CHAPITRE VI.

Des Séries convergentes et divergentes. Règles sur la convergence des Séries. Sommation de quelques Séries convergentes.

§. 1.$^{\text{er}}$ *Considérations générales sur les Séries.*

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0, \ u_1, \ u_2, \ u_3, \ \&c. \dots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différens *termes* de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente*, et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice n, pour que la série soit complétement déterminée.

L'une des séries les plus simples est la progression géométrique

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \&c.\dots$$

qui a pour terme général x^n, c'est-à-dire, la puissance $n.^{me}$ de la quantité x. Si dans cette série on fait la somme des n premiers termes, on trouvera

$$1+x+x^2+\dots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x};$$

et, comme pour des valeurs croissantes de n la valeur numérique de la fraction $\frac{x^n}{1-x}$ converge vers la limite zéro, ou croît au-delà de toute limite, suivant qu'on suppose la valeur numérique de x inférieure ou supérieure à l'unité, on doit conclure que dans la première hypothèse la progression

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \&c.\dots$$

est une série convergente qui a pour somme $\frac{1}{1-x}$, tandis que dans la seconde hypothèse la même progression est une série divergente qui n'a plus de somme.

D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série

$$(1)\qquad u_0,\ u_1,\ u_2\dots u_n,\ u_{n+1},\ \&c.\dots$$

soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \&c. \ldots + u_{n-1}$$

vers une limite fixe s : en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, les sommes

$$s_n, \quad s_{n+1}, \quad s_{n+2}, \quad \&c. \ldots$$

diffèrent de la limite s, et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme s_n et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations

$$s_{n+1} - s_n = u_n,$$
$$s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1},$$
$$s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\&c. \ldots$$

Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général u_n décroisse indéfiniment, tandis que n augmente; mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes

$$u_n + u_{n+1},$$
$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\&c. \ldots$$

c'est-à-dire, les sommes des quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \&c. \ldots$$

prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

Prenons pour exemple la progression géométrique

$$(2) \qquad 1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \&c. \ldots$$

Si la valeur numérique de x est supérieure à l'unité, celle du terme général x^n croîtra indéfiniment avec n, et cette seule remarque suffira pour constater la divergence de la série. La série sera encore divergente, si l'on suppose $x = \pm 1$, parce qu'alors la valeur numérique du terme général x^n, se réduisant à l'unité, ne décroîtra pas indéfiniment pour des valeurs croissantes de n. Mais, si la valeur numérique de x est supérieure à l'unité, les sommes des termes de la série pris à partir de x^n en tel nombre que l'on voudra, savoir,

$$x^n,$$

$$x^n + x^{n+1} = x^n \frac{1-x^2}{1-x},$$

$$x^n + x^{n+1} + x^{n+2} = x^n \frac{1-x^3}{1-x},$$

$$\&c. \ldots$$

se trouvant toutes comprises entre les limites

$$x^n, \quad \frac{x^n}{1-x},$$

chacune d'elles deviendra infiniment petite pour des valeurs de n infiniment grandes ; et par suite la série sera convergente, ce que l'on savait déjà.

Prenons pour second exemple la série numérique

$$(3) \qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}\ \ldots\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \&c.\ldots$$

Le terme général de cette série, savoir, $\frac{1}{n+1}$ décroît indéfiniment à mesure que n augmente, et cependant la série n'est pas convergente ; car la somme faite du terme $\frac{1}{n+1}$ et de ceux qui le suivent jusqu'au terme $\frac{1}{2n}$ inclusivement, savoir,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots.+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n},$$

reste constamment supérieure, quel que soit n, au produit

$$n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2};$$

et par suite, cette somme ne décroît pas indéfiniment pour des valeurs croissantes de n, ainsi que cela aurait lieu si la série était convergente. Ajoutons que, si l'on désigne par s_n la somme des n premiers termes de la série (3), et par 2^m la plus haute puissance de 2 renfermée dans $n+1$, on trouvera

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right),$$

et *à fortiori*

$$s_n > 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}.$$

On en conclura que la somme s_n croît indéfiniment avec le nombre entier m, et par conséquent avec n, ce qui est une nouvelle preuve de la divergence de la série.

Considérons encore la série numérique,

$$(4) \qquad 1,\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{1.2},\ \frac{1}{1.2.3}, \ldots \frac{1}{1.2.3\ldots n},\ \&c\ldots$$

Les termes de cette série qui occupent un rang supérieur à n, savoir,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n},\ \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)},\ \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)},\ \&c..,$$

seront respectivement inférieurs aux termes correspondans de la progression géométrique

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n},\ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n},\ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n^2},\ \&c\ldots.$$

Par suite, la somme des premiers termes pris en tel nombre que l'on voudra sera toujours inférieure à la somme des termes correspondans de la progression géométrique, qui est une série convergente, et à plus forte raison, à la somme de cette progression, c'est-à-dire, à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{1}{n-1}.$$

Comme cette dernière somme décroît indéfiniment à mesure que n augmente, il en résulte que la série (4) est elle-même convergente. On est convenu de désigner par la lettre e la somme de cette série. En ajoutant les n premiers termes, on obtiendra pour valeur approchée du nombre e

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)};$$

et, d'après ce qu'on vient de dire, l'erreur commise sera inférieure au produit du $n.^{me}$ terme par $\frac{1}{n-1}$. Ainsi, par exemple, si l'on suppose $n=11$, on trouvera pour la valeur approchée de e

$$(5)\qquad e=2.7182818\ldots.;$$

et l'erreur commise dans cette hypothèse sera inférieure au produit de la fraction $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$ par $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire, à $\frac{1}{36288000}$, en sorte qu'elle n'altérera pas la 7.^{e} décimale.

