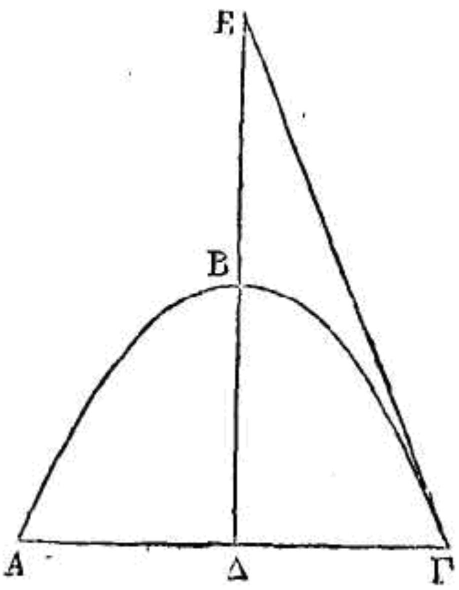
Archimède, *La quadrature de la parabole*, extraits
(*Œuvres d'Archimède*, traduites par F. Peyrard, Paris, 1807)

PROPOSITION I.

Soit ΑΒΓ une parabole ; que ΒΔ soit une droite parallèle au diamètre, ou le diamètre lui-même ; que la droite ΑΔΓ soit parallèle à la tangente au point Β. Les droites ΑΔ, ΔΓ seront égales entre elles ; et si la droite ΑΔ est égale à la droite ΔΓ, la droite ΑΓ sera parallèle à la tangente au point Β[1].

PROPOSITION II.



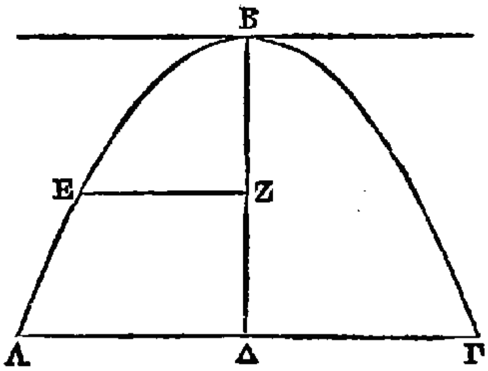
Si ΑΒΓ est une parabole ; si la droite ΒΔ est une droite parallèle au diamètre, ou le diamètre lui-même ; si la droite ΑΔΓ est parallèle à la droite qui touche la parabole au point Β, et si la droite ΓΕ touche la parabole au point Γ, les droites ΔΒ, ΒΕ seront égales entre elles[2].

PROPOSITION III.

Si ΑΒΓ est une parabole ; et si ΒΔ est une parallèle au diamètre ou le diamètre lui-même, et si l'on conduit certaines droites ΑΔ, ΕΖ parallèles à la tangente au point Β, les carrés des droites ΑΔ, ΕΖ seront entre eux comme *les* droites ΒΔ, ΒΖ.

---

[1] Apollonius, liv. I, prop. 46, et liv. II, prop. 5. Archimède appelle *diamètre* ce que nous appelons axe, et ce que nous appelons diamètre, il l'appelle *parallèle au diamètre*.
[2] Apollonius, liv. I, prop. 35.

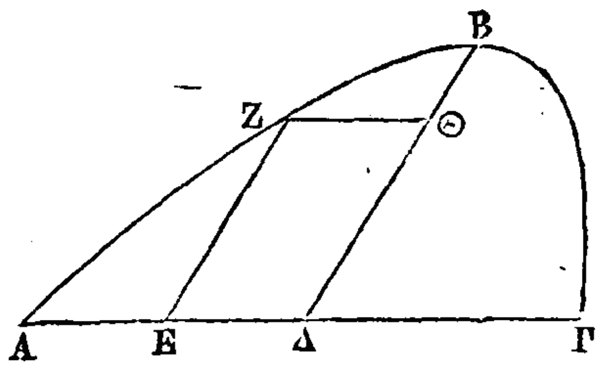


Cela est démontré dans les éléments des sections coniques[3].

[…]

PROPOSITION XIX.

Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on conduit deux droites parallèles au diamètre, l'une du milieu de la base et l'autre du milieu de la moitié de la base ; celle qui est conduite du milieu de la base est égale à quatre fois le tiers de celle qui est conduite du milieu de la moitié de la base.

