s.

Comme on sait que pour un Brownien unidimensionnel, on a $\limsup B_t = +\infty$, il est facile de voir que presque sûrement $\limsup \|B_t\| = \infty$. On peut donc itérer le résultat de la question précédente en appliquant Markov fort à chaque nouvelle fois que la norme retourne en n^3 après avoir touché n.