Le nombre e, déterminé comme on vient de le dire, sera souvent employé dans la sommation des suites et dans le calcul infinitésimal. Les logarithmes pris dans le système qui a ce nombre pour base s'appellent *Népériens*, du nom de *Néper*, inventeur des logarithmes, ou *hyperboliques*, parce qu'ils servent à mesurer les diverses parties de l'aire comprise entre l'hyperbole équilatère et ses asymptotes.

On indique généralement la somme d'une série convergente par la somme de ses premiers termes suivie d'un *&c*.... Ainsi, lorsque la série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots.$$

est convergente, la somme de cette série est représentée par

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \&c. \ldots .$$

En vertu de cette convention, la valeur du nombre e se trouvera déterminée par l'équation

$$(6) \qquad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \&c. \ldots ;$$

et, si l'on considère la progression géométrique

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \&c. \ldots ,$$

on aura, pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité,

$$(7) \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + \&c. \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

La série

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \&c. \ldots$$

étant supposée convergente, si l'on désigne sa somme par s, et par s_n la somme de ses n premiers termes, on trouvera

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \&c. \ldots$$
$$= s_n + u_n + u_{n+1} + \&c. \ldots ,$$

et par suite

$$s - s_n = u_n + u_{n+1} + \&c. \ldots .$$

De cette dernière équation il résulte que les quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \&c.\ldots.$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par r_n, on aura

$$s = s_n + r_n;$$

et r_n sera ce qu'on appelle le *reste* de la série (1) à partir du $n.^{me}$ terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différens termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable;

$$s_n, \quad r_n \quad \text{et} \quad s$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissemens que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très-considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante.

1.^{er} THÉORÈME. *Lorsque les différens termes de la série* (1) *sont des fonctions d'une même variable* x, *continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

En vertu de ce théorème, la somme de la série (2) devra rester fonction continue de la variable x, entre les limites $x=-1$, $x=1$; ce qu'on peut vérifier à l'inspection de la valeur de s donnée par l'équation

$$s = \frac{1}{1-x}.$$

---

§. 2.^{e} *Des Séries dont tous les termes sont positifs.*

Lorsque la série

$$(1) \qquad u_0,\ u_1,\ u_2\ \ldots.\ u_n,\ \&\text{c.}\ldots$$

a tous ses termes positifs, on peut ordinairement décider si elle est convergente ou divergente, à l'aide du théorème suivant.

1.^{er} THÉORÈME. *Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'expression $(u_n)^{\frac{1}{n}}$; et désignez par k la plus grande de ces limites, ou, en d'autres termes, la limite des plus grandes valeurs de l'expression dont il s'agit. La série (1) sera convergente, si l'on a $k<1$, et divergente, si l'on a $k>1$.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord $k<1$, et choisissons à volonté entre les deux nombres 1 et k un troisième nombre U, en sorte qu'on ait

$$k < U < 1.$$

n venant à croître au-delà de toute limite assignable, les plus grandes valeurs de $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ ne pourront s'approcher indéfiniment de la limite k, sans finir par être constamment inférieures à U. Par suite, il sera possible d'attribuer au nombre entier n une valeur assez considérable, pour que, n obtenant cette même valeur ou une valeur plus grande encore, on ait constamment

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} < U, \quad u_n < U^n.$$

Il en résulte que les termes de la série

$$u_0, \; u_1, \; u_2 \ldots u_{n+1}, \; u_{n+2}, \; \&c. \ldots$$

finiront par être toujours inférieurs aux termes correspondans de la progression géométrique

$$1, \; U, \; U^2, \; \ldots U^n, \; U^{n+1}, \; U^{n+2}, \; \&c. \ldots;$$

et, comme cette progression est convergente (à cause de $U < 1$), on peut de la remarque précédente conclure *à fortiori* la convergence de la série (1).

Supposons, en second lieu, $k > 1$; et plaçons encore entre les deux nombres 1 et k un troisième nombre U, en sorte qu'on ait

$$k > U > 1.$$

Si n vient à croître au-delà de toute limite, les plus grandes valeurs de $(u_n)^{\frac{1}{n}}$, en s'approchant indéfiniment de k, finiront par devenir supérieures à U

On pourra donc satisfaire à la condition

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} > U,$$

ou, ce qui revient au même, à la suivante

$$u_n > U^n,$$

par des valeurs de n aussi considérables que l'on voudra; et par suite, on trouvera dans la série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n,\ u_{n+1},\ u_{n+2},\ \&c.\ldots$$

un nombre indéfini de termes supérieurs aux termes correspondans de la progression géométrique

$$1,\ U,\ U^2,\ \ldots\ U^n,\ U^{n+1},\ U^{n+2},\ \&c.\ldots$$

Comme cette progression est divergente (à cause de $U > 1$), et qu'en conséquence ses différens termes croissent à l'infini, la remarque que l'on vient de faire suffira pour établir la divergence de la série (1).