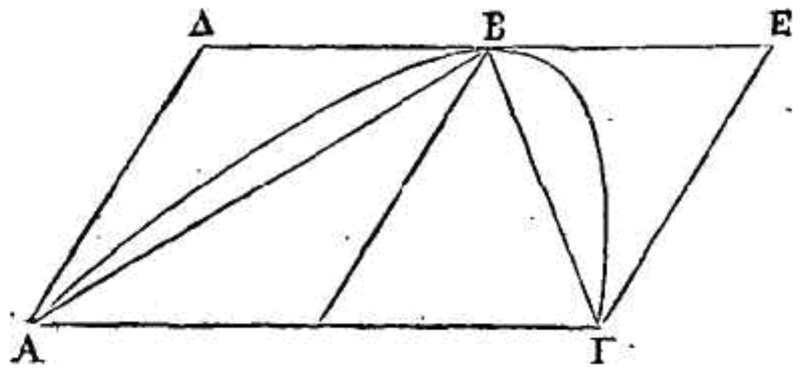


Soit ΑΒΓ un segment compris par une droite et par une parabole. Du milieu de ΑΓ et du milieu de ΑΔ, conduisons les droites ΒΔ, ΕΖ, parallèles au diamètre de ΒΔ. Conduisons aussi ΖΘ parallèle à ΑΓ. Puisque dans une parabole nous avons conduit la droite ΒΔ parallèle au diamètre, et les droites ΑΔ, ΖΘ parallèles à la droite qui touche la parabole au point B, la droite ΒΔ sera à la droite ΒΘ comme le carré construit sur ΑΔ est au carré construit sur ΖΘ (prop. III). Donc ΒΔ est quadruple de ΒΘ. Il est donc évident que la droite ΒΔ est égale à quatre fois le tiers de la droite ΕΖ.

[3] Apollonius, liv. I, prop. 20.

PROPOSITION XX.

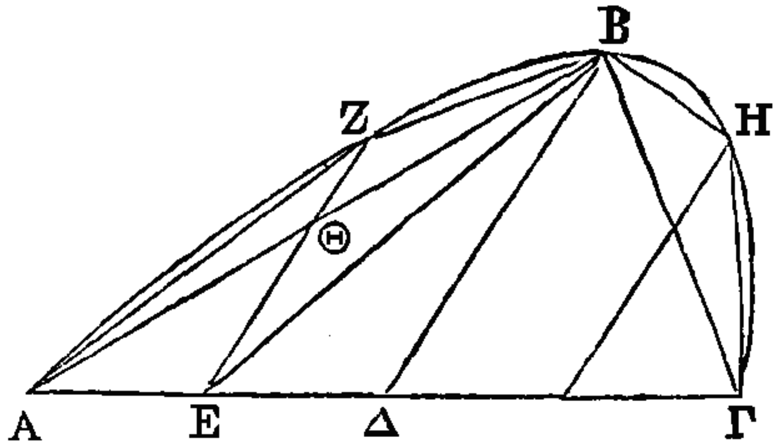
Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on inscrit un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment, le triangle inscrit sera plus grand que la moitié du segment.



Que le segment ΑΒΓ soit tel que celui dont nous venons de parler. Inscrivons-lui un triangle qui ait la même hauteur que ce segment (prop. XVIII). Puisque le triangle a la même base et la même hauteur que le segment, le point B sera le sommet du segment. Donc ΑΓ est parallèle à la droite qui touche la parabole au point B. Par le point B conduisons la droite ΔΕ parallèle à la droite ΑΓ, et des points A, Γ les droites ΑΔ, ΓΕ parallèles au diamètre. Ces droites tomberont hors de la parabole. Donc puisque le triangle ΑΒΓ est la moitié du parallélogramme ΑΔΕΓ, il est évident qu'il est plus grand que la moitié du segment.
Cela étant démontré, il est évident qu'on peut inscrire dans ce segment un polygone de manière que la somme des segments ; restants soit plus petite que toute surface donnée. Car en retranchant continuellement une surface plus grande que la moitié, nous diminuerons continuellement la somme des segments restants, et nous la rendrons par conséquent plus petite que toute surface proposée.

PROPOSITION XXI.

