Borel et l'approche probabiliste de la réalité

Laurent MAZLIAK [1] et Marc SAGE [2]

congrès de la SFHST, Nantes, 18-20 mai 2011 .

Merci tout d'abord aux organisateurs de leur invitation. L'exposé que nous vous proposons aujourd'hui, Marc et moi-même, se veut plus historique que philosophique et souhaite examiner ce qu'Emile Borel a trouvé dans la théorie des probabilités qui puisse expliquer pourquoi, assez soudainement à partir de 1905, il s'y consacra avec énergie.

Né en 1871, Borel appartient donc à ces mathématiciens français éduqués par une génération de scientifiques traumatisés par l'effondrement de la défaite de 1870. Ils en avaient rendu responsables les retards de la science française et avaient mis les bouchées doubles pour apprendre les avancées réalisées à l'étranger, et avant tout en Allemagne. En mathématiques, le travail salutaire de Darboux doit être souligné, lui qui, selon ses propres termes dans une lettre à Jules Houël datant de la fin 1870, voulait à travers le Bulletin des Sciences Mathématiques qu'il dirigeait "réveiller le feu sacré". Les jeunes élèves de l'Ecole Normale des années 1890 sont donc très au fait des travaux de Riemann, Weierstrass, Dedekind, du Bois Reymond, Cantor. Ce dernier justement semble avoir fait une impression particulièrement profonde sur le jeune Borel, enthousiasmé par le transfini. Une marque de cette admiration du français pour le mathématicien de Halle transparaît dans sa thèse, soutenue en 1894 alors qu'il n'a que 23 ans, et qui porte sur des questions de prolongement de fonctions analytiques. Sous la forme d'une note finale à son texte, Borel énonce le théorème de compacité de l'intervalle fermé borné [0,1] stipulant que de tout recouvrement par des intervalles ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. La preuve qu'il en propose, limitée au cas d'un recouvrement dénombrable, est lapidaire : raisonnant par l'absurde, il montre que si la conclusion du théorème n'était pas vérifiée, il serait possible de construire une suite d'intervalles tous distincts, et de recommencer indéfiniment le procédé jusqu'à atteindre un ensemble ayant le cardinal de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, "seconde classe de nombres de M.Cantor qui constitue un ensemble de seconde puissance" écrit Borel, d'où une contradiction avec le fait que les intervalles sont en nombre dénombrable.

Et pourtant, une inquiétude semble naître rapidement dans l'esprit de Borel concernant ce qu'on peut appeler la "réalité factuelle" des constructions liées à l'infini nouveau et plus généralement de celles liées à toute théorie mathématique manipulant l'infini. Cette inquiétude culminera dans les fameux échanges de l'année 1905 autour de l'axiome de Zermelo entre Borel, Baire, Hadamard et Lebesgue.

Michel Bourdeau, qui a étudié dans le détail l'attitude de Borel vis à vis du transfini a souligné combien ce dernier avait préféré suivre l'approche de du Bois-Reymond : à la voie logique et verbale proposée par Cantor et radicalisée par Hilbert pour introduire des objets mathématiques, du Bois Reymond et Borel à sa suite préféraient fonder leur démarche sur l'obtention de *faits mathématiques*, c'est à dire d'énoncés intervenant dans la résolution de problèmes, sur lesquels, au moins, les mathématiciens pouvaient se retrouver sans interminables discussions. Signe que de l'eau a coulé sous les ponts, il semble que nous associerions peut être plus spontanément une telle attitude aujourd'hui à celle d'un physicien dont le travail commence en constatant que la

1. Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires, Université Pierre et Marie Curie, Paris. laurent.mazliak@upmc.fr

2. ENS, Paris. marc.sage@normalesup.org

pomme tombe plutôt qu'en explorant des théories métaphysiques qui, *a posteriori*, rendraient la chute nécessaire.