Dans un grand nombre de circonstances, on peut déterminer la valeur de la quantité k, à l'aide du théorème 4.e [chap. II, §. 3.e]. En effet, en vertu de ce théorème, toutes les fois que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ convergera vers une limite fixe, cette limite sera précisément la valeur de k. On peut donc énoncer la proposition suivante.

2.e THÉORÈME. *Si, pour des valeurs croissantes de* n*, le rapport*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

converge vers une limite fixe k*, la série* (1) *sera* *convergente toutes les fois que l'on aura* $k < 1$, *et divergente toutes les fois que l'on aura* $k > 1$.

Concevons, par exemple, que l'on considère la série

$$1\,,\ \frac{1}{1}\,,\ \frac{1}{1.2}\,,\ \frac{1}{1.2.3}\,,\ \ldots\ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\,,\ \text{\&c.}\ldots:$$

on trouvera

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots n\,(n+1)} = \frac{1}{n+1}\,,\quad k = \frac{1}{\infty} = 0\,,$$

et par conséquent la série sera convergente, ce que l'on savait déjà.

Le premier des deux théorèmes qu'on vient d'établir ne laisse d'incertitude sur la convergence ou la divergence d'une série dont tous les termes sont positifs, que dans le cas particulier où la quantité représentée par k devient égale à l'unité. Dans ce cas particulier, il n'est pas toujours facile de décider la question. Toutefois, nous allons démontrer ici deux nouvelles propositions à l'aide desquelles on peut souvent y parvenir.

3^e. THÉORÈME. *Lorsque dans la série* (1) *chaque terme est inférieur à celui qui le précède, cette série et la suivante*

$$(2)\qquad u_0\,,\ 2u_1\,,\ 4u_3\,,\ 8u_7\,,\ 16u_{15}\,,\ \text{\&c.}\ldots$$

sont en même temps convergentes ou divergentes.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord la série (1) convergente, et désignons sa somme par s. On aura

$$u_0 = u_0,$$
$$2u_1 = 2u_1,$$
$$4u_3 < 2u_2 + 2u_3,$$
$$8u_7 < 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7,$$
$$\&c.\ldots;$$

et par suite, la somme des termes de la série (2), pris en tel nombre que l'on voudra, sera inférieure à

$$u_0 + 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + \&c.\ldots = 2s - u_0.$$

Il en résulte que la série (2) sera convergente.

Supposons, en second lieu, la série (1) divergente. La somme de ses termes pris en très-grand nombre finira par surpasser toute limite assignable : et, comme on aura

$$u_0 = u_0,$$
$$2u_1 > u_1 + u_2,$$
$$4u_3 > u_3 + u_4 + u_5 + u_6,$$
$$8u_7 > u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14},$$
$$\&c.\ldots,$$

on devra conclure que la somme des quantités

$$u_0, \quad 2u_1, \quad 4u_3, \quad 8u_7, \quad \&c.\ldots$$

prises en très-grand nombre finit elle-même par devenir supérieure à toute quantité donnée. La série (2) sera donc alors divergente, conformément au théorème énoncé.

COROLLAIRE. Si pour la série (1) on prend la suivante

$$(3) \qquad 1,\ \frac{1}{2^\mu},\ \frac{1}{3^\mu},\ \frac{1}{4^\mu},\ \&c.\ldots,$$

μ désignant une quantité quelconque, la série (2) deviendra

$$1,\ 2^{1-\mu},\ 4^{1-\mu},\ 8^{1-\mu},\ \&c.\ldots.$$

Cette dernière est une progression géométrique, convergente lorsqu'on suppose $\mu > 1$, et divergente dans le cas contraire. Par suite, la série (3) sera elle-même convergente, si μ est un nombre supérieur à l'unité; et divergente, si l'on a $\mu = 1$ ou $\mu < 1$. Par exemple, des trois séries

$$(4) \qquad 1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ \frac{1}{4^2},\ \&c.\ldots,$$

$$(5) \qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \&c.\ldots,$$

$$(6) \qquad 1,\ \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}},\ \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}},\ \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}},\ \&c.\ldots.$$

la première sera convergente, et les deux autres divergentes.

4.^{e} THÉORÈME. *Supposons que l'on désigne par L la caractéristique des logarithmes dans un système quelconque, et que, pour des valeurs croissantes de n, le rapport*

$$\frac{L(u_n)}{L\left(\frac{1}{n}\right)}$$

converge vers une limite finie h. La série (1) *sera convergente, si l'on a* $h > 1$, *et divergente, si l'on a* $h < 1$.

