ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

Dans cette feuille, $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien réel sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Examen 2015). On se donne une constante $\sigma > 0$ et on considère l'EDS

$$dX_t = -\frac{X_t}{1+t}dt + \frac{\sigma}{1+t}dB_t, \qquad X_0 = 0.$$

1. Justifier que cette EDS admet une unique solution $(X_t)_{t\geq 0}$.

   Les fonctions $(x,t) \to \frac{-x}{1+t}$ et $\frac{\sigma}{1+t}$ sont Lipschitz.

2. Calculer la différentielle stochastique du processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ défini par $Y_t := (1+t)X_t$. En déduire la forme explicite de $(X_t)_{t\geq 0}$. Justifier que $X_t \to 0$ quand t tend vers l'infini.

   $\mathrm{d}Y_t = X_t\mathrm{d}t + (1+t)\mathrm{d}X_t = \sigma dB_t$. On a donc $Y_t = \sigma B_t$ et $X_t = B_t/(1+t)$. Pour tout ϵ et t, on a que $\mathbb{P}(\sup_{[t,t+1]} X_s \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(\sup_{[0,t+1]} B_t \geq t\epsilon) = O(e^{-t\epsilon^2})$. On conclue par Borel Cantelli.

3. On fixe $a > 0$ et on note $\tau_a := \inf\{t \geq 0\colon X_t \geq a\}$. Pour $t \geq 0$, on pose

$$M_t := \exp\left(\frac{2at}{\sigma^2}(X_t - a) + \frac{2a}{\sigma^2}X_t\right).$$

   Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, et en déduire la valeur de $\mathbb{P}(\tau_a < \infty)$.

   On calcule la différentielle stochastique.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}M &= (\frac{2at}{\sigma^2} + \frac{2a}{\sigma^2})M_t\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}(\frac{2at}{\sigma^2} + \frac{2a}{\sigma^2})^2 M_t \mathrm{d}\langle X\rangle + \frac{2a(X_t - a)}{\sigma^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2aM_t}{\sigma^2}\big[-X_t\mathrm{d}t + \sigma dB_t + a\mathrm{d}t + (X_t - a)M_t\mathrm{d}t\big]\end{aligned}$$

   et on voit que M est bien une martingale locale. Par ailleurs $|X_t| =\leq |B_t|$ pour tout t donc le sup de M est borné par une exponentielle de mouvement brownien qui est bien dans L^1 et M est une vrai martingale.
   Par la question précédente, $M_t \to 0$ p.s quand $t \to \infty$. On applique le théorème d'arrêt à la martingale arrêtée qui est bien bornée et on obtient $M_0 = 1 = e^{2a^2/\sigma^2}\mathbb{P}(\tau_a < \infty)$.

4. Conclure que la variable aléatoire $X^\star := \sup_{t\geq 0} X_t$ est la racine carrée d'une variable aléatoire de loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

   On remarque que $\mathbb{P}((X^*)^2 \geq c) = \mathbb{P}(\tau_{\sqrt{c}} < \infty) = e^{-\frac{2}{\sigma^2}c}$ donc X^* est la racine carrée d'une loi exponentielle de paramètre $2/\sigma^2$.

Exercice 2 (Examen 2016). On considère l'équation différentielle stochastique

$$X_0 = 0, \qquad dX_t = \frac{1}{2(1+X_t^2)}dt + \frac{1}{\sqrt{1+X_t^2}}dB_t,$$

où B désigne un mouvement brownien réel. Le but est d'étudier les variables aléatoires

$$X_\star := \inf\{X_t\colon t \geq 0\} \in [-\infty, 0] \quad \text{et} \quad X^\star := \sup\{X_t\colon t \geq 0\} \in [0, +\infty].$$

1. Justifier que cette EDS admet une unique solution forte.

   Les fonctions $x \to \frac{1}{2(1+x^2)}$ et $x \to \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sont Lipschitz.

2. Trouver $F \in \mathcal{C}^2$ avec $F(0) = 1, F(\infty) = 0$, telle que $(F(X_t))_{t\geq 0}$ soit une martingale locale.

   On va chercher une EDP que doit satisfaire F.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(X) &= F'(X)\mathrm{d}X + \frac{1}{2}F''(X)\mathrm{d}\langle X\rangle \\ &= \frac{F'(X)}{\sqrt{1+X^2}}\mathrm{d}B + \frac{F'(X)+F''(X)}{2(1+X^2)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   On constate que l'on peut choisir $F(x) = e^{-x}$.

3. Soient $a, b > 0$. On pose $\tau := \tau_{-a} \wedge \tau_b$, où pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\tau_r := \inf\{t \geq 0\colon\, X_t = r\}$.

   (a) Montrer que $(e^{-X_{t\wedge\tau}})_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable, et que pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[e^{-2X_{t\wedge\tau}}\right] \quad = \quad 1 + \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau} \frac{e^{-2X_s}}{1+X_s^2}\, ds\right].$$

   $M_t := e^{X_{t\wedge\tau}}$ est une martingale locale par le théorème d'arrêt et est bornée donc c'est une vrai martingale. L'équation demandée est juste $\mathbb{E}(M^2) = M_0 + \int \mathrm{d}\langle M\rangle$.