L'article que Borel publie en 1900 dans la Revue Philosophique, titré justement "A propos de l'infini nouveau" laisse place à l'expression de ses doutes, et tout spécialement concernant la façon dont on prétend avoir rempli le continu de la droite réelle en invoquant des arguments de cardinalité. Borel résumera plus tard son opinion dans la conclusion de son article du Circolo di Palermo sur les probabilités dénombrables

> Il existe certainement (si ce n'est point un abus d'employer ici le verbe exister) dans le continu géométrique des éléments qui ne peuvent être définis : tel est le sens réel de l'importante et célèbre proposition de Cantor : "Le continu n'est pas dénombrable" Le jour où ces éléments indéfinissables seraient réellement mis à part et où l'on ne prétendrait point les faire intervenir plus ou moins implicitement, il en résulterait certainement une grande simplification dans les méthodes de l'analyse.

Les questions autour des fondements et des possibilités d'opérer simultanément une infinité de choix dans des ensembles occupent ainsi une place importante dans les préoccupations boréliennes au début du vingtième siècle. Borel est en particulier soucieux de proposer des solutions à plusieurs paradoxes soulevés par la théorie des ensembles. L'un d'eux, le paradoxe de Richard, retient son attention, et l'amènera à une distinction fondamentale d'un point de vue pratique entre plusieurs sortes d'ensembles infinis.

L'énoncé du paradoxe de Richard est présenté comme suit par Borel : si l'on considère toutes les propositions écrites (en français) avec un nombre fini de lettres (ce qui est le cas des énoncés usuels des mathématiques), ces propositions sont en nombre dénombrable comme on le voit en les classant d'abord par le nombre de lettres, puis à l'intérieur de chaque classe de longueur, par ordre lexicographique. Parmi ces propositions, on peut trouver notamment celles qui définissent un unique nombre réel. Par exemple, $\sqrt{2}$ est l'unique réel défini comme *le nombre réel positif qui élevé au carré est égal à deux*. Les nombres réels usuellement utilisés : les entiers, les rationnels, les nombres algébriques, les constantes classiques : π, e en font partie. Considérons alors, dit Borel, l'écriture décimale des réels en question compris entre 0 et 1. On peut définir un réel unique par la phrase : *le réel obtenu en modifiant la n-ième décimale du n-ième réel en lui ajoutant 1 si elle est comprise entre 0 et 5, et en lui enlevant 1 si elle est comprise entre 6 et 9.* Et pourtant ce réel défini par un nombre fini de lettres ne fait pas partie de la liste précédente. On voit combien la description de Borel coïncide avec un argument diagonal à la Cantor.

La solution au paradoxe proposée par Borel est non seulement ingénieuse, mais surtout porteuse d'une interprétation riche d'enseignement sur la distinction qui se mettait en place à l'époque dans son esprit entre mathématique idéaliste et mathématique pratique. Borel propose de considérer la notion d'ensemble *effectivement* énumérable, pour lequel il est possible de fournir un algorithme permettant de construire la bijection entre l'ensemble et celui des entiers naturels. Or, observe Borel, un ensemble dénombrable n'est pas nécessairement effectivement énumérable, car la bijection peut très bien exister sans qu'on sache la construire, et c'est par exemple le cas pour l'ensemble des formules finies définissant un réel unique. L'existence de la bijection f permet certes d'introduire une énumération formelle en attribuant le numéro n à l'antécédent de n mais n'est pas effective dans le sens où on ne sait dire pas quel est le "successeur" de l'antécédent de n mieux qu'en disant que c'est l'antécédent de $n+1$.

On peut ici faire observer que dans l'exemple proposé par Borel, pour lequel la méthode diagonale conduit à un apparent paradoxe, le problème réside en fait fondamentalement dans le fait d'assimiler le groupement des formules finies définissant un réel unique à un *ensemble* et non à une classe. L'énumérabilité effective impliquerait naturellement la possibilité de considérer cet ensemble.