Démonstration. Supposons d'abord $h > 1$, et choisissons à volonté entre les deux quantités 1 et h une troisième quantité a, en sorte qu'on ait

$$h > a > 1.$$

Le rapport $\frac{L(u_n)}{L\left(\frac{1}{n}\right)}$, ou son égal

$$\frac{L\left(\frac{1}{u_n}\right)}{L(n)},$$

finira par être, pour de très-grandes valeurs de n, constamment supérieur à la quantité a. En d'autres termes, n venant à croître au-delà d'une certaine limite, on aura toujours

$$\frac{L\left(\frac{1}{u_n}\right)}{L(n)} > a,$$

ou, ce qui revient au même,

$$L\left(\frac{1}{u_n}\right) > a\,L(n)$$

et par suite,

$$\frac{1}{u_n} > n^a,$$

$$u_n < \frac{1}{n^a}.$$

Il en résulte que les termes de la série (1) finiront par être constamment inférieurs aux termes correspondans de la suivante

$$1\,,\ \frac{1}{2^a}\,,\ \frac{1}{3^a}\,,\ \frac{1}{4^a}\ldots\frac{1}{n^a}\,,\ \frac{1}{(n+1)^a}\,,\ \&c.\ldots;$$

et, comme cette dernière sera convergente (à cause de $a > 1$), on pourra de la remarque précédente conclure *à fortiori* la convergence de la série (1).

Supposons, en second lieu, $h < 1$; et plaçons encore entre les quantités 1 et h une troisième quantité a, en sorte qu'on ait

$$h < a < 1.$$

On finira par avoir constamment, pour de très-grandes valeurs de n,

$$\frac{L\left(\frac{1}{u_n}\right)}{L\,(n)} < a\,,$$

ou, ce qui revient au même,

$$L\left(\frac{1}{u_n}\right) < a\,L\,(n)\,,$$

et par suite

$$\frac{1}{u_n} < n^a\,,$$

$$u_n > \frac{1}{n^a}\,.$$

Il en résulte que les termes de la série (1) finiront par être constamment supérieurs aux termes correspondans de la suivante

$$1\,,\ \frac{1}{2^a}\,,\ \frac{1}{3^a}\,,\ \frac{1}{4^a}\ldots\frac{1}{n^a}\,,\ \frac{1}{(n+1)^a}\,,\ \&c.\ldots;$$

et comme cette dernière sera divergente (à cause de $a < 1$), on pourra de la remarque qu'on vient de faire conclure *à fortiori* la divergence de la série (1).

Étant données deux séries convergentes dont tous les termes sont positifs, on peut, en ajoutant ou multipliant ces mêmes termes, former une nouvelle série dont la somme résulte de l'addition ou de la multiplication des sommes des deux premières. Nous établirons à ce sujet les deux théorèmes suivans :

5.^e THÉORÈME. *Soient*

$$(7)\left\{\begin{array}{l} u_0,\ u_1,\ u_2\ \ldots\ u_n,\ \&c\ldots, \\ v_0,\ v_1,\ v_2\ \ldots\ v_n,\ \&c\ldots, \end{array}\right.$$

deux séries convergentes, qui, uniquement composées de termes positifs, aient respectivement pour sommes s et s' :

$$(8)\qquad u_0+v_0,\ u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ \ldots\ u_n+v_n,\ \&c\ldots$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme $s+s'$.

DÉMONSTRATION. Si l'on fait

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n-1},$$
$$s'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_{n-1};$$

s_n et s'_n convergeront respectivement, pour des valeurs croissantes de n, vers les limites s et s'. Par suite, $s_n+s'_n$, c'est-à-dire, la somme des n premiers termes de la série (8), convergera vers la limite $s+s'$; ce qui suffit pour établir le théorème énoncé.

6.[e] THÉORÈME. *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent,*

$$(9)\left\{\begin{array}{l} u_0 v_0\,,\ \ u_0 v_1 + u_1 v_0\,,\ \ u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0\,,\ \ldots . \\ \ldots\ u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0\,,\ \&c\ldots \end{array}\right.$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme $s s'$.

DÉMONSTRATION. Soient toujours s_n, s'_n les sommes des n premiers termes des deux séries (7), et désignons en outre par s''_n la somme des n premiers termes de la série (9). Si l'on représente par m le plus grand nombre entier compris dans $\frac{n-1}{2}$, c'est-à-dire, $\frac{n-1}{2}$ lorsque n est impair, et $\frac{n-2}{2}$ dans le cas contraire, on aura évidemment

$$\begin{array}{rl} & u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \ldots + (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0) \\ & < (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1})\,(v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}) \\ \text{et} & > (u_0 + u_1 + \ldots + u_m)\,(v_0 + v_1 + \ldots + v_m)\,; \end{array}$$

ou, en d'autres termes,

$$\begin{array}{rl} & s''_n < s_n\, s'_n \\ \text{et} & > s_{m+1}\, s'_{m+1}\,. \end{array}$$