   (b) En déduire une constante $C(a, b)$ telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[t \wedge \tau] \leq C(a, b)$.

   On remarque que $\mathbb{E}(t\wedge\tau)\frac{e^{-2b}}{1+a^2+b^2} \leq \mathbb{E}(\int_0^{t\wedge\tau} e^{-2X_s}1 + X_s^2) \leq \mathbb{E}(t\wedge\tau)e^{2a}$. Comme par ailleurs $\mathbb{E}(e^{-2X_{t\wedge\tau}})$ est borné indépendamment de t, on conclue.

4. Déduire des deux questions précédentes que

$$\mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b) \;=\; \frac{1-e^{-b}}{e^a - e^{-b}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\tau_{-a} > \tau_b) \;=\; \frac{e^a - 1}{e^a - e^{-b}}.$$

   D'après la question précédente, τ est fini presque sûrement. Comme M est une martingale bornée dans L^2 (en fait même bornée tout court), elle converge aussi dans L^1 vers sa limite p.s et on a $1 = M_0 = e^a\mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b) + e^{-b}(1 - \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b))$

5. Conclure que $X^\star = \infty$ p.s. et que $-X_\star$ suit une loi exponentielle.

   On a vu que la probabilité de rester pour un temps infini dans l'intervalle $[-a, b]$ est nulle donc au moins l'un des deux entre X^* et X_* doit forcément être infini. En particulier $\mathbb{P}(\tau_b = \infty) \leq \inf_a \mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b) = 0$ et donc $X^* = \infty$ presque sûrement. De même $\mathbb{P}(\tau_{-a} = \infty) = \lim_{b\to\infty}\mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b) = 1 - e^{-a}$. On reconnaît une loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 3 (Monotonie). Soient $b, \sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions lipschitziennes, et $x \leq y$ des réels. On note $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ les solutions de $dZ_t = b(Z_t)\, dt + \sigma(Z_t)\, dB_t$ avec $X_0 = x$ et $Y_0 = y$.

1. Justifier que le processus $(U_t)_{t\geq 0}$ défini par la formule suivante a bien un sens :

$$U_t := \int_0^t \frac{\sigma(X_s) - \sigma(Y_s)}{X_s - Y_s}\mathbf{1}_{X_s \neq Y_s}\, dB_s + \int_0^t \frac{b(X_s) - b(Y_s)}{X_s - Y_s}\mathbf{1}_{X_s\neq Y_s}\, ds.$$

On remarque que les intégrandes sont bornées puisque σ et b sont Lipschitziennes. Ce sont aussi très clairement des processus progressifs et donc les intégrales sont bien définies.
Par ailleurs, on remarque que par la propriété de Markov forte et l'unicité forte des solutions d'EDS, on pourrait aussi voir ces intégrales comme allant jusqu'au premier instant où $X = Y$ qui est un temps d'arrêt.

2. Établir l'identité suivante, valable pour tout $t \geq 0$:

$$X_t - Y_t = (x - y) \exp \left\{ U_t - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\sigma(X_s) - \sigma(Y_s)}{X_s - Y_s} \right)^2 \mathbf{1}_{X_s \neq Y_s} \, ds \right\}.$$

On calcule la différentielle stochastique des deux cotés séparément. $d(X_t - Y_t) = (b(X_t) - b(Y_t))\mathrm{d}t + (\sigma(X_t) - \sigma(Y_t))\mathrm{d}B_t$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x-y)\ldots &= (X-Y)\mathrm{d}U - \frac{1}{2}\Big(\frac{\sigma(X_s) - \sigma(Y_s)}{X_s - Y_s}\Big)^2 1_{X_t \neq Y_t}(X-Y)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(X_t - Y_t)\mathrm{d}\langle U\rangle \\ &= (\sigma(X) - \sigma(Y))\mathrm{d}B + (b(X) - b(Y))\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On conclue par unicité forte des solutions d'EDS.

3. En déduire que presque-sûrement : $\forall t \geq 0, X_t \leq Y_t$.

L'exponentielle est positive (ou nulle si $U_t - \ldots$ tends vers $-\infty$ en temps fini).

Exercice 4 (Changement de variable). Établir l'existence d'une unique solution forte à l'EDS

$$dX_t = \left(\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{X_t}{2} \right) dt + \sqrt{1 + X_t^2} \, dB_t, \qquad X_0 = x$$

puis la déterminer explicitement en effectuant le changement de variable $Y_t = \operatorname{argsinh}(X_t)$.

On a existence et unicité forte car les coefficients sont Lipschitz.
On sait que $\operatorname{argsinh}'(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ et donc $\operatorname{argsinh}''(x) = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$. On a donc

$$dY_t = \frac{1}{\sqrt{1+X^2}} \left(\sqrt{1+X^2}\mathrm{d}t + \frac{X}{2}\mathrm{d}t + \sqrt{1+X^2}\mathrm{d}B \right) - \frac{X}{2(1+X^2)^{3/2}}(1+X^2)\mathrm{d}t$$

et donc $Y_t = t + B_t$ et $X_t = \sinh(t + B_t)$.