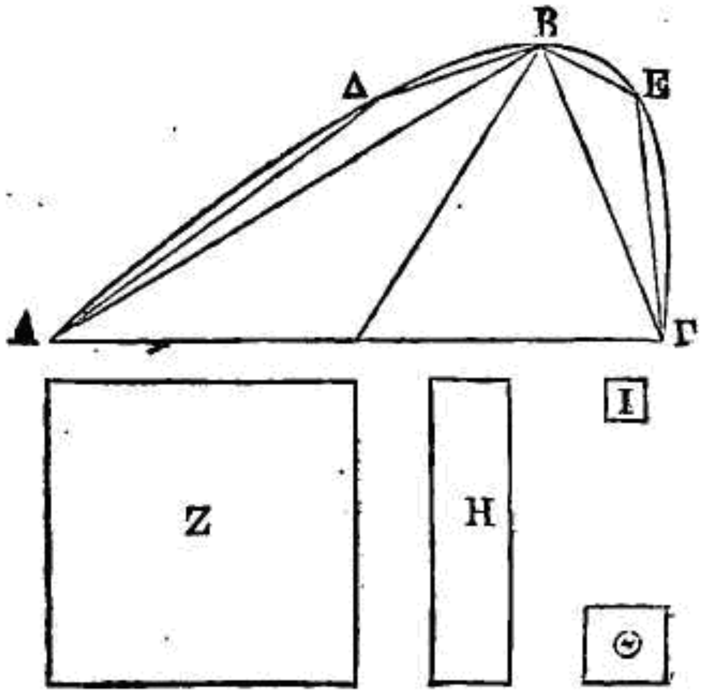
Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on inscrit un triangle qui ait la même base et la même-hauteur que le segment ; et si dans les segments restants l'on inscrit d'autres triangles qui aient la même base et la même hauteur que ces segments, le triangle inscrit dans le segment entier est égal à huit fois chacun des autres triangles qui sont inscrits dans les segments restants.



Soit le segment ABΓ tel que celui dont nous venons de parler. Partageons AΓ en deux parties égales au point Δ ; conduisons BΔ parallèle au diamètre. Le point B sera le sommet du segment. Donc le triangle ABΓ aura la même base et la même hauteur que le segment. Partageons ensuite AΔ en deux parties égales au point E, et conduisons la droite EZ parallèle au diamètre. La droite AB sera partagée en deux parties égales au point Θ. Donc le point Z sera le sommet du segment AZB. Donc le triangle AZB a la même base et la même hauteur que le segment AZB. Il faut démontrer que le triangle ABΓ est égal à huit fois le triangle ABZ.
En effet, la droite BΔ est égale à quatre fois le tiers de la droite EZ (prop. XIX) et au double de la droite EΘ. Donc EΘ est double de ΘZ. Donc aussi le triangle AEB est double du triangle ZBA ; car le triangle AEΘ est double du triangle AΘZ, et le triangle ΘBE double du triangle ZΘB. Donc le triangle ABΓ est égal à huit fois le triangle AZB. Nous démontrerons de la même manière qu'il est aussi égal à huit fois le triangle qui est inscrit dans le segment BHΓ.

PROPOSITION XXII.

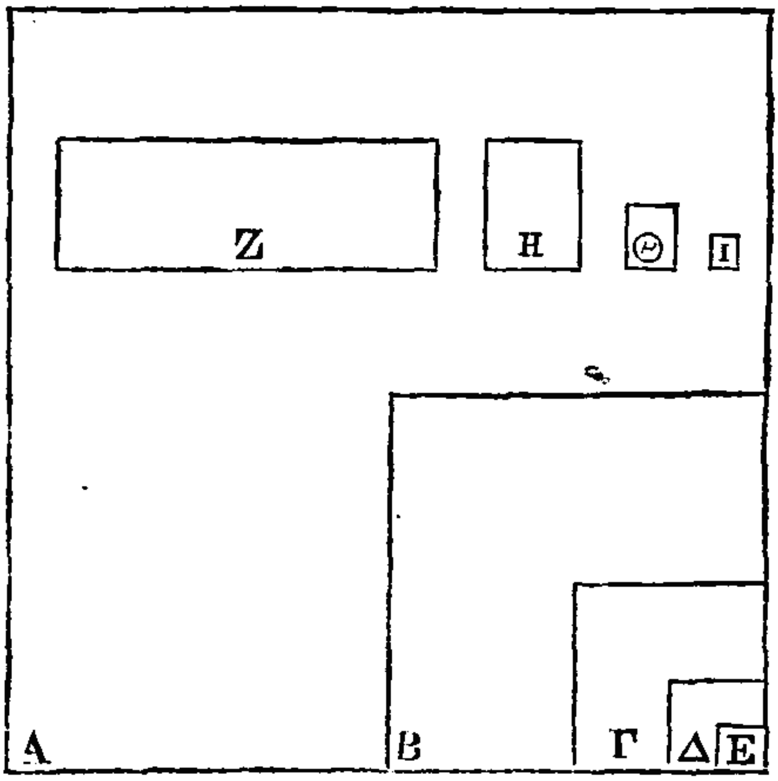
Si l'on a un segment compris par une droite et par une parabole ; si des surfaces en aussi grand nombre que l'on voudra, sont placées à la suite les unes des autres ; si chacune d'elles contient quatre fois celle qui la suit immédiatement ; et si la plus grande de ces surfaces est égale à un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment, la somme de toutes ces surfaces sera plus petite que le segment.
Soit un segment AΔBEΓ compris par une droite et par une parabole. Soient aussi autant de surfaces Z, H, Θ, I que l'on voudra, placées les unes à la suite des autres ; que Z soit le quadruple de H, et égal à un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment. Je dis que le segment est plus grand que la somme des surfaces Z, H, Θ, I.



