

Master de Mathématiques – Sorbonne Université (M1)

UE 4MUMA039 : Histoire d'un objet mathématique

(Alexandre Guilbaud et Laurent Mazliak)

---

Semaine 11

Le Tournant

*De l'intégrale à la mesure*

Peano, Jordan, Borel

Avant la fin du 19<sup>ème</sup> siècle : dissociation de la question de l'intégrale et de la mesure (des aires)

Pas de questionnement sur le fait que la partie du plan située sous le graphe d'une fonction admette une aire (que la fonction ait ou non une intégrale définie)



Giuseppe PEANO  
(1858-1932)

Peano soulève le problème : la notion d' « aire » est une notion mal définie

⇒ Difficile de fonder la notion d'intégrale sur celle d'aire

D'où : nouvelle priorité, définir l'aire d'un ensemble du plan.



Giuseppe PEANO  
(1858-1932)

«Sull'integrabilità delle funzioni » (1883)

Les ensembles du plan dont on sait définir  
l'aire facilement sont les polygônes

$A$  = région du plan « de forme simple » (?)

⇒ Polygônes inclus dans  $A$ . Borne supérieure de leurs aires

⇒ Polygônes contenant  $A$ . Borne inférieure de leurs aires

Si les bornes coïncident : aire de  $A$ . Sinon  $A$  n'a pas d'aire

Noter : -> le parallèle entre la condition d'existence et celle de  
Riemann-Darboux



Giuseppe PEANO  
(1858-1932)

*Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, 1887*

Généralisation : pouvoir prendre des ensembles plus complexes

Influence de Cantor : considération de notions topologiques primitives : points intérieurs, extérieurs, frontière

Peano : frontière peut être très peu intuitive. Exemple rationnels dans  $[0,1]$



Giuseppe PEANO  
(1858-1932)

Vision très moderne de la mesure comme fonction (finiement) additive d'ensembles. Peano les appelle **fonctions distributives** et en fait une étude systématique (libération de la vision géométrique)

A  $\rightarrow$  contenus extérieur et intérieur  
A a une aire si et seulement si le contenu extérieur de sa frontière est 0.

Una grandezza dicesi *funzione distributiva* d'un campo, se il valore di quella grandezza corrispondente ad un campo è la somma dei valori di essa corrispondenti alle parti in cui si può decomporre il campo dato.

Così, se i campi che si considerano sono segmenti d'una retta, o archi d'una linea, la loro lunghezza è una funzione distributiva, perchè la lunghezza d'un arco è la somma delle lunghezze delle sue parti. Se i campi che si considerano sono figure piane aventi aree proprie, l'area d'un campo è funzione distributiva, perchè l'area d'una figura è la somma delle aree delle sue parti; e così via per le aree di superficie qualunque, e poi volumi.

La lunghezza del campo comune ad un campo variabile e ad una retta fissa è funzione distributiva di quel campo; l'area del cono che proietta da un punto fisso un arco variabile è funzione distributiva di quest'arco, ecc. Se i campi che si considerano sono corpi materiali, la massa d'un corpo è una grandezza fisica funzione distributiva di esso, perchè la massa d'un corpo è la somma delle masse delle sue parti.

Ma il quadrato della lunghezza d'un arco non è funzione distributiva di esso, poichè questo quadrato è minore della somma dei quadrati delle lunghezze delle parti dell'arco.

Due funzioni distributive d'uno stesso campo diconsi anche, con Cauchy, *coesistenti*. La ragione di questo nome si è che, quando l'una si annulla, in generale si annulla pure l'altra.

11. Ad un campo variabile si possono far corrispondere, oltrechè grandezze, anche altri enti; e se questi sono sommabili, come avviene se sono segmenti, o campi, si potrà estendere loro la definizione di funzione distributiva.

