L'INFINI NOUVEAU AUTOUR DE 1900

Michel Bourdeau[1]

Il y a plusieurs façons de rendre hommage à un auteur : on peut le citer d'abondance, on peut aussi choisir de montrer la fécondité de sa pensée. Afin d'éviter de possibles recoupements, j'ai opté pour la seconde solution. Le lecteur est donc prié de ne pas s'étonner si le nom de Gaston Milhaud apparaît peu dans ce qui suit. Il s'agit en effet d'explorer une voie ouverte par la traduction donnée par celui-ci, alors qu'il n'était encore que professeur au Havre, de la « théorie générale des fonctions » de Paul Du Bois-Reymond (1831-1889). Plus précisément l'exposé sera centré sur Émile Borel (1871-1959) et sa dette à l'égard de Paul Du Bois-Reymond : et cela au plan mathématique proprement dit comme au plan philosophique[2].

Au plan mathématique, ce que la thèse soutenue par Borel en 1898 présente comme le théorème fondamental sur la croissance des fonctions a joué un rôle déterminant dans les orientations prises par l'école française. Devant l'infini nouveau qui occupe alors les mathématiciens, deux attitudes sont possibles : celle de Cantor qui procède d'une façon « logique », c'est-à-dire verbale, en posant des définitions *a priori* ; celle de Du Bois-Reymond qui s'appuie, elle, sur des faits mathématiques. Les préférences de Borel vont de toute évidence à cette dernière. Au plan philosophique ensuite, il est clair que ces deux attitudes correspondent à deux philosophies, et nous sommes à nouveau

---

1. IHPST (CNRS-Paris1-ENS)
2. Sauf mention contraire, toutes les citations sont extraites de la quatrième édition des *Leçons sur la théorie des fonctions* (1898), Paris, Gauthier-Villars, 1950, dont les *Notes* reprennent divers articles publiés et deux importantes correspondances.

renvoyés à Du Bois-Reymond, cette fois à la « théorie générale des fonctions », publiée en 1882 et traduite presque aussitôt par Milhaud[1]. L'ouvrage a connu une fortune très inégale. L'idée directrice ne manque ni d'originalité ni de force. C'est sans doute une des premières descriptions de cette opposition entre platonisme et constructivisme qui commande une bonne partie de la philosophie des mathématiques contemporaines. Les termes utilisés par Du Bois-Reymond, il est vrai, ne sont plus les nôtres, puisqu'il parle d'idéaliste et d'empiriste (on peut même penser que la terminologie actuelle est supérieure à celle proposée par Du Bois-Reymond : définir l'idéaliste comme celui qui croit à la réalité de ses idées n'est sans doute pas très heureux !) ; mais, dans un autre vocabulaire, c'est bien une distinction très voisine de la nôtre qu'il visait et il est étrange qu'un ouvrage qui, en un sens, inaugure une nouvelle période de la philosophie des mathématiques soit presque systématiquement ignoré aujourd'hui. Le fait est d'autant plus étrange que, dans les pays francophones, sans doute en raison de l'audience dont jouissait Borel, la terminologie de Du Bois-Reymond a connu un incontestable succès auprès des philosophes des mathématiques. Cela vaut de L. Brunschvicg et, par son biais, de J. Cavaillès ; cela vaut également des débats qui ont eu lieu autour de 1925 sur la « logique empirique » et qui ont joué un rôle non négligeable dans la genèse de la logique intuitionniste. Retracer cette histoire nous éloignerait trop de Milhaud et nous nous en tiendrons à la philosophie des mathématiques de Borel. Comme Poincaré, et à la même époque, celui-ci a en effet largement utilisé les colonnes des revues philosophiques pour prendre position sur des questions débattues et s'expliquer sur le type de considérations qui justifiaient ses choix mathématiques[2]. Dans ces textes, il utilise la terminologie forgée par Du Bois-Reymond pour développer un point de vue constructif proche de celui de Poincaré, qu'il ne se prive toutefois pas de critiquer.