Que le sommet du segment entier soit le point B, et les sommets des segments restants les points Δ, E. Puisque le triangle ΑΒΓ est égal à huit fois chacun des triangles ΑΒΔ, ΒΕΓ, il est évident qu'il est le quadruple de ces deux triangles pris ensemble. Mais le triangle ΑΒΓ est égal à la surface Z ; donc par la même raison la somme des triangles ΑΔΒ, ΒΕΓ est égale à la surface H. On démontrera pareillement que la somme des triangles qui sont inscrits dans les segments restants, et qui ont la même base et la même hauteur que ces segments est égale à la surface Θ. Mais la somme des triangles qui sont inscrits, dans les segments suivants est égale à la surface I. Donc la somme de toutes les surfaces proposées est égale à un certain polygone inscrit dans le segment. Il est donc évident que la somme de-toutes ces surfaces est plus petite que le segment.

PROPOSITION XXIII.

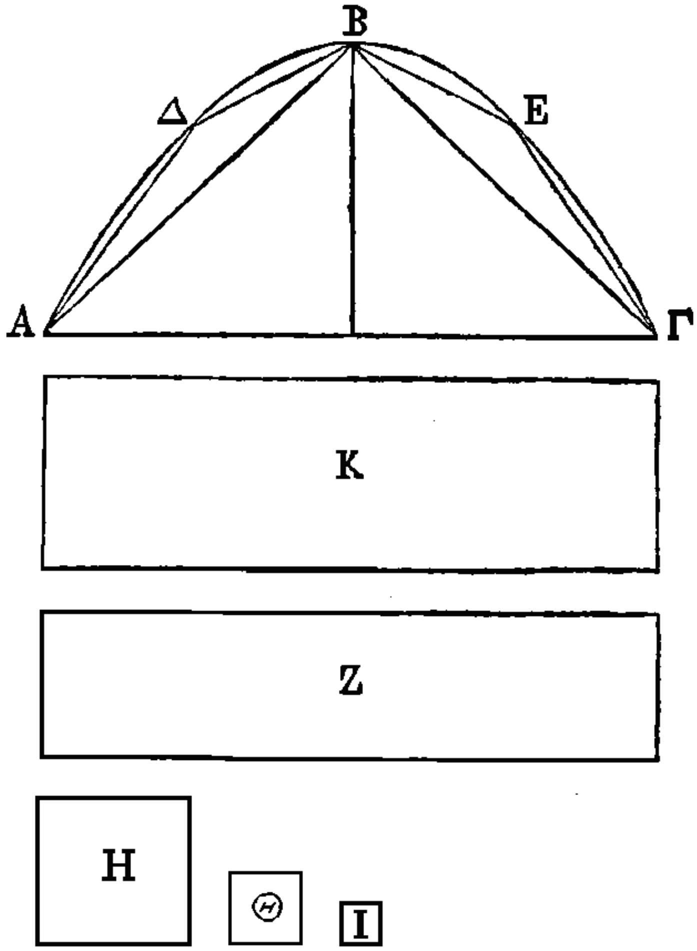
Si tant de grandeurs que l'on voudra, sont placées à la suite les unes des autres, et si chacune d'elles contient quatre fois celle qui suit immédiatement, la somme de ces grandeurs, conjointement avec le tiers de la plus petite est égale à quatre fois le tiers de la plus grande.