Indicheremo con segni (lettere) le funzioni distributive. Così con  $grA$  intenderemo la grandezza del campo  $A$ , cioè la sua lunghezza, o area, o volume, a seconda del numero delle sue dimensioni. Sia  $\alpha$  il simbolo d'una funzione (o operazione) distributiva, e  $\alpha(A)$ , ovvero, più semplicemente,  $\alpha A$  il valore di questa funzione corrispondente al campo  $A$ . La proprietà distributiva è indicata dalla

Problème de l'intégrale double :  $E$  partie du plan,  $f$  fonction sur  $E$

Quel sens donner à :

$$\int_E f(x, y) dS$$

Traitement typique : plan divisé en rectangles

$$R_{ij} = \Delta x_i \times \Delta y_j$$

On considère les traces :

$$E_{ij} = E \cap R_{ij}$$

$\int_E f(x, y) dS$  est définie comme la limite de

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j) a(E_{ij})$$

quand l'aire des  $R_{ij}$  tend vers 0.

Problème : qu'est ce que  $a(E_{ij})$  quand  $E_{ij}$  n'est pas un rectangle ?

Idée remplacer la somme précédente par

$$\sum'_{i,j} f(x_i, y_j) a(R_{ij})$$

Où la somme est étendue aux  $R_{ij} \cap E \neq \emptyset$



Pour lever tout arbitraire :

$$\sum_{i,j}'' a(R_{ij}) \rightarrow 0$$

quand la somme est étendue aux

$$R_{ij} \cap (\text{frontière de } E) \neq \emptyset$$

Evidemment, avec cette condition, l'aire devient :

$$\sum_j \left( \sum_i f(x_i, y_j) \Delta x_i \right) \Delta y_j = \sum_i \left( \sum_j f(x_i, y_j) \Delta y_j \right) \Delta x_i$$

Et donc interversion possible de l'ordre d'intégration

## Interversion possible de l'ordre d'intégration ?

Mais : Cauchy (1827) avait fait remarquer que pour  $f$  non

bornée on peut avoir 
$$\int_0^1 dy \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) \neq \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right)$$

334

MÉMOIRE

Pour appliquer ces principes à la détermination des intégrales doubles définies, il suffit d'observer qu'une intégrale double étant la somme des éléments relatifs aux diverses valeurs des deux variables, cette intégrale sera nécessairement déterminée, si tous les éléments ont une valeur déterminée. Cela posé, si, pour aucune des valeurs de  $x$  et de  $z$  comprises entre les limites de l'intégrale, la fonction sous le signe  $\int$  ne prend la forme  $\frac{0}{0}$ , la fonction de deux variables qui résultera d'une première intégration ne pourra jamais devenir indéterminée, et, par suite, l'intégrale conservera la même valeur dans quelque ordre que les substitutions soient faites. Si le contraire avait lieu, on en serait averti par cette circonstance remarquable, que la fonction de  $x$  et de  $z$ , résultant d'une première intégration, acquerrait, pour certaines valeurs des variables comprises entre les limites de l'intégrale double, une forme indéterminée. Dans cette hypothèse, l'intégrale cherchée obtient deux valeurs déterminées, mais différentes l'une de l'autre, suivant que, dans tous les éléments à la fois, on substitue les valeurs de  $x$  avant celles de  $z$ , ou les valeurs de  $z$  avant celles de  $x$ . Il ne reste plus qu'à faire voir comment, dans le calcul, on peut avoir égard à l'ordre de ces substitutions.



Thomae (1878) et Du Bois-Reymond (1883) fournissent des exemples frappants de non interversion possible

Johannes THOMAE (1840-1921) Paul du BOIS-REYMOND (1831-1889)

Thomae :  $f$  définie sur  $[0,1] \times [0,1]$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \text{ irrationnel} \\ 1 & \text{si } x \text{ rationnel} \end{cases}$$

Du Bois-Reymond :  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^p} & \text{si } (x, y) = (\frac{2n+1}{2^p}, \frac{2m+1}{2^q}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Intégrable sur  $[0,1] \times [0,1]$  et pourtant  $\int_0^1 f(x, y) dy$  n'existe pas pour  $x = \frac{2n+1}{2^p}$



Camille JORDAN  
(1838-1922)

Ces résultats sont très nets et éclaircissent complètement le rôle que joue la fonction dans l'intégrale.

