Master de Mathématiques – Sorbonne Université (M1)

UE 4M039 : Histoire des mathématiques

(Alexandre Guilbaud et Laurent Mazliak)

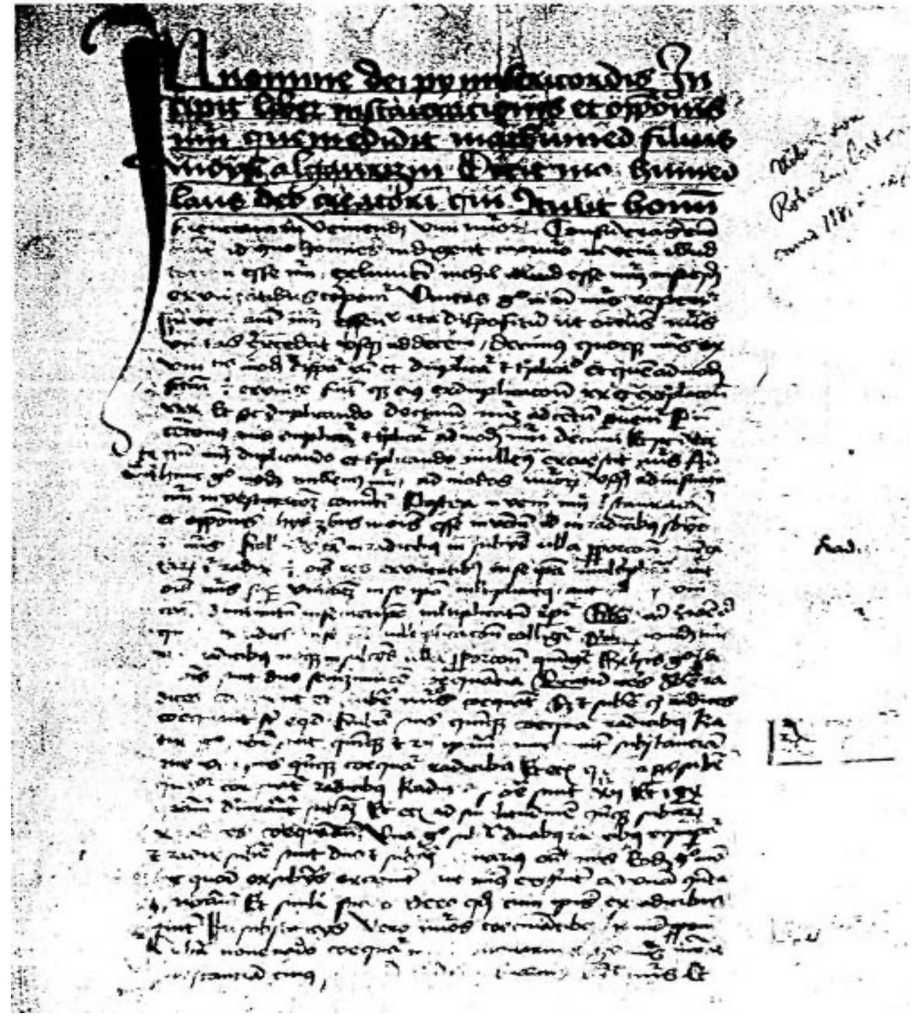
L'algèbre à la Renaissance

Alexandre GUILBAUD

(E-mail : alexandre.guilbaud@imj-prg.fr)

I. Du développement de l’algèbre

- Les dénominations de l’inconnue introduites par Al-Khwarizmi – say (*chose*) ou gizr (*racine*) – deviennent *res* et *radix* au Moyen-Age dans les traductions latines de son *Kitāb al-jabr wa-al-muqābala* (celles de Robert de Chester, ou de Gérard de Crémone, au XIIe siècle)
- On retrouve ces dénominations dans le *Liber Abaci* (1202) de Léonard de Pise (alias Fibonacci).
- A la Renaissance :
  - la *cosa* des algébristes italiens
  - la *Coss* des algébristes allemands