1. Paul Du Bois-Reymond, *Théorie générale des fonctions*, Nice, Imprimerie niçoise, 1887 ; traduction par Gaston Milhaud de *Die Allgemeine Functionentheorie*, Tübingen, H. Laupp, 1882.
2. Voir « À propos de l'infini nouveau » (1899) et « L'antinomie du transfini » (1900) ; tous deux, dans la *Revue philosophique*, et tous deux en réponse à des articles publiés dans la même revue par F. Evellin. Voir aussi un compte-rendu des *Étapes de la philosophie mathématique* de L. Brunschvicg, intitulé « La philosophie mathématique de l'infini », publié en 1912 dans la *Revue du mois*, et sa suite « L'infini mathématique et la réalité », publié dans la même revue en 1914 ; tous ces textes sont repris dans la note IV ajoutée lors de la deuxième édition. É. Borel a également critiqué les vues défendues par H. Bergson sur la géométrie.

Le plan mathématique : le théorème de Du Bois-Reymond, l'infini nouveau et la réception du cantorisme

Le théorème de Du Bois-Reymond affirme qu'étant donnée une suite dénombrable quelconque de fonctions croissantes, il existe une fonction croissante *plus grande* que chacune d'elles. Pour l'approcher, on peut partir de la mesure des grandeurs. Mesurer une grandeur L à l'aide d'une grandeur, l, c'est trouver un entier n tel qu'on ait

$$nl \leq L \leq (n+1)l,$$

S'il y a un reste $l_1=L-nl$, on trouvera de même n_1 tel qu'on ait

$$n_1 l_1 \leq l \leq (n_1+1)l_1$$

et l'on peut continuer en posant : $l - n_1 l_1 = l_2$; la mesure de L se présentera alors sous la forme d'une fraction continue :

$$n + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \dots}}}$$

ce qui n'est autre que l'algorithme d'Euclide. La théorie de la mesure repose donc sur deux fondements : la suite indéfinie des entiers, présupposée par l'algorithme ; l'axiome d'Archimède, qui pose que, données deux grandeurs de même nature l et L, on peut trouver un entier, m, tel que $ml > L$.

Du Bois-Reymond s'est posé la question : existe-t-il une suite de fonctions croissantes qui joue, par rapport à l'ensemble des autres, le même rôle que la suite des entiers qui sert de base à l'algorithme d'Euclide ? La réponse est négative et, grâce à ce qui semble bien être le premier usage du procédé diagonal, le mathématicien allemand a montré comment, étant donnée une suite de fonctions dont la croissance est de plus en plus rapide, il est possible de construire une fonction qui croisse encore plus rapidement et qui n'appartient pas à cette suite[1].

En présence de ce résultat, une question s'impose : que conclure de cette impossibilité de donner une énumération exhaustive de l'ensemble des fonctions croissantes ? Les réflexions que le théorème fondamental a inspirées à Borel

1. Pour un exposé plus précis du théorème voir, outre l'ouvrage de Borel, J. Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Hermann, 1962, pp. 61-66, ainsi que G. Fischer : « The Infinite and Infinitesimal Quantities of Du Bois-Reymond and their Reception », *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 24, n° 2 (1981), pp. 101-163.

se résument à une double distinction. Dans un premier temps, il s'agira de reconnaître que nous devons maintenant distinguer deux sortes d'infini : l'infini en quelque sorte usuel, familier, l'infini dénombrable ; et le nouvel infini, qu'on appellera *transfini* afin d'éviter toute équivoque. Après quoi, il faudra distinguer deux façons d'approcher cet infini nouveau. À la même époque en effet, Cantor découvrait lui aussi le transfini, mais en suivant une démarche fort différente de celle de son compatriote ; Borel, après avoir souligné tout ce qui les sépare, exprime ses réserves devant certains traits problématiques de la démarche cantorienne.

La découverte du transfini. Ce qui est déroutant dans le résultat qui vient d'être établi, c'est qu'il nous contraint en effet à reconnaître un infini nouveau. Revenons au parallèle avec la suite des entiers. L'axiome d'Archimède était chargé d'exprimer son caractère infini. Il est impossible de la parcourir dans sa totalité car *si grand que soit un nombre, il en existe un plus grand.* Le théorème fondamental exprime une découverte du même ordre : si rapide que soit la croissance d'une fonction, il en existe une autre qui croît plus rapidement. Mais le parallèle n'est pas complet. La suite des entiers est dénombrable ; celle que le procédé de Du Bois-Reymond nous permet de construire ne l'est pas. Nous sommes en présence d'un phénomène jusqu'alors insoupçonné, l'infini non dénombrable.