Exercice 5 (Brownien géométrique). Le but de cet exercice est de résoudre l'EDS suivante :

$$dX_t \quad = \quad \{r(t)X_t + f(t)\} \, dt + \{v(t)X_t + g(t)\} \, dB_t, \qquad X_0 = \zeta,$$

où $v, r, f, g \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sont boréliennes bornées et $\zeta \in L^2$ est indépendante de $(B_t)_{t \geq 0}$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution forte.

Les coefficients sont Lipschitz en X, avec des constantes de Lipschitz bornées uniformément en t et une borne uniforme de croissance linéaire.

2. Trouver une solution dans le cas où $f = g = 0$ et où r et v sont des fonctions constantes.

Il est naturel de chercher sous forme exponentielle puisqu'on a une équation linéaire d'ordre 1. On vérifie facilement que $\zeta e^{vB_t + (r - v^2/2)t}$ est solution.

3. En déduire une solution dans le cas où $f = g = 0$ mais r et v ne sont pas constantes.

   On peut penser qu'on veut suivre pour chaque incrément de temps la solution de l'équation précédente avec les constantes appropriées, il est donc naturel de considérer $\zeta e^{\int v(s)\mathrm{d}B_s + \int (r-\sigma^2/2)\mathrm{ds}}$ qui est bien solution.

4. Résoudre le cas général.
   Indication : On pourra s'inspirer de la variation de la constante pour passer de la solution d'une équation différentielle homogène à une équation avec second membre.

   On cherche une solution sous la forme ΛE où E est l'exponentielle de la question précédente et Λ est un processus d'Itô à déterminer. On pose $d\Lambda = \alpha dB + \beta dt$ et en réinjectant dans l'équation on trouve $\alpha = f/E$ et $\beta = (g - rf)/E$. On a donc une expression sous forme d'intégrale stochastique pour Λ et donc une solution pour l'équation.

Exercice 6 (Sinh du brownien). Soit $((B_t, C_t))_{t\geq 0}$ un brownien plan. Pour $t \geq 0$, on pose

$$Y_t := \int_0^t e^{C_t - C_s}\, dB_s \qquad \text{et} \qquad W_t := \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+Y_s^2}}\, dB_s + \int_0^t \frac{Y_s}{\sqrt{1+Y_s^2}}\, dC_s.$$

1. Montrer que $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien réel.

   W_t est une martingale continue comme intégrale stochastique (les intégrandes sont bornées). On calcule $d\langle W\rangle = \frac{1}{(1+Y^2)}\mathrm{d}t + \frac{Y^2}{1+Y^2}\mathrm{d}t = dt$ ce qui conclue par le critère de Lévy.

2. Vérifier que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dY_t = \sqrt{1+Y_t^2}\, dW_t + \frac{Y_t}{2}\, dt\,; \qquad Y_0 = 0.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(e^{C_t}\int_0^t e^{-C_s} dB_s) &= Y\mathrm{d}C_t + \frac{1}{2}Y\mathrm{d}t + e^{C_t}e^{-C_t}\mathrm{d}B_t \\ &= \sqrt{1+Y_t}^2 dW_t + \frac{Y_t}{2}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

   dans la seconde ligne, l'expression de dW à partir de dB et dC est évidente.

3. Pour $t \geq 0$, on pose $X_t := \sinh(W_t)$. Quelle équation différentielle stochastique vérifie le processus $(X_t)_{t\geq 0}$? Que peut-on en conclure ?

   X_t vérifie la même EDS que Y, on peut donc en conclure âr unicité forte des solutions d'EDS que $X_t = Y_t$ p.s.

4. Pour $0 \leq s \leq t$, on pose $\widetilde{B}_s^t := B_t - B_{t-s}$. On rappelle que $(\widetilde{B}_s^t)_{0\leq s\leq t}$ est un mouvement brownien sur $[0, t]$. Prouver l'identité suivante, valable pour tout $f \in L^2([0, t])$:

$$\int_0^t f(s)\, dB_s = \int_0^t f(t-s)\, d\widetilde{B}_s^t.$$

   Si f est une fonction constante par morceaux, l'égalité est triviale : on ré-indice seulement les termes d'une somme finie. On conclue par densité.

5. Pour $t \geq 0$, on pose $Z_t := \int_0^t e^{C_s} dB_s$. Montrer que pour tout $t \geq 0$, Z_t a même loi que Y_t.

   Par la question précédente, on a $\int_0^t e^{C_s} dB_s = \int_0^t e^{C_{t-s}} d\tilde{B}_s$ et comme C et B sont indépendant, la paire $(C, \tilde{B})$ a la même loi que la paire (C, B).

6. Montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ n'est pas une martingale, mais que $(Z_t)_{t\geq 0}$ en est une.

   Y_t n'est pas une martingale car sa différentielle stochastique inclue un terme en dt. Z en est une car c'est une intégrale stochastique et $\mathbb{E}(\int_0^t e^{2Cs} ds) < \infty$ clairement.