Traduction latine de l’Algèbre d’Al-Khwariizmi par Robert de Chester (environ 1141) [Source : http://www.math.ens.fr/culturemath/video/html/Djebbar/icono.htm#2]

I.1. Luca Pacioli (1494) : les débuts de l'algèbre italienne

Luca Pacioli avec son élève Guidobaldo Ier de Montefeltro (1495), musée Capodimonte de Naples

- En 1494, Luca Pacioli publie l'un des premiers livres imprimés contenant de l'algèbre (*Summa de arithmetica, geometria, proporzioni di proporzionalita*.
- L'ouvrage comporte deux volumes : le premier embrasse l'arithmétique théorique et pratique ainsi que l'algèbre, le second la géométrie.
- Une partie des acquis algébriques des arabes y est reprise et assimilée : Luca Pacioli précise que la *pratica speculativa*, vulgairement appelée « règle de la chose » (*regola della cosa*) ou « grand art » (*arte maggiore*) s'appelle aussi *algebra* ou *almucabala*.

I.1. Luca Pacioli (1494) : les débuts de l’algèbre italienne

- Du point de vue de la théorie des équations, Pacioli n’envisage que les équations du 2^{nd} degré (en reprenant la classification établie par les savants arabes) ainsi que huit types d’équations biquadratiques dont deux se réduisent à des équations du 3^{e} degré et sont appelées « impossibles ».
- Pacioli indique les abréviations dont on se sert dans les calculs usuels ainsi que d’autres qu’il appelle expressément « algébriques » et que l’on emploie dans la *regola della cosa* : l’inconnue (*res* ou *cosa*) est désignée par le symbole co. / des abréviations sont utilisées pour les puissances, etc.

I.2. La querelle des équations cubiques

- [Sources : œuvres et lettres des protagonistes]
- Autour de 1520, Scipione del Ferro (1456-1526), professeur de maths à Bologne, trouve une méthode de résolution pour certains cas de l'équation $x^3+px=q$, et la transmet à son disciple Antonio Maria del Fior.
- En 1535, Fior défit Nicollo Fontana de Brescia, dit Tartaglia (1499-1557), qui trouve une solution.
- Mars 1539, Girolamo Cardano, dit Cardan (1501-1576), invite Tartaglia à Milan et obtient ses solutions (en vers) en lui promettant de ne pas les publier (d'après Tartaglia).
- 1543 : Cardan apprend que del Ferro possédait certaines solutions.
- 1545 : Cardan publie les solutions de Tartaglia dans son *Ars Magna* et bien d'autres (autres cas de l'équation du 3e degré et preuves, solutions des équations du 4e degré découvertes par son élève Ludovico Ferrari).
- 1546-1550 : représailles de Tartaglia, violents échanges et défis avec Ludovico Ferrari.

I.3. L'*Ars magna* de Cardan (1545)