Ce qu'ont en commun le principe *après chaque nombre, il y en a un autre*, et le procédé de Du Bois-Reymond, c'est que l'un comme l'autre peuvent être répétés indéfiniment. Mais que veut dire « répéter indéfiniment » ? Si l'on entend par là répéter *n* fois la même opération, et faire croître *n* indéfiniment, alors l'application indéfinie du procédé de Du Bois-Reymond ne nous donnera jamais qu'une infinité dénombrable de types de croissance. Or, ce que nous apprend le procédé de Du Bois-Reymond, c'est que, même quand on a une infinité dénombrable de types, il est encore applicable. Nous nous trouvons donc dans « la *nécessité logique* d'étendre le sens du mot *indéfiniment* » (p. 117). Donner un même nom à deux objets aussi différents ne pourrait qu'engendrer la confusion et c'est pourquoi on parlera, dans ce dernier cas, de transfini.

> Répéter transfiniment l'application du procédé de Du Bois-Reymond, ce sera la répéter chaque fois qu'on aura une infinité dénombrable de types croissants, quel que soit le procédé par lequel on a obtenu cette infinité. Par conséquent, par définition même, on obtient ainsi une infinité non dénombrable de types ; car, si l'on obtenait seulement une infinité dénombrable, on devrait encore appliquer le même procédé, sans en rester là (p. 117 ; voir aussi p. 140).

À la fin du XIX[e] siècle, Du Bois-Reymond n'était toutefois pas seul à s'aventurer sur ces terres nouvelles dont la découverte est plus souvent associée au nom de son compatriote, Cantor, qu'au sien. Partant d'une énumération censée exhaustive de nombres réels donnés dans leur expansion décimale, le créateur de la théorie des ensembles montrait en effet comment, par le procédé diagonal, il est toujours possible de construire un nombre réel qui ne figure pas dans cette énumération. De là s'ensuit que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable. C'est bien du même infini qu'il s'agit dans les deux cas mais le cadre conceptuel utilisé pour le penser est fort différent. Le point de vue cantorien se caractérise par la considération de la cardinalité, ou encore de la puissance (c'est-à-dire du nombre d'éléments) des ensembles[1]. Les nombres naturels forment un ensemble de la première puissance, les nombres réels, un ensemble de la seconde puissance. On constate alors que « la relation entre la notion de seconde puissance et le théorème de Paul Du Bois-Reymond est exactement la même que la relation entre la notion de première puissance et le théorème : après chaque nombre entier, il y en a autre » (pp. 117-118).

Mais, là encore, le parallèle trouve vite des limites. La théorie des nombres transfinis développée par Cantor obéit à de tout autres considérations que le point de vue suivi jusqu'ici. Leur engendrement repose sur trois principes. Le premier nous donne les nombres finis équivaut à celui déjà exposé : après chaque entier, il y en a un autre. Le second principe, dont on verra dans un instant qu'il fait problème, permet, étant donné un ensemble de nombres parmi lesquels il n'y en a pas qui soit plus grand que tous les autres, de former un nouveau nombre qu'on regarde comme la limite des premiers ; qui, en d'autres termes, est défini comme immédiatement supérieur à tous ces nombres. Le premier nombre obtenu de cette façon est ω, qui correspond à l'ensemble des entiers. La portée de ce principe est telle (il permet de franchir toute limite) que Cantor est obligé d'introduire un troisième principe, dit principe d'arrêt ou de limitation.

Le contraste entre le deuxième principe et le théorème fondamental est aussi frappant que leur analogie :

1. La notion de puissance généralise celle de nombre cardinal. Galilée avait déjà noté qu'il y a autant de nombres pairs que de nombres entiers (on peut les mettre en correspondance bi-univoque). On dira donc que l'ensemble des nombres pairs, l'ensemble des nombres impairs, l'ensemble des nombres entiers ont même puissance. Mais les règles de l'addition des puissances changent puisque la somme des deux premières est égale et non pas supérieure à la troisième. De façon générale, dans le cas infini, on a : $a + a = \tilde{a}$.

> Le principe est posé *a priori* ; par suite, si on l'admet, on doit lui accorder une valeur absolue ; il débordera tout si on ne l'arrête, ce qui est le rôle du troisième principe. Le théorème, au contraire, n'est pas un postulat ; c'est un fait mathématique qui ne repose sur aucune considération *a priori*, mais sa puissance est bien plus limitée : il porte en lui-même le principe d'arrêt, car il n'est applicable qu'autant que l'ensemble déjà obtenu est dénombrable (p. 121).