De la lecture de ses travaux dans ces années au tournant du siècle, on constate que Borel porte une attention toujours croissante aux objets mathématiques effectivement constructibles, et en premier lieu aux nombres réels, en se demandant comment il est raisonnable de concevoir le continu de la droite réelle. Dans son article de 1903 "Contribution à l'arithmétique du continu", le mathématicien illustre comment une vision géométrique, fondée sur les raisonnements de mesure des ensembles qu'il avait introduits dès sa thèse en 1894 sur les prolongements analytiques, fournit un nouveau mode d'approche. En enrobant des réels déjà construits (comme les rationnels) par des intervalles de longueur totale aussi petite que l'on veut, on démontre la nécessité d'existence d'autres points pour, en quelque sorte, remplir la longueur. La méthode de Borel reposait fondamentalement sur l'*additivité dénombrable* de sa mesure des ensembles. Or cet axiome d'additivité, postulé par Borel comme une extension intuitive du cas fini, n'avait pas manqué d'être critiqué par ceux qui, comme Schoenflies, affirmaient qu'une telle propriété sur une notion première comme la longueur des ensembles devait absolument être prouvée. Borel avait besoin d'appuyer son axiome sur une intuition, et c'est là que les probabilités rentrent en scène.

Borel découvrit vers 1904, de manière semble-t-il assez fortuite, un article du mathématicien suédois Anders Wiman sur la loi de probabilité des quotients incomplets dans la décomposition en fraction continue d'un nombre réel tiré au hasard entre 0 et 1. Dans ce travail, Wiman utilisait une technique de σ-additivité. Sans rentrer dans les détails, disons quelques mots sur l'origine de cette question. L'astronome suédois Gylden, dans les années 1880, s'était posé la question d'une méthode pratique pour étudier le caractère rationnel ou irrationnel du rapport des mouvements moyens de deux planètes, ce qui revenait à se demander si, dans la décomposition en fraction continue de ce rapport, l'un des quotients partiels est infini. L'idée de Gylden fut alors de voir ce rapport comme un nombre aléatoire, pour tenir compte des perturbations, et d'étudier systématiquement la loi de probabilité des quotients partiels correspondants, afin de déterminer la probabilité pour que l'un d'eux soit très grand.

Borel prit ainsi conscience pour la première fois de l'usage que la notion de mesure des ensembles qu'il avait introduite est adéquate pour traiter de questions probabilistes. Qui plus est, la question traitée par Wiman portait sur une description des nombres réels et rejoignait ainsi ses préoccupations immédiates. La même année, il écrivit son premier article probabiliste, "Sur quelques questions de probabilités" où son but était précisément de montrer que l'utilisation de la mesure des ensembles et de la toute jeune intégrale de Lebesgue permettent de considérer des questions probabilistes qu'on ne pouvait pas formuler auparavant. C'est le cas, dit Borel, si on cherche à évaluer de tirer un nombre rationnel en tirant au hasard un nombre entre 0 et 1. Borel tient d'abord à s'inscrire dans la lignée du conventionnalisme de Poincaré qui affirmait dans "la Science et l'Hypothèse" que *pour entreprendre un calcul quelconque de probabilité, et même pour que ce calcul ait un sens, il faut admettre, comme point de départ, une hypothèse ou une convention qui comporte toujours un certain arbitraire*. Cependant, la manière dont Borel affirme d'autorité dans son article que *la convention la plus commode, au moins dans le cas où*

l'ensemble des valeurs possibles de la ou des variables est borné, consiste à regarder la probabilité comme proportionnelle à l'étendue semble montrer que pour lui cet arbitraire, s'il s'appuie sur notre intuition géométrique de l'espace, n'en est pas un. Par ce glissement de la géométrie aux probabilités, Borel justifie que nous avons tous par exemple une intuition immédiate de l'expérience "tirer au hasard un nombre entre 0 et 1". C'est cette intuition originelle qui donne sens à son mode d'appréhension probabiliste du continu réel.

Dans l'article qu'il publie l'année suivante en 1906 sur la théorie cinétique des gaz le mathématicien commence à percevoir toute la portée d'un modèle probabiliste qui lui permet de déduire la loi de Maxwell. Son but est clairement affirmé dans le préambule de l'article.