Soient tant de grandeurs que l'on voudra A, B, Γ, Δ, E, placées à la suite les unes des autres, dont chacune contienne quatre fois celle qui suit immédiatement. Que la plus grande soit A ; que Z soit le tiers de B ; que H soit le tiers de Γ ; que Θ soit le tiers de Δ, et I le tiers de E. Puisque Z est le tiers de B, et que B est le quart de A, les grandeurs B, Z prises ensemble seront le tiers de A. Par la même raison, les grandeurs H, Γ prises ensemble, sont le tiers de B ; les grandeurs Θ, Δ prises ensemble, le tiers de Γ, et les grandeurs I, E prises ensemble, le tiers de Δ. Donc la somme des grandeurs B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I est le tiers de la somme des grandeurs A, B, Γ, Δ. Mais la somme des grandeurs Z, H, Θ est le tiers de la somme des grandeurs B, Γ, Δ ; donc la somme des grandeurs restantes B, Γ, Δ, E, I est le tiers de la grandeur restante A. Donc la somme des grandeurs A, B, Γ, Δ, E, conjointement avec la grandeur I, c'est-à-dire avec le tiers de la grandeur E, est égale à quatre fois le tiers de la grandeur A.

PROPOSITION XXIV.

Un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que ce segment.
Soit AΔBEΓ un segment compris par une droite et par une parabole. Soit aussi un triangle ABΓ qui ait la même base et la même hauteur que le segment. Que la surface K soit égale à quatre fois le tiers du triangle ABΓ. Il faut démontrer que la surface K est égale au segment AΔBEΓ.



Car si la surface K n'est pas égale au segment AΔBEΓ, elle est ou plus grande ou plus petite. Supposons d'abord, si cela est possible, que le segment AΔBEΓ soit plus grand que la surface K. Inscrivons les triangles AΔB, BEΓ, ainsi que cela a été dit (prop. XXI). Inscrivons dans les segments restants d'autres triangles qui aient la même base et la même hauteur que ces segments ; et continuons d'inscrire dans les segments restants deux triangles qui aient la même base et la même hauteur que ces segments. La somme des segments restants sera certainement plus petite que l'excès du segment AΔBEΓ sur la surface K. Donc le polygone inscrit sera plus grand que la surface K. Ce qui ne peut être. En effet, le triangle ABΓ étant quadruple de la somme des triangles AΔB, BEΓ, la somme de ceux-ci quadruple la somme de ceux qui sont inscrits dans les segments suivants, et ainsi de suite, des surfaces sont placées les unes à la suite des autres, et chacune d'elles contient quatre fois celle qui suit immédiatement (prop. XXI). D'où il suit que la somme de toutes ces surfaces est plus petite que quatre fois le tiers de la plus grande de ces surfaces (prop. XXIII). Mais la surface K est égale à quatre fois le tiers de cette surface ; donc le segment ADBEΓ n'est pas plus grand que la surface K.
Supposons à présent, si cela est possible, que le segment ADBEΓ soit plus petit que la surface K. Que le triangle ABΓ soit égale à la surface Z ; que la surface H soit le quart de la surface Z ; que la surface Θ soit le quart de la surface H et ainsi de suite, jusqu'à ce que la dernière surface

soit plus petite que l'excès de la surface K sur le segment. Que cette dernière surface soit I. La somme des surfaces Z, H, Θ, I, conjointement avec le tiers de la surface I, est égale à quatre fois le tiers de la surface Z (prop. XXIII). Mais la surface K est égale à quatre fois le tiers de la surface Z ; donc la surface K est égale à la somme des surfaces Z, H, Θ, I, conjointement avec le tiers de la surface I. Mais l'excès de la surface K sur la somme des surfaces Z, H, Θ, I est plus petite que la surface I, et l'excès de la surface K sur le segment est plus grand que la surface I ; il est donc évident que la somme des surfaces Z, H, Θ, I est plus grande que le segment. Ce qui ne peut être ; car on a démontré que si des surfaces en aussi grand nombre qu'on voudra, sont placées les unes à la suite des autres, si chacune d'elles contient quatre fois celle qui suit immédiatement, et si la plus grande de toutes est égale au triangle inscrit dans le segment, la somme de ces surfaces est plus petite que le segment (prop. XXII). Donc le segment ΑΔΒΕΓ n'est pas plus petit que la surface K. Mais nous avons démontré qu'il n'est pas plus grand ; donc il est égal à la surface K. Mais la surface K est égale à quatre fois le tiers du triangle ΑΒΓ ; donc le segment ΑΔΒΕΓ est égal à quatre fois le tiers du triangle ΑΒΓ.