Concevons maintenant que l'on fasse croître n au-delà de toute limite. Le nombre

$$m = \frac{n - \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2}$$

croîtra lui-même indéfiniment; et les deux sommes s_n, s_{m+1} convergeront vers la limite s, tandis que

s'_n et s'_{m+1} convergeront vers la limite s'. Par suite, les deux produits $s_n s'_n$, $s_{m+1} s'_{m+1}$, et la somme s''_n comprise entre ces deux produits, convergeront vers la limite ss' : ce qui suffit pour établir le théorème 6.e

---

§. 3.e *Des Séries qui renferment des termes positifs et des termes négatifs.*

Supposons que la série

(1) $\qquad u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots . u_n,$ &c....

se compose de termes, tantôt positifs, tantôt négatifs : et soient respectivement

(2) $\qquad \rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2 \ldots . \rho_n,$ &c....

les valeurs numériques de ces mêmes termes, en sorte qu'on ait

$u_0 = \pm\rho_0,\ u_1 = \pm\rho_1,\ u_2 = \pm\rho_2, \ldots u_n = \pm\rho_n,$ &c...

La valeur numérique de la somme

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

ne pouvant jamais surpasser

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots . + \rho_{n-1},$$

il en resulte que la convergence de la série (2) entraînera toujours celle de la série (1). On doit ajouter que la série (1) sera divergente, si quelques termes de la série (2) finissent par croître au-delà de toute limite assignable. Ce dernier cas se présente lorsque les plus grandes valeurs de $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$ convergent, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite supérieure à l'unité. Au contraire, lorsque cette limite devient inférieure à l'unité, la série (2) est toujours convergente. On peut, en conséquence, énoncer le théorème suivant :

1.^{er} THÉORÈME. *Soit ρ_n la valeur numérique du terme général u_n de la série* (1); *et désignons par k la limite vers laquelle convergent, tandis que n croît indéfiniment, les plus grandes valeurs de l'expression $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$. La série* (1) *sera convergente, si l'on a $k<1$, et divergente, si l'on a $k>1$.*

Lorsque la fraction $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$, c'est-à-dire, la valeur numérique du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, convergera vers une limite fixe, cette limite sera, en vertu du 4.^{e} theorème [chap. II, §. 3.^{e}], la valeur cherchée de k. Cette remarque conduit à la proposition que je vais écrire.

2.^{e} THÉORÈME. *Si, pour des valeurs croissantes de n, la valeur numérique du rapport*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

converge vers une limite fixe k, la série (1) *sera convergente, toutes les fois que l'on aura $k<1$, et divergente, toutes les fois que l'on aura $k>1$.*

Par exemple, si l'on considère la série

$$1,\ -\frac{1}{1},\ +\frac{1}{1.2},\ -\frac{1}{1.2.3},\ +\&c\ldots,$$

on trouvera

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{1}{n+1},\quad k = \frac{1}{\infty} = 0\,;$$

d'où il résulte que la série sera convergente.

Le premier des deux théorèmes qu'on vient d'établir ne laisse d'incertitude sur la convergence ou la divergence d'une série que dans le cas particulier où la quantité représentée par k devient égale à l'unité. Dans ce cas particulier, on peut quelquefois constater la convergence de la série proposée, soit en s'assurant que les valeurs numériques de ses différens termes forment une série convergente, soit en ayant égard au théorème suivant.

3.e THÉORÈME. *Si dans la série* (1) *la valeur numérique du terme général u_n décroît constamment et indéfiniment, pour des valeurs croissantes de n, si de plus les différens termes sont alternativement positifs et négatifs, la série sera convergente.*

Considérons, par exemple, la série

$$(3)\quad 1,\ -\frac{1}{2},\ +\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ +\&c.\ldots \pm\frac{1}{n},\ \mp\frac{1}{n+1},\ \&c.$$

La somme des termes dont le rang surpasse n, si on les suppose pris en nombre égal à m, sera

$$\pm\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\&c.\ldots\pm\frac{1}{n+m}\right).$$

Or la valeur numérique de cette somme, savoir,

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\&c.\ldots\pm\frac{1}{n+m}$$
$$=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)-\&c.\ldots.$$
$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)+\&c.\ldots,$$

étant évidemment comprise entre

$$\frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2},$$

décroîtra indéfiniment pour des valeurs croissantes de n, quel que soit m, ce qui suffit pour établir la convergence de la série proposée. Les mêmes raisonnemens peuvent évidemment s'appliquer à toutes les séries de ce genre. Je citerai, entre autres, la suivante,

$$(4) \qquad 1,\ -\frac{1}{2^\mu},\ +\frac{1}{3^\mu},\ -\frac{1}{4^\mu},\ \&c.\ldots,$$

laquelle, en vertu du théorème 3.^{e}, restera convergente pour toutes les valeurs positives de μ.

Si dans la série (4) on supprime le signe — devant chacun des termes de rang pair, on obtiendra la série (3) du §. 2.^{e}, qui est divergente toutes les fois que l'on suppose $\mu=1$ ou $\mu<1$. Par suite, pour transformer une série convergente en série divergente, ou réciproquement, il suffit quelquefois de changer les signes de certains termes. Au reste, cette remarque est uniquement applicable aux séries pour lesquelles la quantité désignée par k dans le 2.^{e} théorème se réduit à l'unité.