Bien plus, dit Borel, la puissance du deuxième principe de formation a tout l'air d'être en bonne partie illusoire ; à y regarder de plus près, on a de bonnes raisons de mettre en doute qu'il puisse nous élever, par sa seule force, au-delà de la première classe de nombre. Qu'il puisse en d'autres termes nous faire acquérir la notion d'une puissance que nous n'aurions pas déjà. Les réserves qu'appelle le point de vue cantorien tiennent à ce qu'il introduit non seulement de nouveaux objets, mais un nouveau mode de raisonnement : il est bien connu que le développement du cantorisme s'est accompagné de l'abandon du point de vue constructif qui avait prévalu jusqu'alors en mathématique.

Ce qui précède donne la clé des orientations suivies par Borel : faire le partage, dans la création cantorienne, entre d'un côté ce qui est mathématiquement fécond et de l'autre des considérations *a priori* reposant sur des principes qui risquent à chaque instant d'égarer le mathématicien, faute de lui fournir des règles claires spécifiant les opérations à effectuer pour que son discours soit plus qu'un simple jeu verbal. C'est ainsi que Borel s'est engagé dans la voie tracée par Cantor, a utilisé certains des nouveaux outils mis à notre disposition par celui-ci ; mais sans renoncer à l'exigence qui veut que l'on garde le contrôle de la construction des objets dont on parle. Ce faisant, il renonçait délibérément à aller aussi loin que les cantoriens de strict obédience dans l'exploration du transfini ; mais s'agit-il vraiment d'un renoncement, pour qui estime que le pouvoir accru revendiqué à leur profit par ces derniers est pure illusion ?

Des mathématiques à la philosophie

La dette de Borel à l'égard de Du Bois-Reymond est double : elle ne se limite pas au plan strictement mathématique et s'étend également à la philosophie. Ce dernier en effet ne s'est pas contenté de nous donner un accès au transfini plus sûr que celui suivi par le fondateur de la théorie des ensembles ; il a encore élaboré une doctrine philosophique qui éclaire les différends qui surgissent sur le terrain mathématique. Derrière les deux types de mathématique qui viennent d'être décrits, il est possible en effet d'identifier deux attitudes

philosophiques sous jacentes, que Du Bois-Reymond semble avoir été un des premiers à thématiser. Si la théorie générale des fonctions mérite de faire date dans l'histoire de la philosophie des mathématiques, c'est que l'auteur, pour la première fois semble-t-il, oppose, sous des noms qui, il est vrai, nous apparaissent aujourd'hui assez inappropriés, deux attitudes qui nous aident à mieux comprendre les divergences qui n'allaient pas tarder à se faire jour entre les mathématiciens. Il est tout à l'honneur de Milhaud que d'avoir su discerner la pertinence du cadre conceptuel mis ainsi à la disposition des philosophes par l'ouvrage de 1882. Quant à Borel, il a enrichi d'analyses nouvelles la distinction de l'empiriste et de l'idéaliste qu'il avait reçue de son prédécesseur. Ce faisant, il s'inscrit dans une tradition bien attestée chez les mathématiciens français, et qui tend à considérer la logique comme une entreprise stérile, un pur verbiage consistant, comme dit Descartes, à « parler sans jugement des choses qu'on ignore ». Dans le même esprit, Borel condamne également l'abus des considérations *a priori*, qui finirait par détourner le mathématicien de la réalité et par transformer les mathématiques en métaphysique. À la place, il défend une position qu'il lui arrive d'appeler « subjective » (p. 171) mais qu'il serait sans doute plus appropriée d'appeler *expérientielle* (pour reprendre le mot forgé par Clemenceau quand il traduisait Mill), en ce sens qu'elle se laisse caractériser par la volonté de ne jamais quitter le sol de l'expérience mathématique. Contrairement à une idée reçue, qui se plait à souligner le caractère abstrait du travail du mathématicien, Borel estime que celui-ci, comme les autres savants, doit s'en tenir aux faits, et c'est pourquoi il abandonne volontiers au philosophe les questions théoriques. Pour donner sens à son discours, le mathématicien doit donc pouvoir le rapporter à des opérations qu'il est en mesure d'effectuer.