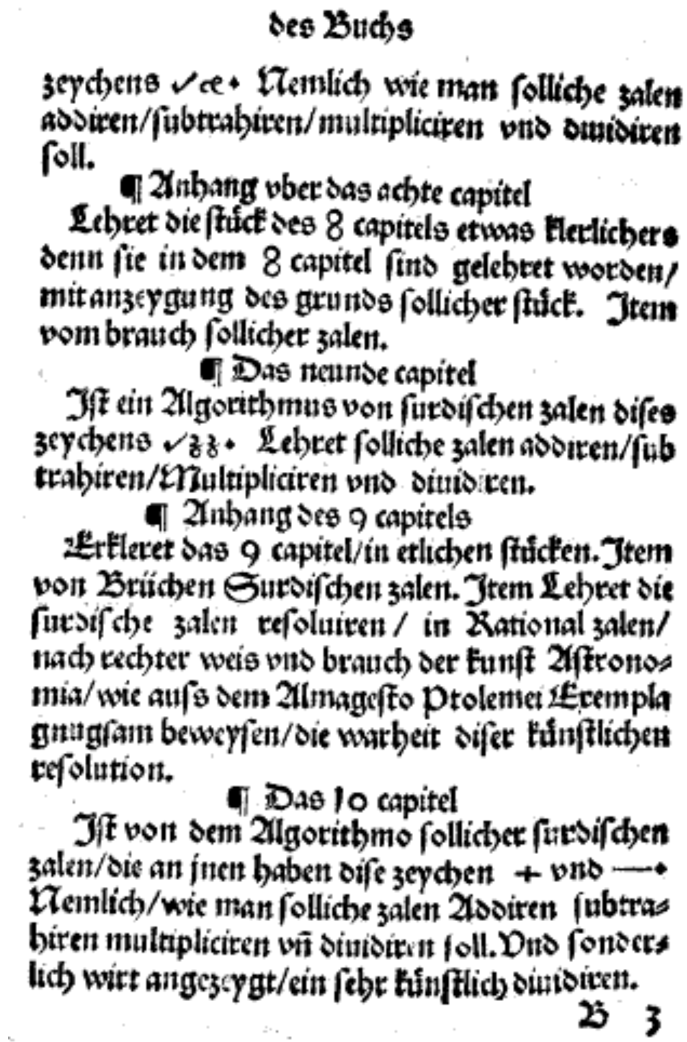
- Dans le chapitre XI :
  - Equation cubique du type « cube + nombres de choses = nombre » ($x^3+px=q$).
  - Rappelle l'historique de la solution (del Ferro, Fior, Tartaglia, lui-même a trouvé la preuve avec beaucoup de difficulté).
  - Preuve (géométrique) de la solution.
  - Enoncé de la règle
  - Exemples.
- Il reconnaît la possibilité de multiplicité des racines et mentionne aussi parfois des solutions négatives en fin de résolution (« nombres fictifs » ou « racines moins pures »).
- Il ne donne pas de formule générale unique et ne traite pas le cas irréductible.
- Il mentionne des solutions imaginaires dans un problème.

I.4. L'*Algebra* de Bombelli (1572)

- Bombelli consulte à Rome le manuscrit des *Arithmétiques* de Diophante et en intègre une partie dans son *Algebra* (1572).
- Il est le premier à intégrer des nombres « complexes » dans sa méthode de résolution et à les manipuler formellement, et, du coup, le premier à résoudre l'équation cubique dans le cas irréductible (et donc dans tous les cas).
- Il considère les racines des équations comme des sommes algébriques de nombres positifs affectés d'un des quatre signes suivants : *piu* (« + »), *meno* (« – »), *piu di meno* (« $+i$ »), *meno di meno* (« $-i$ »)…
- Donne les règles de multiplication de ces quatre signes.
- Défend l'algèbre comme discipline théorique.

II.1. L'algèbre cossique allemande

- En 1525, Christoff Rudolff publie le premier manuel d'algèbre en langue allemande (*Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen Regeln Algebre so gemeinicklich die Coss genennt*)
  - inspiré de la *Coss* d'Adam Ries (1524), restée inédite
  - utilisation courante des signes « + » et « – »
  - notation  pour l'inconnue
  - introduction de signes pour la notation des racines (ex. : √ pour la racine quarrée)
- Les Allemands se rallient presque tous à la notation de Rudolff, notamment :
  - Michael Stifel, dans son *Arithmetica integra* (1544),
  - Christopher Clavius, dans son *Algebra* (1608)


des Buchs

zeychens √ce. Nemlich wie man solliche zalen addiren/subtrahiren/multipliciren vnd diuidiren soll.

¶ Anhang vber das achte capitel

Lehret die stück des 8 capitels etwas klerlichers denn sie in dem 8 capitel sind gelehret worden/ mit anzeygung des grunds sollicher stück. Item vom brauch sollicher zalen.

¶ Das neunde capitel

Ist ein Algorithmus von surdischen zalen dises zeychens √zz. Lehret solliche zalen addiren/subtrahiren/Multipliciren vnd diuidiren.