L'influence de la nature du champ ne paraît pas avoir été étudiée avec le même soin. Toutes les démonstrations reposent sur ce double postulatum, que chaque champ  $E$  a une étendue déterminée; et que, si on le décompose en plusieurs parties  $E_1, E_2, \dots$ , la somme des étendues de ces parties est égale à l'étendue totale de  $E$ . Or ces propo-

*Journ. de Math.* (4<sup>e</sup> série), tome VIII. — Fasc. I, 1892.

10

Etendue intérieure :  $c_i(E)$

Etendue extérieure :  $c_e(E)$

Définis comme par Peano

Jordan :  $E$  mesurable ssi  $c_e(E) = c_i(E)$

$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$  disjoints

$$\sum_{k=1}^n c_i(E_k) \leq c_i(E) \leq c_e(E) \leq \sum_{k=1}^n c_e(E_k)$$





Camille JORDAN  
(1838-1922)

En particulier, si les ensembles de la décomposition sont mesurables :

$$c(E) = \sum_{k=1}^n c(E_k)$$

Si  $f$  est une fonction bornée,

avec  $\bigcup_{k=1}^p E_k \subset E \subset \bigcup_{k=1}^n E'_k$   
et les  $E_k, E'_k$  mesurables.

$$S = \sum_{k=1}^n M_k c(E'_k)$$

$$I = \sum_{k=1}^p m_k c(E_k)$$

$$M_k = \sup_{E'_k} f$$

$$m_k = \inf_{E_k} f$$

Quand  $c(E_k)$  et  $c(E'_k) \rightarrow 0$

$\lim S =$  intégrale par excès ;  $\lim I =$  intégrale par défaut



Camille JORDAN  
(1838-1922)

$$\int_E f(x, y) dE$$

existe si et seulement si  
les limites coïncident

⇒ Extension de la définition de Riemann  
à une décomposition en d'autres ensembles  
que des intervalles

« Surprise... ». Le pas décisif suivant va venir d'une direction complètement différente, à savoir les études de Borel sur les fonctions analytiques...

Fonction analytique sur  $E$  : développable en série entière autour de chaque point intérieur de  $E$

Problème du prolongement analytique : si  $E$  et  $F$  sont deux domaines disjoints du plan complexe,  $f$  analytique sur  $E$ ,  $g$  analytique sur  $F$ . Existe-t-il  $\phi$  continue telle que  $\phi$  coïncide avec  $f$  sur  $E$  et  $g$  sur  $F$ ?

Riemann (1851) : toute expression analytique (opérations élémentaires) définit-elle une fonction analytique ?



Karl WEIERSTRASS  
(1815-1897)

Exemple de Weierstrass :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^n + z^{-n}}$$

Analytique sur  $|z| < 1$  et  $|z| > 1$  mais  
pas prolongeable au delà du cercle  
(non bornée au voisinage de tout point  
 $\omega$  tel que  $|\omega| = 1$ )

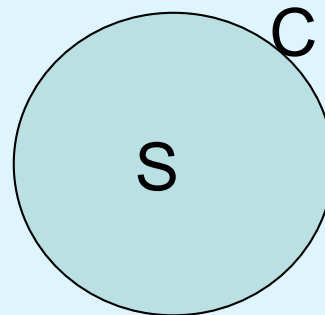




Henri POINCARÉ  
(1854-1912)

$C$  = cercle

$(b_n)_{n \geq 1}$  suite dense dans  $C$



$T$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{z - b_n}$$

avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} |A_n| < \infty$$

$f$  analytique dans  $T$  mais pas prolongeable au delà de  $C$  :  
 $S$  = « espace lacunaire »