Avant de présenter ce que l'on pourrait appeler l'apport philosophique propre de Borel, il convient toutefois de rappeler brièvement le succès aujourd'hui largement oublié des idées de Du Bois-Reymond que Milhaud avait rendues accessibles au public français. Je m'en tiendrai aux épisodes les plus marquants, qui, fait significatif, se sont déroulés sur la scène francophone (et autour de Borel) puisqu'ils concernent d'un côté Brunschvicg et Cavaillès, de l'autre la préhistoire de la logique intuitionniste.

L'œuvre de L. Brunschvicg fournit un premier exemple de l'influence du texte de Du Bois-Reymond sur les philosophes français. Si Milhaud est assez souvent cité dans *Les Étapes de la philosophie mathématique*, publiées en

1912, c'est presque toujours pour ses travaux d'historien[1]. Pour les débats contemporains, Brunschvicg s'appuie avant tout sur Poincaré, quand il s'agit du logicisme, qui y est assez longuement discuté, et sur Borel quand il s'agit de Cantor – classé d'ailleurs, comme c'était alors souvent le cas, aux côtés des logicistes. L'éditeur de Pascal partage les mêmes réserves que Borel devant la théorie des ensembles ; il oppose lui aussi le théorème de Du Bois-Reymond à la théorie cantorienne des puissances ; il donne lui aussi la distinction entre empirisme et idéalisme comme le cadre le plus approprié pour discuter en philosophe des problèmes posés par les dernières découvertes mathématiques. Il y a tout lieu de penser que l'auteur était assez proche de Borel puisque, aussitôt après sa parution, ce dernier publie un compte-rendu élogieux de l'ouvrage, décrit comme « un des plus puissants efforts qu'ait jamais tenté un philosophe pour s'assimiler une discipline aussi étendue que la science mathématique et pour essayer de traduire en langage mathématique les résultats acquis par les savants » (p. 165). Une génération plus tard, la même influence est encore très sensible dans la thèse de Cavaillès qui, si elle porte sur les développements intervenus depuis 1918, n'en commence pas moins par rappeler le point de vue de Borel, qualifié d'*empirisme*[2]. Quelques années plus tôt, la terminologie introduite dans la théorie générale des fonctions était encore reprise dans les débats engagés, toujours autour de Borel, « pour ou contre la logique empirique ». Des notes ajoutées aux diverses éditions des *Leçons sur la théorie des fonctions*, on retient d'ordinaire les « lettres sur la théorie des ensembles », échangées par Baire, Borel, Hadamard et Lebesgue suite à la démonstration donnée par Zermelo du théorème de bon ordre. Quoique, hormis Paul Lévy, les signataires des textes réunis dans la note VII portent des noms moins prestigieux, cette controverse joua un rôle déterminant dans l'axiomatisation de la logique intuitionniste donnée en 1930 par Heyting.

Mais il est inutile d'entrer dans les détails d'une histoire qui a déjà été racontée[3]. Essayons plutôt de dégager, des considérations avancées par Borel en faveur des positions qu'il adopte, ce qu'on pourrait appeler sa philosophie des mathématiques. Il y a là en effet un apport qui ne manque pas d'originalité ; Borel ne se contente pas, comme on le verra, de reprendre les idées de Du

1. Sur les mathématiques grecques et notamment l'interprétation du pythagorisme ; sur Descartes, Brunschvicg mentionne également sa théorie de la rationalité.
2. Jean Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme*, Paris, Hermann, 1938.
3. Dennis Hesseling : *Gnomes in the Fog: The Reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920s*, Bâle, Birkhäuser, 2003, pp. 231-300.

Bois-Reymond ; il les développe, les modifie, en substituant notamment le réalisme à l'empirisme et son insistance sur le concret trouvera des échos chez son élève Maurice Fréchet[1].

