

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

Dans cette feuille, $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien réel sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Examen 2015). On se donne une constante $\sigma > 0$ et on considère l'EDS

$$dX_t = -\frac{X_t}{1+t} dt + \frac{\sigma}{1+t} dB_t, \quad X_0 = 0.$$

- Justifier que cette EDS admet une unique solution $(X_t)_{t \geq 0}$.
- Calculer la différentielle stochastique du processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ défini par $Y_t := (1+t)X_t$. En déduire la forme explicite de $(X_t)_{t \geq 0}$. Justifier que $X_t \rightarrow 0$ quand t tend vers l'infini.
- On fixe $a > 0$ et on note $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\}$. Pour $t \geq 0$, on pose

$$M_t := \exp\left(\frac{2at}{\sigma^2}(X_t - a) + \frac{2a}{\sigma^2}X_t\right).$$

Montrer que $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale, et en déduire la valeur de $\mathbb{P}(\tau_a < \infty)$.

- Conclure que la variable aléatoire $X^* := \sup_{t \geq 0} X_t$ est la racine carrée d'une variable aléatoire de loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 2 (Examen 2016). On considère l'équation différentielle stochastique

$$X_0 = 0, \quad dX_t = \frac{1}{2(1+X_t^2)} dt + \frac{1}{\sqrt{1+X_t^2}} dB_t,$$

où B désigne un mouvement brownien réel. Le but est d'étudier les variables aléatoires

$$X_* := \inf\{X_t : t \geq 0\} \in [-\infty, 0] \quad \text{et} \quad X^* := \sup\{X_t : t \geq 0\} \in [0, +\infty].$$

- Justifier que cette EDS admet une unique solution forte.
- Trouver $F \in C^2$ avec $F(0) = 1$, $F(\infty) = 0$, telle que $(F(X_t))_{t \geq 0}$ soit une martingale locale.
- Soient $a, b > 0$. On pose $\tau := \tau_{-a} \wedge \tau_b$, où pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\tau_r := \inf\{t \geq 0 : X_t = r\}$.
(a) Montrer que $(e^{-X_{t \wedge \tau}})_{t \geq 0}$ est une martingale de carré intégrable, et que pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[e^{-2X_{t \wedge \tau}}] = 1 + \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau} \frac{e^{-2X_s}}{1+X_s^2} ds\right].$$

(b) En déduire une constante $C(a, b)$ telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[t \wedge \tau] \leq C(a, b)$.

- Déduire des deux questions précédentes que

$$\mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b) = \frac{1 - e^{-b}}{e^a - e^{-b}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\tau_{-a} > \tau_b) = \frac{e^a - 1}{e^a - e^{-b}}.$$

- Conclure que $X^* = \infty$ p.s. et que $-X_*$ suit une loi exponentielle.

Exercice 3 (Monotonie). Soient $b, \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions lipschitziennes, et $x \leq y$ des réels. On note $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ les solutions de $dZ_t = b(Z_t) dt + \sigma(Z_t) dB_t$ avec $X_0 = x$ et $Y_0 = y$.

1. Justifier que le processus $(U_t)_{t \geq 0}$ défini par la formule suivante a bien un sens :

$$U_t := \int_0^t \frac{\sigma(X_s) - \sigma(Y_s)}{X_s - Y_s} \mathbf{1}_{X_s \neq Y_s} dB_s + \int_0^t \frac{b(X_s) - b(Y_s)}{X_s - Y_s} \mathbf{1}_{X_s \neq Y_s} ds.$$

2. Établir l'identité suivante, valable pour tout $t \geq 0$:

$$X_t - Y_t = (x - y) \exp \left\{ U_t - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\sigma(X_s) - \sigma(Y_s)}{X_s - Y_s} \right)^2 \mathbf{1}_{X_s \neq Y_s} ds \right\}.$$

3. En déduire que presque-sûrement : $\forall t \geq 0, X_t \leq Y_t$.

Exercice 4 (Changement de variable). Établir l'existence d'une unique solution forte à l'EDS

$$dX_t = \left(\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{X_t}{2} \right) dt + \sqrt{1 + X_t^2} dB_t, \quad X_0 = x$$

puis la déterminer explicitement en effectuant le changement de variable $Y_t = \operatorname{argsinh}(X_t)$.

Exercice 5 (Brownien géométrique). Le but de cet exercice est de résoudre l'EDS suivante :

$$dX_t = \{r(t)X_t + f(t)\} dt + \{v(t)X_t + g(t)\} dB_t, \quad X_0 = \zeta,$$

où $v, r, f, g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sont boréliennes bornées et $\zeta \in L^2$ est indépendante de $(B_t)_{t \geq 0}$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution forte.
2. Trouver une solution dans le cas où $f = g = 0$ et où r et v sont des fonctions constantes.
3. En déduire une solution dans le cas où $f = g = 0$ mais r et v ne sont pas constantes.
4. Résoudre le cas général.

Indication : On pourra s'inspirer de la variation de la constante pour passer de la solution d'une équation différentielle homogène à une équation avec second membre.

Exercice 6 (Sinh du brownien). Soit $((B_t, C_t))_{t \geq 0}$ un brownien plan. Pour $t \geq 0$, on pose

$$Y_t := \int_0^t e^{C_t - C_s} dB_s \quad \text{et} \quad W_t := \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 + Y_s^2}} dB_s + \int_0^t \frac{Y_s}{\sqrt{1 + Y_s^2}} dC_s.$$

1. Montrer que $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien réel.
2. Vérifier que $(Y_t)_{t \geq 0}$ est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dY_t = \sqrt{1 + Y_t^2} dW_t + \frac{Y_t}{2} dt; \quad Y_0 = 0.$$

3. Pour $t \geq 0$, on pose $X_t := \sinh(W_t)$. Quelle équation différentielle stochastique vérifie le processus $(X_t)_{t \geq 0}$? Que peut-on en conclure?
4. Pour $0 \leq s \leq t$, on pose $\tilde{B}_s^t := B_t - B_{t-s}$. On rappelle que $(\tilde{B}_s^t)_{0 \leq s \leq t}$ est un mouvement brownien sur $[0, t]$. Prouver l'identité suivante, valable pour tout $f \in L^2([0, t])$:

$$\int_0^t f(s) dB_s = \int_0^t f(t-s) d\tilde{B}_s^t.$$

5. Pour $t \geq 0$, on pose $Z_t := \int_0^t e^{C_s} dB_s$. Montrer que pour tout $t \geq 0$, Z_t a même loi que Y_t .
6. Montrer que $(Y_t)_{t \geq 0}$ n'est pas une martingale, mais que $(Z_t)_{t \geq 0}$ en est une.