Étant donnée une série convergente dont tous les termes sont positifs, on ne peut qu'augmenter la convergence en diminuant les valeurs numériques de ces mêmes termes, et changeant les signes de quelques-uns. Il est bon d'observer qu'on produira ce double effet, si l'on multiplie chaque terme par un sinus ou par un cosinus; et cette observation suffit pour établir la proposition suivante.

4.e THÉORÈME. *Lorsque la série*

$$(2) \qquad \rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \ldots\ \rho_n,\ \&c.\ldots,$$

uniquement formée de termes positifs, est convergente, chacune des suivantes

$$(5)\begin{cases} \rho_0 \cos.\theta_0,\ \rho_1 \cos.\theta_1,\ \rho_2 \cos.\theta_2,\ \ldots\ \rho_n \cos.\theta_n,\ \&c.\ldots, \\ \rho_0 \sin.\theta_0,\ \rho_1 \sin.\theta_1,\ \rho_2 \sin.\theta_2,\ \ldots\ \rho_n \sin.\theta_n,\ \&c.\ldots \end{cases}$$

l'est pareillement, quelles que soient les valeurs des arcs $\theta_0,\ \theta_1,\ \theta_2\ \ldots\ \theta_n$, &c....

COROLLAIRE. Si l'on suppose généralement

$$\theta_n = n\theta,$$

θ désignant un arc quelconque, les séries (5) deviendront respectivement

$$(6)\begin{cases} \rho_0,\ \rho_1 \cos.\theta,\ \rho_2 \cos.2\theta,\ \ldots\ \rho_n \cos.n\theta,\ \&c.\ldots, \\ \qquad \rho_1 \sin.\theta,\ \rho_2 \sin.2\theta,\ \ldots\ \rho_n \sin.n\theta,\ \&c.\ldots.. \end{cases}$$

Ces deux dernières seront donc toujours convergentes en même temps que la série (2).

Si l'on considère à-la-fois deux séries dont chacune renferme des termes positifs et des termes négatifs, on démontrera facilement à leur égard les théorèmes 5.e et 6.e du second paragraphe, ainsi qu'on va le faire voir.

5.e THÉORÈME. *Soient*

$$(7)\left\{\begin{array}{l} u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots.\ u_n,\ \&c.\ldots, \\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots.\ v_n,\ \&c.\ldots, \end{array}\right.$$

deux séries convergentes qui aient respectivement pour sommes s *et* s' *;*

$$(8)\quad u_0+v_0,\ u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ \ldots u_n+v_n,\ \&c.\ldots$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme $s+s'$.

DÉMONSTRATION. Si l'on fait

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1},$$
$$s'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1};$$

s_n et s'_n convergeront respectivement, pour des valeurs croissantes de n, vers les limites s et s'. Par suite, $s_n+s'_n$, c'est-à-dire, la somme des n premiers termes de la série (8) convergera vers la limite $s+s'$; ce qui suffit pour établir le théorème énoncé.

6.e THÉORÈME. *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si chacune des séries* (7) *reste convergente, lorsqu'on réduit ses différens termes à leurs valeurs numériques,*

$$(9)\left\{\begin{array}{l} u_0v_0,\ u_0v_1+u_1v_0,\ u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0,\ \ldots. \\ \ldots\ u_0v_n+u_1v_{n-1}+\ \ldots\ +u_{n-1}v_1+u_nv_0,\ \&c.\ldots \end{array}\right.$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme ss'.

Démonstration. Soient toujours s_n, s'_n les sommes des n premiers termes des deux séries (7), et désignons en outre par s''_n la somme des n premiers termes de la série (9). On trouvera

$$s_n s'_n - s''_n = u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + \dots$$
$$\dots\dots + (u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \dots + u_2 v_{n-2} + u_1 v_{n-1}).$$

De plus, le théorème 6.e ayant été démontré dans le second paragraphe pour le cas où les séries (7) ne renferment que des termes positifs, il en résulte que dans cette hypothèse chacune des quantités $s_n s'_n$, s''_n converge, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite ss', et, par suite, la différence $s_n s'_n - s''_n$, ou, ce qui revient au même, la somme

$$u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + \dots\dots\dots$$
$$\dots + (u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \dots\dots + u_2 v_{n-2} + u_1 v_{n-1})$$

vers la limite zéro.

