THÉORÈME DE GIRSANOV

Dans cette feuille, $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien réel sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Dérive). Soit $a > 0$. On rappelle que $T := \inf\{t \geq 0 \colon B_t \geq a\}$ a pour densité

$$f_T(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Étant donné $b \in \mathbb{R}$, on pose $\widetilde{B}_t := B_t - bt$ et on s'intéresse à $\widetilde{T} := \inf\{t \geq 0 \colon \widetilde{B}_t \geq a\}$.

1. Trouver une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_\infty$ sous laquelle $\{\widetilde{B}_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
2. En déduire, sous la mesure $\mathbb{P}$, la fonction de répartition de $\widetilde{T}$ puis la loi de $Z := \sup_{t\geq 0} \widetilde{B_t}$.

Exercice 2 (Examen 2015). Étant donné $x \in \mathbb{R}$, on considère l'EDS

$$dX_t = dB_t - \frac{X_t}{1 + X_t^2}\, dt, \qquad X_0 = x.$$

1. Justifier que cette équation différentielle stochastique admet une unique solution $(X_t)_{t\geq 0}$.
2. Justifier que le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, où
$$Z_t := \exp\left\{\int_0^t \frac{X_s}{1 + X_s^2} dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{X_s^2}{\left(1 + X_s^2\right)^2} ds\right\}.$$
3. Calculer la différentielle stochastique de $\left(\ln\left(1 + X_t^2\right)\right)_{t\geq 0}$ et en déduire que pour $t \geq 0$,
$$\frac{1 + X_t^2}{1 + x^2} = Z_t^2 \exp\left\{\int_0^t \frac{1 - 2X_s^2}{\left(1 + X_s^2\right)^2} ds\right\}.$$
4. Construire une probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle $(X_s - x)_{s\geq 0}$ est un mouvement brownien.
5. On fixe $t \geq 0$. En déduire que pour $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable, on a $\mathbb{E}\left[h(X_t)\right] = \widehat{h}(x)$ avec
$$\widehat{h}(x) := \mathbb{E}\left[h(x + B_t)\left(\frac{1 + x^2}{1 + (x + B_t)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1 - 2(x + B_s)^2}{\left(1 + (x + B_s)^2\right)^2} ds\right\}\right].$$
6. Soit ζ une variable aléatoire indépendante de $(B_s)_{s\geq 0}$, de densité $x \mapsto (\pi(1 + x^2))^{-1}$. On note $(X_s^\star)_{s\geq 0}$ la solution de l'EDS ci-dessus avec $X_0^\star = \zeta$. Ainsi, on a $\mathbb{E}\left[h(X_t^\star)|\zeta\right] = \widehat{h}\left(\zeta\right)$.
   (a) Vérifier que le processus $(B_{t-s} - B_t)_{s\in[0,t]}$ est un mouvement brownien restreint à $[0, t]$.
   (b) En déduire que pour tout $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,
   $$\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{h}(x)}{1 + x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{h(x)}{1 + x^2} dx.$$

(c) Pour $t \geq 0$, quelle est la loi de $X_t^\star$?

Exercice 3 (Fonctionnelles quadratiques du brownien). Pour $a, b, t \geq 0$, on cherche ici à calculer

$$I(a,b) := \mathbb{E}\left[\exp\left\{-aB_t^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2\,ds\right\}\right].$$

1. Calculer $I(a,0)$ pour tout a. On supposera désormais $b > 0$.
2. Trouver $\psi \in M^1_{\mathrm{loc}}$ tel que le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ défini ci-dessous soit une martingale locale :
$$Z_t := \exp\left\{-b\int_0^t B_s\,dB_s - \int_0^t \psi(s)\,ds\right\}.$$
3. Exprimer Z_t en fonction de b, t, B_t et $\int_0^t B_s^2\,ds$ seulement, et en déduire que
$$I(a,b) = \mathbb{E}\left[Z_t \exp\left\{\left(\frac{b}{2} - a\right)B_t^2\right\}\right]\exp\left(-\frac{bt}{2}\right).$$
4. Construire une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ sous laquelle le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ défini par $W_t := B_t + b\int_0^t B_s\,ds$ soit un mouvement brownien.
5. Montrer que pour tout $t \geq 0$,
$$B_t = \int_0^t e^{b(s-t)}\,dW_s.$$
6. Pour $t \geq 0$ fixé, expliciter la loi de B_t sous la mesure $\mathbb{Q}$ et en déduire la formule suivante :
$$I(a,b) = \left\{\cosh(bt) + \frac{2a}{b}\sinh(bt)\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Exercice 4 (Condition de Novikov). Étant donné $\phi \in M^2_{\mathrm{loc}}$, on pose pour tout $t \geq 0$,

$$Z_\phi(t) := \exp\left\{\int_0^t \phi(s)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \phi^2(s)ds\right\}.$$

Le but est de démontrer que $(Z_\phi(t))_{t\geq 0}$ est une martingale sous la condition de Novikov :

$$\forall t \geq 0, \qquad \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \phi^2(s)\,ds\right\}\right] < \infty. \tag{$\star$}$$

1. Que peut-on dire du processus $(Z_\phi(t))_{t\geq 0}$ en général ? Et si $\mathbb{E}[Z_\phi(t)] = 1$ pour tout $t \geq 0$?
2. Soit $0 < \lambda < 1$. Trouver $p > 1$ et $0 < \theta < 1$ tels que pour tout $t \geq 0$,
$$Z^p_{\lambda\phi}(t) = Z^\theta_\phi(t)\exp\left\{\frac{1-\theta}{2}\int_0^t \phi^2(s)\,ds\right\}.$$
3. En déduire que sous la condition ($\star$), on a $\mathbb{E}[Z_{\lambda\phi}(t)] = 1$ pour tout $t \geq 0$.
4. Montrer par ailleurs que pour tout $t \geq 0$,
$$\mathbb{E}[Z_{\lambda\phi}(t)] \leq \mathbb{E}\left[Z_\phi(t)\right]^{\lambda^2}\mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \phi(s)\,dB_s\right\}\right]^{2\lambda(1-\lambda)}.$$
5. Vérifier que le membre droit est fini sous la condition ($\star$), et conclure.