¶ Anhang des 9 capitels

Erkleret das 9 capitel/in etlichen stücken. Item von Brüchen Surdischen zalen. Item Lehret die surdische zalen resoluiren / in Rational zalen/ nach rechter weis vnd brauch der kunst Astronomia/wie auss dem Almagesto Ptolemei Exempla gnugsam beweysen/die warheit diser künstlichen resolution.

¶ Das 10 capitel

Ist von dem Algorithmo sollicher surdischen zalen/die an jnen haben dise zeychen + vnd —. Nemlich/wie man solliche zalen Addiren subtrahiren multipliciren vñ diuidiren soll. Vnd sonderlich wirt angezeygt/ein sehr künstlich diuidiren.

B 3

*Die Coss Christoffs Rudolffs [...] durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt,*1553.

II.2. L’inconnue dans tous ses états

- Les Italiens abrégent *cosa* en *co*, par exemple
  - Luca Pacioli, *Summa der Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalita* (1494).
  - Tartaglia et Cardan (utilisent aussi le mot latin *positiones* et son abréviation *pos*).

Soit 1 ③ esgale à 6 ① + 40

le $\frac{1}{3}$ du 6 est 2 | $\frac{1}{2}$ est 20

son cube 8 | son □ est 400

ostez 8

392

sa √ est √ 392

lequel adjousté à 20

& soubstraict de 20,

viendra $\begin{cases} 20 + \sqrt{392} \\ 20 - \sqrt{392} \end{cases}$

la racine cubicque de

chacun est $\begin{cases} 2 + \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{cases}$

la somme est 4 pour la valeur de 1 ①

- Une autre voie (on ne désigne pas l’inconnue, mais on marque sa présence par l’indication de sa puissance à côté de son coefficient) est explorée par certains mathématiciens :
  - Nicolas Chuquet, dans *Le triparty en la science des nombres* (1484)
  - Bombelli, dans l’*Algebra* (1572)
  - Stevin, dans l’*Arithmétique* (1585), puis Girard dans l’*Invention nouvelle en algèbre* (1629).

Pour Chuquet : 1^1, 1^2, 1^3, 1^4, …

Pour Bombelli : $1\overset{1}{\smile}$, $1\overset{2}{\smile}$, $1\overset{3}{\smile}$, $1\overset{4}{\smile}$ …

Pour Stevin : 1 ①, 1 ②, 1 ③, 1 ④, …

- Plusieurs œuvres sur l’algèbre, dont :
  - *In artem analyticem Isagoge* (*Introduction à l’art analytique*), 1591
  - *Zeteticorum libri quinque* (*Cinq livres des Zététiques*), 1593
  - *Ad logisticem speciosam Notae priores* (*Premières notes sur la logistique spécieuse*), postérieur à 1631

L'INTRODVCTION
EN L'ART ANALYTIQVE.
OV
ALGEBRE NOVVELLE.
CHAPITRE PREMIER.

De la definition, & diuiſion de l'Analyſe, & des choſes qui ſeruent à la Zeteticque.

IL ſe rencontre dans les Mathematiques vne certaine maniere & façon de rechercher la verité, laquelle on dit auoir eſté premierement inuentée par Platon, que Theon a appellée Analyſe, & par luy definie la ſuppoſition de ce que l'on cherche, comme s'il eſtoit concedé pour paruenir à vne verité cherchée, & ce par le moyen des conſequences; comme au contraire la Syntheſe eſt la ſuppoſition d'vne choſe concedée pour paruenir à la cognoiſſance de ce que l'on cherche par le moyen des conſequences. Et combien que les an-

III.1. L'art analytique de François Viète (1540-1603)

- Une méthode pour résoudre tous les problèmes grâce à une invention nouvelle :

  La logistique spécieuse : *un calcul avec des symboles, un calcul littéral*

→ **Une nouvelle algèbre**

« *Tous les mathématiciens savaient que sous leur Algèbre ou Almulcabale qu'ils vantaient, et qu'ils nommaient le Grand Art, étaient cachées des masses d'or incomparables, mais il ne les trouvaient pas. Aussi vouaient-ils des hécatombes, faisaient-ils des sacrifices à Apollon et aux Muses lorsqu'ils parvenaient à la solution d'un seul de ces problèmes que je résous spontanément par dizaines, par vingtaines ; ce qui prouve que notre art est la méthode d'invention la plus certaine en mathématiques.* »