Concevons maintenant que, les termes des séries (7) étant les uns positifs et les autres négatifs, on désigne respectivement par

$$(10) \begin{cases} \rho_0, \ \rho_1, \ \rho_2, \ \dots \ \rho_n, \ \&c. \dots, \\ \rho'_0, \ \rho'_1, \ \rho'_2, \ \dots \ \rho'_n, \ \&c. \dots, \end{cases}$$

les valeurs numériques de ces différens termes. Supposons de plus, conformément à l'énoncé du théorème, que les séries (10), composées de ces mêmes valeurs numériques, soient toutes deux convergentes. En vertu de la remarque qu'on vient de faire, la somme

$$\rho_{n-1}\rho'_{n-1} + (\rho_{n-1}\rho'_{n-2} + \rho_{n-2}\rho'_{n-1}) + \ldots\ldots$$
$$\ldots + (\rho_{n-1}\rho'_1 + \rho_{n-2}\rho'_2 + \ldots + \rho_2\rho'_{n-2} + \rho_1\rho'_{n-1})$$

convergera, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite zéro : et, comme la valeur numérique de cette somme sera évidemment supérieure à celle de la suivante

$$u_{n-1}v_{n-1} + (u_{n-1}v_{n-2} + u_{n-2}v_{n-1}) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + \ldots\ldots + u_2v_{n-2} + u_1v_{n-1}),$$

il en résulte que cette dernière, ou, ce qui revient au même, la différence $s_n s'_n - s''_n$ convergera elle-même vers la limite zéro. Par suite, ss', qui est la limite du produit $s_n s'_n$, sera encore celle de s''_n. En d'autres termes, la série (9) sera convergente, et aura pour somme le produit ss'.

Scholie. Le théorème précédent pourrait ne plus subsister, si les séries (7), supposées convergentes, cessaient de l'être après la réduction de chaque terme à sa valeur numérique. Concevons, par exemple, que pour chacune des séries (7) on prenne la suivante

$$(11) \quad 1,\ -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}},\ +\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}},\ -\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}},\ +\frac{1}{5^{\frac{1}{2}}},\ -\ \&c\ldots$$

La série (9) deviendra

$$(12)\left\{\begin{array}{l} 1,\ -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ +\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2.2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ \quad -\left(\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3.2}}+\frac{1}{\sqrt{2.3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\right),\ +\ \&c.... \end{array}\right.$$

Cette dernière est divergente. Car son terme général, savoir,

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{(n-1)2}}+\frac{1}{\sqrt{(n-2)3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

a une valeur numérique évidemment supérieure à

$$\frac{n}{\left\{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}=\left\{\frac{4n}{n+2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

lorsque n est pair, et à

$$\frac{n}{\left\{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{2n}{n+1},$$

lorsque n est impair; c'est-à-dire, dans tous les cas possibles, une valeur numérique supérieure à l'unité. Cependant la série (11) est convergente. Mais on doit observer qu'elle cesse de l'être, lorsqu'on réduit chaque terme à sa valeur numérique, puisqu'elle se change alors en la série (6) du §. 2.^{e}

---

§. 4.^{e} *Des Séries ordonnées suivant les Puissances ascendantes et entières d'une variable.*

Soit

$$(1)\qquad a_0,\ a_1x,\ a_2x^2,\ \ldots\ a_nx^n,\ \&c\ldots$$

une série ordonnée suivant les puissances entières et ascendantes de la variable x,

$$(2) \qquad a_0, \quad a_1, \quad a_2, \ldots . \; a_n, \; \&c. \ldots$$

désignant des coefficiens constans positifs ou négatifs. Soit de plus A ce que devient pour la série (2) la quantité k du paragraphe précédent [voy. le §. 3, 2.e théorème]. La même quantité, calculée pour la série (1), sera équivalente à la valeur numérique du produit

$$A x.$$

Par suite, la série (1) sera convergente, si cette valeur numérique est inférieure à l'unité, c'est-à-dire, en d'autres termes, si la valeur numérique de la variable x est inférieure à $\frac{1}{A}$. Au contraire, la série (1) sera divergente, si la valeur numérique de x surpasse $\frac{1}{A}$. On peut donc énoncer la proposition suivante.

1.er THÉORÈME. *Soit A la limite vers laquelle converge, pour des valeurs croissantes de n, la racine n.me des plus grandes valeurs numériques de a_n. La série (1) sera convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites*

$$x = -\frac{1}{A}, \quad x = +\frac{1}{A},$$

et divergente pour toutes les valeurs de x situées hors des mêmes limites.

Lorsque la valeur numérique du rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

converge vers une limite fixe, cette limite est [en vertu du 4.^{e} théorème, chapitre II, §. 3] la valeur cherchée de A. Cette remarque conduit à une nouvelle proposition que je vais écrire.

2.^{e} THÉORÈME. *Si, pour des valeurs croissantes de n, la valeur numérique du rapport*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

converge vers la limite A, la série (1) sera convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites

$$-\frac{1}{A}, \quad +\frac{1}{A},$$

et divergente pour toutes les valeurs de x situées hors des mêmes limites.

COROLLAIRE 1.^{er} Prenons pour exemple la série

$$(3) \qquad 1,\ 2x,\ 3x^2,\ 4x^3,\ \ldots (n+1)x^n,\ \&c\ldots$$

Comme on trouvera dans cette hypothèse

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

et par suite,

$$A = 1,$$

on en conclura que la série (3) est convergente pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites

$$x = -1, \quad x = +1,$$

et divergente pour les valeurs de x situées hors de ces limites.