Emile BOREL  
(1871-1956)

Dans sa thèse (1894), Borel reprend le problème et montre qu'il est possible d'envisager un prolongement sur un mode différent de celui qui avait été jusque là envisagé

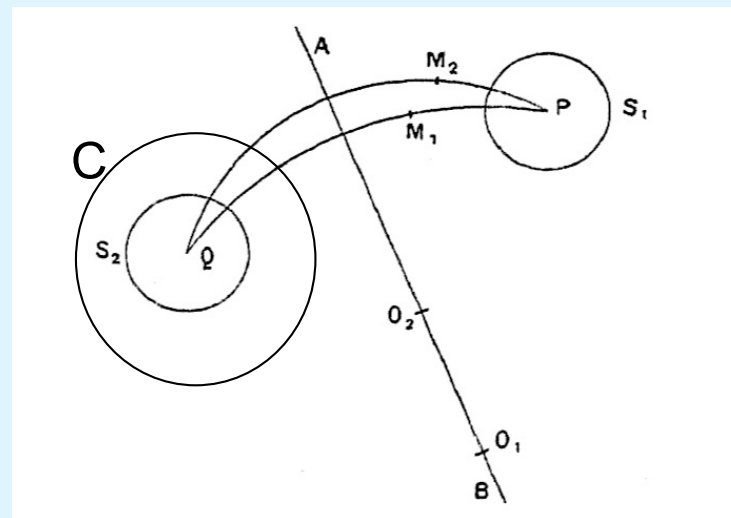
La notion de fonction prolongée analytiquement, obtenue à l'aide de la série de Taylor, a jeté beaucoup de lumière sur ce point et joué un grand rôle en Analyse; il est inutile de rappeler ici en quoi elle consiste, ni quelle en est l'importance. Remarquons simplement que cette importance est due surtout à ce théorème fondamental : *Deux fonctions analytiques qui coïncident dans une région du plan coïncident dans tout le plan ou, du moins, dans toutes les régions que l'on peut atteindre par voie de prolongement.*

Mais, dans le cas où une fonction admet une ligne singulière essentielle fermée, nous ne savons pas ce que l'on doit appeler *prolongement analytique de la fonction au delà de cette ligne*. M. H. Poincaré a même cru pouvoir affirmer que cette expression est nécessairement dénuée de sens (').

J'ai repris la question à un point de vue un peu différent, et j'ai montré qu'il est possible, dans certains cas, de donner du prolongement analytique au delà d'une ligne singulière essentielle fermée une définition qui ne soit contradictoire, ni avec elle-même, ni avec les notions antérieures. J'ai fait voir comment les difficultés signalées par M. H. Poincaré (*loc. cit.*) tiennent à la définition que l'on donne usuellement de l'uniformité des fonctions.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{z - a_n} \quad \text{avec} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^{1/2} < \infty$$

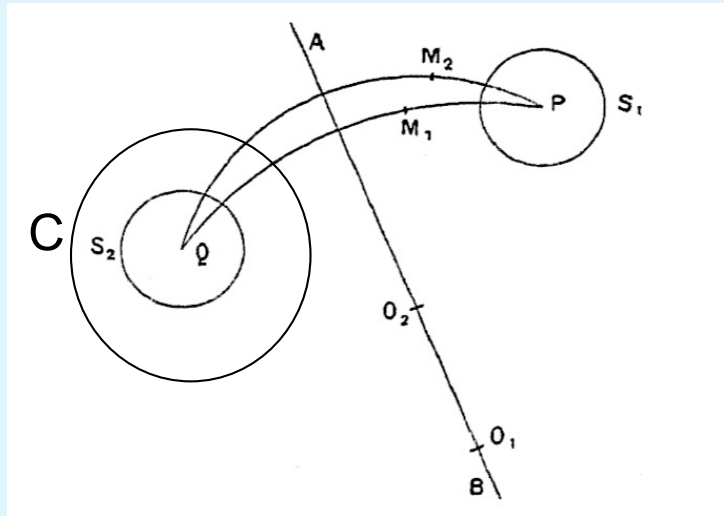
$(a_n)_{n \geq 1}$  dense dans  $\mathbb{C}$