Le statut de ces remarques demande tout d'abord à être précisé car, comme Borel prend soin de le signaler, le point de vue qu'il adopte change en fonction des circonstances. Le plus souvent, c'est le scientifique qui parle, et le discours du savant est alors opposé à celui du philosophe, comme dans le compte-rendu de Brunschvicg ou dans les articles publiés dans la *Revue philosophique*. Mais cette attitude n'est pas constante et la nature des sujets abordés fait qu'il lui arrive de quitter, très consciemment, le terrain du raisonnement mathématique pour celui de la controverse philosophique (p. 144). Si l'on veut bien faire abstraction de ce qui apparaît comme une différence de style, l'opposition de la science et de la philosophie est présentée comme renvoyant à deux tournures d'esprit, qui se manifestent par exemple dans deux conceptions du réalisme (p. 166). Celui dont se réclame Borel

> n'est pas le réalisme du philosophe, qui se préoccupe de savoir s'il n'y a pas de pièges dans les termes de son discours, si l'infini dont il a peur (ou dont il a soif) comme d'un dieu inconnu ne s'y cache point quelque part, c'est le réalisme du mathématicien qui regarde comme réels les êtres avec lesquels il vit quotidiennement, et dont il parle couramment, sans avoir jamais été exposé à un malentendu (p. 167).

À diverses reprises, il est également fait mention d'un troisième point de vue, étranger aux mathématiques, mais venant s'y surajouter, au risque de créer des illusions. Le point de vue logique, puisque c'est de lui qu'il s'agit, se caractérise par l'idée que, du langage à l'être, la conclusion est bonne ; la perfection logique, cependant, ne garantit nullement l'accord avec une quelconque réalité (p. 174). C'est la présence de ce troisième point de vue qui explique que la théorie des ensembles non dénombrables prenne la forme d'« une sorte d'algèbre logique dont les symboles ne recouvrent aucune réalité accessible, les divers mathématiciens ne pouvant être assurés qu'ils sont d'accord sur cette réalité, puisqu'ils n'en ont pas une représentation commune » (p. 160). À cet égard, l'attitude de Borel se caractérise par le souci « de séparer celles des parties de la théorie des ensembles qui ont effectivement contribué au progrès de la théorie des fonctions, des constructions logiques

1. Maurice Fréchet, *Les mathématiques et le concret*, PUF, 1955.

purement verbales dans lesquelles on jongle avec des symboles auxquels ne correspondent aucune intuition » (p. 179). Cette origine logique explique les limites d'une notion comme celle de puissance qui, « malgré son utilité incontestable et son intérêt, est peu riche en conséquences, parce que c'est, au fond, une notion très superficielle » (p. 131). Des remarques analogues s'appliquent à la méthode axiomatique utilisée par Hilbert. S'il est légitime de surajouter une géométrie logique ou arithmétique à la géométrie expérimentale, il serait illusoire de croire que l'on puisse faire l'économie d'une réflexion sur le rapport de ces constructions logiques à la réalité :

> Personne, note Borel, ne croit qu'il existe des objets satisfaisant rigoureusement aux définitions géométriques, mais la géométrie n'aurait pas été créée si les hommes ne croyaient pas tous, au moins dans la pratique, à l'existence d'objets qui réalisent approximativement ces définitions (p. 174).

À la différence de Poincaré, Borel refuse de concéder à Hilbert qu'en mathématique, la non-contradiction équivaille à l'existence : on peut concevoir, estime-t-il, une théorie logiquement parfaite et sans rapport avec la réalité ; ce que Brouwer exprimera par une formule imagée : une politique criminelle qui n'est pas condamnée par une cour de justice internationale ne cesse pas pour autant d'être criminelle.

Ces quelques indications montrent déjà que, si Borel reprend le cadre théorique forgé par Du Bois-Reymond, c'est pour l'enrichir et le modifier. L'identification de l'empirisme au réalisme témoigne de l'ampleur de la remise en chantier. Le choix terminologique est peut-être encore moins heureux que celui de 1882 puisque le platoniste et son adversaire pouvant désormais l'un comme l'autre se réclamer, tout du moins verbalement, de la même doctrine, on court le risque de ne plus pouvoir saisir ce qui les sépare. Ce sur quoi le terme est chargé de mettre l'accent, en revanche, ne prête pas à équivoque : c'est sur l'observation attentive des faits, sur l'attachement à la réalité mathématique. Alors que les mathématiques ont la réputation d'être abstraites, Borel, lui, insiste sur leur caractère concret et c'est donc dans la façon dont il conçoit la réalité mathématique que se manifeste le mieux son originalité. Deux ou trois traits apparaissent plus particulièrement révélateurs.