> Je voudrais m'adresser à tous ceux qui, au sujet de la théorie cinétique des gaz,partagent l'opinion de Bertrand que les problèmes de probabilité sont semblables au problème de trouver l'âge du capitaine quand on connâõt la hauteur du grand mât. Si leurs scrupules sont justifiés jusqu'à un certain point parce qu'on ne peut reprocher à un mathématicien son amour de la rigueur, il ne me semble cependant pas impossible de les contenter. C'est le but des pages qui suivent : elles ne font faire aucun progrès réel à la théorie du point de vue physique ; mais elles arriveront peut être à convaincre plusieurs mathématiciens de son intérêt, et, en augmentant le nombre de chercheurs, contribueront indirectement à son développement. Si c'est le cas, elles n'auront pas été inutiles, indépendamment de l'intérêt esthétique présent dans toute construction logique.

Et c'est surtout en 1908, dans son prodigieux article du Circolo di Palermo consacré aux applications arithmétiques des probabilités dénombrables, qu'il paraît convaincu d'avoir trouvé dans l'approche probabiliste l'accès conceptuel "clair' et intuitif" au continu réel qui lui manquait dans la description de ce dernier. Borel illustre ce point par l'introduction des nombres absolument normaux dont la décomposition en toute base est uniformément répartie. Borel montre qu'un nombre réel tiré au hasard entre 0 et 1 possède cette caractéristique avec probabilité 1. Pourtant,

> dans l'état présent de la science, la détermination effective d'un nombre absolument normal semble être le plus difficile des problèmes ; il serait intéressant de le résoudre soit en construisant un nombre absolument normal, soit en prouvant que parmi les nombres qui peuvent être effectivement définis, aucun n'est absolument normal. Quelque paradoxale que cette proposition puisse paraître, elle n'est absolument pas incompatible avec le fait que la probabilité pour un nombre d'être absolument normal soit égale à 1.

L'inquiétude de Borel quant aux errements de l'approche purement logique va de pair avec sa conviction profonde que le mathématicien ne peut éviter de se poser la question de la *valeur pratique* de son travail. Le rôle du savant dans la cité est en effet pour lui de contribuer à l'éveil de ses concitoyens en leur fournissant le cas échéant des moyens d'affronter la vie en société et les problèmes qui s'y posent. Or, dans le même temps où il s'investit dans les aspects mathématiques des probabilités, Borel prend conscience de leur utilité sociale car la mesure du risque et la prédiction lui apparaissent comme les défis principaux auxquels le citoyen est confronté. Pour beaucoup de questions de la vie courante, la réponse satisfaisante est aussi d'ordre statistique : *Le calcul des probabilités intervient d'une manière plus ou moins consciente dans toutes nos décisions* écrit-il en 1906. Il reprend par exemple le vieux paradoxe du tas de blé (combien de

grains contient-il ?) pour conclure que la seule vraie possibilité de réponse est une distribution de probabilités représentant l'observation d'un grand nombre de cas par un panel d'experts.

> La réponse mathématique à donner à bien des questions pratiques est un coefficient de probabilité. Une telle réponse ne paraîtra pas satisfaisante à bien des esprits, qui attendent des mathématiques la certitude. C'est là une tendance très fâcheuse ; il est extrêmement regrettable que l'éducation du public soit, à ce point de vue, si peu avancée ; cela tient sans doute à ce que le calcul des probabilités est à peu près universellement ignoré, bien qu'il pénètre chaque jour davantage dans la vie de chacun (assurances diverses, mutualités, retraites, etc.). Un coefficient de probabilité constitue une réponse tout à fait claire, correspondant à une réalité absolument tangible. Certains esprits maintiendront qu'ils "préfèrent" la certitude ; ils préfèreraient peut-être aussi que 2 et 2 fissent 5.

Un renseignement de type statistique devient ainsi progressivement pour Borel l'outil scientifique capital mis à la disposition de l'homme d'action qui doit prendre une décision, en opposition radicale avec la préconisation bergsonienne d'un appel exclusif à l'intuition. Car, nous dit Borel, l'intuition trompe et l'homme en société a besoin de s'appuyer sur des pratiques à la scientificité éprouvée par le truchement de la rigueur mathématique, ce qui une fois encore le met assez en phase avec une attitude de physicien. Dans sa volonté de convaincre, Borel s'interroge sur les résistances que rencontre l'utilisation de l'outil probabiliste.