« La science de bien trouver dans les mathématiques »

« L'Art analytique s'attribue justement le magnifique problème des problèmes qui est : résoudre tout problème »

« Mais la forme sous laquelle on doit aborder la recherche exige les ressources d'un art spécial, qui exerce sa logique non sur des nombres, suivant l'erreur des analystes anciens, mais au moyen d'une logistique nouvelle… »

« Logistique spécieuse est celle qui est exposée par des signes ou des figures, par exemple, par des lettres de l'alphabet »

III.1. L'algèbre littérale de François Viète (1540-1603)

- Première utilisation des lettres pour désigner les inconnues et les coefficients.
- Respect de la loi des homogènes.
- La désignation entière ou abrégée de la puissance est accolée à l'inconnue en utilisant, au-delà du cube, la terminologie combinée de Diophante et des cossistes allemands.
- En 1631, Harriot remplace les lettres majuscules de Viète par des minuscules…

« Afin que la mise en équation soit aidée par quelque artifice, on distinguera les grandeurs données des grandeurs inconnues et cherchées en les représentant par un symbole constant, invariable et bien clair, par exemple, en désignant les grandeurs cherchées par la lettre A ou par toute autre voyelle E, I, O, U, Y, et les grandeurs données par les lettres B, C, D ou par toute autre consonne. » (*In artem analyticem Isagoge*, 1591)

THEOREMA IV.

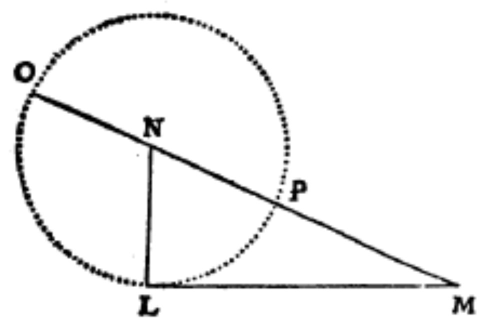
Si A quadrato-cubus – B – D – G – H – K in A quad. quad. + B in D + B in G + B in H + B in K + D in G + D in H + D in K + G in H + G in K + H in K in A cubum – B in D in G – B in D in H – B in D in K – B in G in H – B in G in K – B in H in K – D in G in H – D in G in K – D in H in K – G in H in K in A quad. + B in D in G in H + B in D in G in K + B in D in H in K + B in G in H in K + D in G in H in K in A, æquetur B in D in G in H in K: A explicabilis eſt de qualibet illarum quinque B, D, G, H, K.

1QC – 15QQ + 85C – 225Q + 274N, æquatur 120. Fit 1N 1, 2, 3, 4, vel 5.

Atque hæc elegans & perpulchræ ſpeculationis ſylloge, tractatui alioquin effuſo, finem aliquem & Coronida tandem imponito.

III.2. La géométrie analytique de René Descartes (1540-1603)

- La *Géométrie* (1637), annexe au *Discours de la méthode* :
  - La « méthode » : choisir des lignes (= segments) à partir desquels exprimer le problème sous forme d'équations. La solution peut être des points en nombre fini ou un « lieu » géométrique.
  - Nouveau traitement des équations : notations (lettres minuscules, les dernières de l'alphabet pour les inconnues, les premières pour les coefficients, adoption d'un signe d'égalité) / relations entre coefficients et racines, nombre de racines d'une équation de degré *n*.
  - Redéfinition d'un corpus de courbes à étudier : celles associées à une équation (*courbes algébriques*, en termes modernes)



$$z^2 \propto az + bb$$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à *b* racine quarrée de la quantité connue *bb*, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}$ *a*, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par *z* que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle, iuſques a O, en ſorte qu'N O ſoit eſgale a N L, la toute O M eſt *z* la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete ſorte

$$z \propto \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}.$$