$$L = \overline{AB}$$

Pire des situations : tous les  $a_n$  sont tels que le centre

de  $\widehat{Qa_nP}$  est  $O_n \in [a, b]$



$L$  = longueur de  $[A, B]$

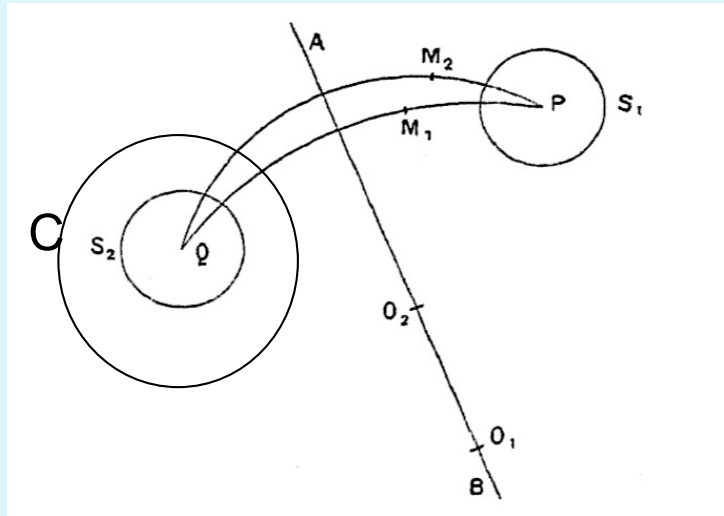
$$u_n = |A_n|^{1/2}$$

$$I_n = ]O_n - u_n, O_n + u_n[$$

$$\exists N, 2 \sum_{N+1}^{\infty} u_n < L$$

**Donc la réunion des  $I_n$  pour  $n \geq N+1$  ne recouvre pas  $[A, B]$**

Exclure  $O_1, \dots, O_N$  ne change rien: il existe  $\omega \in [A, B]$  tel que le cercle de centre  $\omega$  passant par  $P$  et  $Q$  ne contient aucun  $u_n$



$\exists k, \overline{M_1 M_2} \geq k \overline{O_1 O_2}$  (affirmation sur la régularité (lipschitzienne) de l'application  $(O_1, O_2) \mapsto \inf \{ \overline{M_1 M_2}, (M_1, M_2) \in \text{arcs de centres } O_1, O_2 \text{ extérieurs à } S_1, S_2 \}$ )

Donc , si  $z$  est un point de l'arc de cercle reliant  $P$  et  $Q$  de centre  $\omega$ ,