> En essayant d'approfondir les raisons pour lesquelles le calcul des probabilités est antipathique à beaucoup d'esprits, j'espère arriver à faire voir que cette antipathie repose en grande partie sur un malentendu ; il serait désirable que ce malentendu soit dissipé, car la vulgarisation des conclusions, sinon des méthodes de cette branche de la science, serait d'une grande utilité sociale. L'homme n'aime pas, en général, perdre son nom et être désigné par un numéro ; ni même être compté seulement comme une unité dans un groupe sans être individuellement désigné. C'est déjà là une raison pour que la statistique ne soit pas populaire et pour que les plaisanteries faciles que l'on peut faire à son sujet soient généralement bien accueillies. Le calcul des probabilités non content de recenser les événements passés prétend prévoir dans une certaine mesure les événements futurs : c'est en cela qu'il est une science. Cette prétention heurte tout d'abord le sentiment psychologique de la liberté humaine. On n'a rien à redouter du calcul, lorsqu'on est décidé à ne pas régler sa conduite sur ses indications sans les avoir au préalable pesées à leur juste valeur : c'est une illusion singulière de penser que l'indépendance individuelle est accrue par l'ignorance. Celui qui meurt de faim s'intéresse peu à l'augmentation de la fortune moyenne : on ne doit pas chercher dans la statistique ni dans le calcul des arguments pour consoler ceux qui souffrent des inégalités sociales ; mais cette constatation ne diminue en rien la valeur propre des statistiques ni des calculs par lesquels on les interprète.

De ce fait, il semble bien que pour Borel, le plus important concernant l'interprétation des probabilités et leur contact avec le monde réel se trouve dans le constat qu'elles fournissent des résultats utiles. L'ironie avec laquelle il n'hésita pas à moquer, dans un article de 1907 sur la logique et l'intuition, *la facilité avec laquelle les philosophes parlent de la méthode des sciences mathématiques comme s'ils la connaissaient* illustre bien ses réserves au sujet de ceux qui font

profession d'interpréter les mathématiques (et non, notons le, de les *utiliser*) sans vraiment les pratiquer. Borel ne paraît jamais avoir été attiré par les longs débats notamment sur le caractère objectif ou subjectif des probabilités, et s'il alla plus loin que l'attitude purement conventionnaliste prise par Poincaré, il se contenta toujours du strict minimum pour conserver un soupçon d'objectivité à la probabilité calculée. Son but fut probablement d'éviter ainsi de tomber dans un subjectivisme qui cadrerait difficilement avec l'utilisation des probabilités en physique statistique. Dans le dernier fascicule de son traité sur le calcul des probabilités et ses applications, publié en 1939, qu'il consacre à la valeur pratique et philosophique des probabilités, Borel énoncera ce minimum en l'appelant *la loi unique du hasard* : si le calcul d'une probabilité amène un nombre proche de 0, on doit considérer objectivement que l'événement afférent ne se produira pas.

Cette désaffection de Borel envers les questions d'interprétation ne sera pas du goût de certains de ses contemporains en recherche d'une interprétation satisfaisante du concept de probabilité. Ce fut notamment le cas pour Keynes, qui traquait depuis 1907, à la suite de ses contacts avec Cambridge (avec Russell notamment), une possibilité de fonder la théorie des probabilités sur la logique. Dans le *Treatise on Probability* qu'il publiera plus tard en 1921 et qui constitue une sorte d'aboutissement de ses réflexions sur les probabilités, Keynes expose la conception qu'il en défend :

> Part of our knowledge we obtain direct and part by argument. The Theory of Probability is concerned with that part which we obtain by argument, and it treats of the different degrees in which the results so obtained are conclusive or inconclusive. In most branches of academic logic, such as the theory of the syllogism or the geometry of ideal space, all the arguments aim at demonstrative certainty.They claim to be conclusive. But many other arguments are rational and claim some weight without pretending to be certain. In Metaphysics, in Science, and in Conduct, most of the arguments, upon which we habitually base our rational beliefs, are admitted to be inconclusive in a greater or less degree. Thus for a philosophical treatment of these branches of knowledge, the study of probability is required.

En aucun cas pour Keynes une approche mathématique ne saurait nous donner la possibilité d'interpréter de façon satisfaisante une probabilité.