Le plus sûr d'entre eux est l'accord unanime des mathématiciens. Dans sa réponse à Hadamard, il commence par remarquer qu'ils sont au moins d'accord sur la possibilité de s'accorder ; puis il ajoute :

> Je ne puis en effet, malgré l'opinion de Poincaré, croire que cet accord puisse être impossible entre mathématiciens, en raison de la différence de nature de leurs esprits ; du moment qu'il s'agit de mathématiques et non de philosophie, le désaccord ne peut provenir que d'un malentendu[1].

Si le transfini fait problème, c'est précisément que les mathématiciens n'ont pas réussi à se mettre d'accord à son propos. La position de Borel l'amène donc à admettre que « ce qui est important, c'est la solution que les progrès de la science amèneront les mathématiciens à adopter unanimement : car ce sera *un fait* » (p. 143).

Un second critère de la réalité d'une notion mathématique, c'est sa fécondité, la possibilité de trouver à s'appliquer. Ainsi, une des raisons de mettre en doute l'intérêt de la notion de puissance d'un ensemble, c'est que les théorèmes où elle figure sont « bien moins fécond[s] en application qu'on ne pourrait le croire d'abord » (p. 132). Inversement, si Borel ne rejette pas certains raisonnements qui ne lui semblent pourtant pas absolument valables, c'est qu'ils « conduisent ultérieurement à des résultats effectifs » (p. 158). En cela, ils ressemblent à « certaines théories de physique mathématique, par lesquels nous ne prétendons pas exprimer la réalité, mais avoir un guide qui nous permette, par analogie, de découvrir des phénomènes nouveaux, qu'il reste ensuite à vérifier » (*Ibid.*).

Le dernier trait, peut-être le plus fort, concerne le réel dans son rapport à la connaissance que nous pouvons en prendre. Si la réalité existe en soi, la seule réalité dont nous puissions parler est celle qui nous est de quelque façon accessible. Aussi Borel ne peut-il accepter le point de vue d'Hadamard qui, jugeant trop subjective la question de Baire « pouvons-nous ordonner ? » lui substituait cette autre « l'ordination est-elle possible ? » purement objective cette fois, toute référence à l'activité d'un sujet (mathématicien) ayant disparu. « Je ne conçois pas, répondait son interlocuteur, ce que peut-être la possibilité en soi d'un acte qui serait impossible pour tout esprit humain ; c'est pour moi un pure abstraction métaphysique, en dehors de toute réalité mathématique » ; aussi, ajoutait-il, « la science "toute subjective" [...] me paraît être la seule science dont on puisse légitimement parler » (p. 171). Comme en témoigne le recours au verdict de l'histoire, la réalité mathématique est une réalité ouverte, en devenir. G. Polya et plus récemment encore I. Lakatos nous le rappelaient,

1. (p. 173) ; le texte de Poincaré auquel il est fait allusion se trouve dans « Les mathématiques et la logique » (*Dernières pensées*, pp. 161-162).

le mathématicien lui aussi, procède par tâtonnement et sa démarche, de ce point de vue, est loin d'être aussi opposée à celle des sciences expérimentales qu'on ne le dit d'ordinaire[1].

Ce qui précède suffit, je l'espère, à montrer l'importance de la traduction publiée par Milhaud en 1887. Les quelque dix pages qu'il a rédigées spécialement à cette occasion et qu'il a placées en tête de l'ouvrage opposent, dans un esprit très moderne, les mathématiques idéales et les mathématiques expérimentales, les secondes s'obtenant des premières par un travail de reconstruction consistant à effacer les origines concrètes, en partie contingentes, des notions pour mettre à la place en valeur l'ordre logique existant entre les notions. Cette opposition, qui glose sur la distinction de l'idéaliste et de l'empiriste, correspond bien à l'attitude que l'on trouve chez Borel et ceux qui se réclameront de lui. En rendant l'ouvrage accessible aux lecteurs français, celui à qui nous rendons hommage a ainsi contribué, de façon discrète mais notable, au développement des mathématiques et de la philosophie des mathématiques en France.

1. Voir I. Lakatos : *Proofs and Refutations : The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge, Cambridge U. P., 1976, et Th. Tymoczko (éd.) : *New Directions in the Philosophy of Mathematics : An Anthology*, Princeton, Princeton U. P., 1998.