$$\left| z - a_n \right| \geq k \left| \omega O_n \right| > k u_n$$

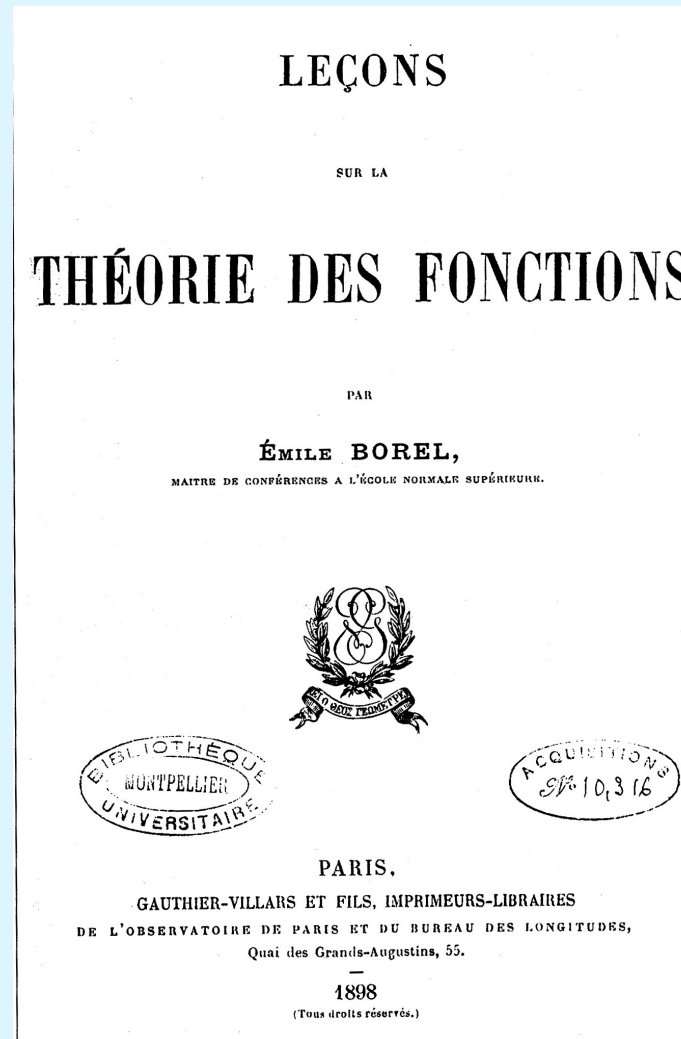
D'où :  $\left| \frac{A_n}{z - a_n} \right| \leq \frac{1}{k} \left| A_n \right|^{1/2}$

et donc il y a convergence uniforme sur l'arc de cercle de centre  $\omega$  et on peut « relier » les points  $P$  et  $Q$  continûment par  $f$  en « enjambant »  $C$ .



Emile BOREL  
(1871-1956)

# Borel : Leçons sur la théorie des fonctions (1898)





Emile BOREL  
(1871-1956)

Quand un ensemble est composé de tous les points compris dans une infinité dénombrable d'intervalles qui ne se rencontrent pas et ont une longueur totale  $s$ , nous dirons que l'ensemble a la mesure  $s$ . Quand deux ensembles sans points communs ont pour mesure  $s$  et  $s'$ , l'ensemble obtenu en les réunissant, autrement dit leur somme, a pour mesure  $s+s'$ .

Plus généralement, si on considère une infinité dénombrable d'ensembles qui deux à deux n'ont pas de points communs et ont pour mesure  $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$  leur somme a pour mesure

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$$

Tout cela est une conséquence de la définition d'une mesure. Voilà maintenant quelques nouvelles définitions : Si un ensemble  $E$  a pour mesure  $s$  et contient tous les points d'un ensemble  $E'$  dont la mesure est  $s'$ , l'ensemble  $E-E'$ , formé de tous les points de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $E'$ , sera dit avoir pour mesure  $s-s'$  (...)  
Les ensembles pour lesquels la mesure peut être définie en vertu des précédentes définitions seront pour nous des ensembles mesurables.



Emile BOREL  
(1871-1956)

Concept de mesurabilité pas totalement stabilisé. Par exemple, Borel ne semble pas persuadé que l'ensemble  $D$  des points où la série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{z - a_n}$$

diverge soit ou non mesurable. Il ajoute:

*Cependant, si un ensemble  $E$  contient tous les éléments d'un ensemble  $E'$ , de mesure  $\alpha$ , nous pouvons dire que la mesure de  $E$  est plus grande que  $\alpha$ , sans se préoccuper de savoir si  $E$  est mesurable ou non. Inversement, si  $E'$  contient tous les éléments de  $E$ , nous dirons que la mesure de  $E$  est inférieure à  $\alpha$ . Les expressions plus grande ou inférieure, en outre n'excluent pas l'égalité. Il est aisé de voir que les propriétés essentielles s'étendent, avec les modifications requises, à ces nouvelles définitions: dans un sens le calcul sur des égalités est remplacé par un calcul sur des inégalités qui parfois rend des services similaires.*