> Students of probability in the sense which is meant by the authors of typical treatises on *Wahrscheinlichkeitsrechnung* or *Calcul des probabilités*, will find that I do eventually reach topics with which they are familiar. But in making a serious attempt to deal with the fundamental difficulties with which all students of mathematical probabilities have met and which are notoriously unsolved, we must begin at the beginning (or almost at the beginning) and treat our subject widely. As soon as mathematical probability ceases to be the merest algebra or pretends to guide our decisions, it immediately meets with problems against which its own weapons are quite powerless. And even if we wish later on to use probability in a narrow sense, it will be well to know first what it means in the widest.

Quand Borel publia en 1909 son livre Eléments de Probabilités, Keynes se fendit de deux recensions assassines ironisant sur les mathématiciens français férus de belles théories esthétiquement inattaquables mais conceptuellement creuses.

> This treatise on the mathematical principles of probability is of a type which has been common in France at any time during the last hundred years, but which has not at present an English counterpart. The great prestige of Laplace has accounted, no doubt, for the circumstances that the study of probability is a normal part of the training of a French mathematician, and to lecture on it one of the regular duties of a French professor of pure mathematics. At intervals these lectures, sometimes of an advanced and sometimes of an elementary character, are published, and we are presented with an admirably lucid and beautifully arranged account of the mathematical analysis at the hands of a first-rate pure mathematician who has, however, [*in cauda venenum* !] no real interest in the subject of probability either from the statistical or from the philosophical standpoint.

Borel répondra vigoureusement à Keynes en 1924 (la vengeance est un plat qui se mange froid ...) dans une recension sur son "Treatise on probability", l'accusant à son tour d'être à ce point obsédé par sa recherche de fondement logique qu'il ne pouvait faire autrement que passer sous silence les applications des probabilités à la mécanique statistique par exemple – alors que Maxwell est un des noms les plus prestigieux dont Cambridge, si chère au cœur de Keynes, peut se glorifier, ironisait Borel. Que Keynes puisse juger de longues discussions sur la nature subjective ou objective d'un énoncé probabiliste élémentaire portant sur le tirage de la loterie plus importantes que la théorie cinétique des gaz, voilà qui faisait monter la moutarde au nez de Borel. Il ne se priva pas de le faire savoir.

> Ceci prouve une fois de plus combien sont différents les esprits des Anglais et les esprits des continentaux ; nous ne devons pas nous hypnotiser sur ces différences et chercher avec obstination à comprendre ce qui est pour nous incompréhensible ; il vaut mieux admettre ces différences comme une *matter of fact* et essayer néanmoins d'adapter à notre mentalité particulière les idées originales des Anglais. Ce faisant, nous sommes à peu près sûrs de les trahir, mais en même temps de leur donner la seule chance qu'ils peuvent avoir d'exercer une influence sur des esprits faits autrement que les leurs. L'histoire des sciences montre que cette collaboration entre esprits qui ne se comprennent pas complètement est non seulement possible, mais souvent féconde. Je me suis efforcé de comprendre M.Keynes et, lorsque je me sentais trop éloigné de lui, de rechercher loyalement quelles idées, peut-être fort différentes des siennes, m'étaient suggérées par la lecture de son livre.

On peut dire en conclusion que depuis ses débuts probabilistes, Borel ne dévia globalement pas dans la manière dont il conçut la théorie des probabilités. Elle constituait un outil mathématique indispensable pour une forme d'accès intuitif au réel (y compris comme on l'a vu le réel mathématique) en fournissant sur lui des renseignements de type statistique sur lequel fonder le raisonnement et l'action. Et c'est naturellement du constat répété que l'on pouvait faire des probabilités un usage capital dans les questions sociales que Borel tira les plus importantes conséquences. Pour lui, les probabilités sont fondamentalement une *physique sociale* qui, convenablement utilisée, sert au décideur à s'orienter dans un monde chaotique. Comme il l'écrivit lui même :

> On ne doit chercher dans le calcul des probabilités ni arguments moraux, ni raisons immédiates d'agir : mais seulement, comme dans les sciences physiques, un moyen de bien connaître les événements passés et de prévoir avec une certaine approximation les événements futurs.