Corollaire 2.^{e} Prenons pour second exemple la série

$$(4) \qquad \frac{x}{1},\ \frac{x^2}{2},\ \frac{x^3}{3},\ \ldots\ \frac{x^n}{n},\ \&c.\ldots$$

dans laquelle le terme constant est censé réduit à zéro. On trouvera dans cette hypothèse

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

et par suite $A = 1$. La série (4) sera donc encore convergente ou divergente, suivant que la valeur numérique de x sera inférieure ou supérieure à l'unité.

Corollaire 3.^{e} Si pour la série (1) on prend la suivante,

$$(5)\left\{\begin{array}{l} 1,\ \frac{\mu}{1}x,\ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2,\ \ldots\ldots. \\ \ldots\ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}x^n,\ \&c\ldots, \end{array}\right.$$

μ désignant une quantité quelconque, on trouvera

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\mu-n}{n+1} = -\frac{1-\frac{\mu}{n}}{1+\frac{1}{n}},$$

et par suite,

$$A = lim.\ \frac{1-\frac{\mu}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = 1.$$

On en conclura que la série (5) est, comme les séries (3) et (4), convergente ou divergente, suivant que l'on attribue à la variable x une valeur numérique inférieure ou supérieure à l'unité.

Corollaire 4.e Considérons encore la série

$$(6) \qquad 1,\ \frac{x}{1},\ \frac{x^2}{1.2},\ \frac{x^3}{1.2.3},\ldots \frac{x^n}{1.2.3\ldots n},\ \&c\ldots$$

Comme on aura dans ce cas

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{n+1},$$

et par suite,

$$A=\frac{1}{\infty}=0,$$

on en conclura que la série est convergente entre les limites

$$x=-\frac{1}{0}=-\infty,\quad x=+\frac{1}{0}=+\infty,$$

c'est-à-dire, pour toutes les valeurs réelles possibles de la variable x.

Corollaire 5.e Considérons enfin la série

$$(7) \qquad 1,\ 1.x,\ 1.2.x^2,\ 1.2.3.x^3,\ldots\ 1.2.3\ldots n.x^n,\ \&c\ldots$$

En lui appliquant le théorème 2.e, on trouvera

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=n+1,\quad A=\infty;$$

et l'on aura par suite,

$$\frac{1}{A}=0.$$

On en conclura que la série (7) est toujours divergente, excepté lorsqu'on suppose $x=0$, auquel cas, elle se réduit à son premier terme 1.

En examinant les résultats qu'on vient d'obtenir, on reconnaît immédiatement que, parmi les séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x, les unes sont tantôt convergentes, tantôt divergentes, selon la valeur attribuée à cette variable, tandis que d'autres restent toujours convergentes, quel que soit x, et d'autres toujours divergentes, excepté pour $x = 0$. On peut ajouter que le théorème 1.^{er} ne laisse d'incertitude sur la convergence d'une semblable série que dans le cas où la valeur numérique de x devient égale à la constante positive représentée par $\frac{1}{A}$, c'est-à-dire, lorsqu'on suppose

$$x = \pm \frac{1}{A}.$$

Dans ce cas particulier, la série est tantôt convergente, tantôt divergente, et la convergence dépend quelquefois du signe de la variable x. Par exemple, si dans la série (4), pour laquelle $A = 1$, on fait successivement

$$x = 1, \quad x = -1,$$

on obtiendra les deux suivantes

$$(8) \qquad 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \ldots \frac{1}{n}, \ \&c\ldots.$$

$$(9) \qquad -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{4}, \ldots \pm \frac{1}{n}, \ \&c\ldots,$$

dont la première est divergente [voyez dans le §. 2 le corollaire du 3.^{e} théorème], et la seconde convergente, ainsi que cela résulte du 3.^{e} théorème [§. 3].

Il est encore essentiel de remarquer que par suite du premier théorème, lorsqu'une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières d'une variable x sera convergente pour une valeur numérique de x différente de zéro, elle restera convergente, si l'on vient à diminuer cette valeur numérique, ou même à la faire décroître indéfiniment.

Lorsque deux séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x sont convergentes pour une même valeur de la variable, on peut leur appliquer les théorèmes 5 et 6 du §. 3. Cette remarque suffit pour établir les deux propositions que je vais énoncer.

3.^{e} THÉORÈME. *Supposons que les deux séries*

$$(10)\left\{\begin{array}{l} a_0,\ a_1 x,\ a_2 x^2,\ \ldots a_n x^n,\ \&c\ldots, \\ b_0,\ b_1 x,\ b_2 x^2,\ \ldots b_n x^n,\ \&c\ldots, \end{array}\right.$$

étant à-la-fois convergentes, lorsqu'on attribue à la variable x une certaine valeur, aient alors pour sommes respectives s et s';

$$(11)\quad a_0+b_0,\ (a_1+b_1)x,\ (a_2+b_2)x^2, \ldots (a_n+b_n)x^n,\ \&c..$$

sera, dans le même cas, une nouvelle série convergente, qui aura pour somme $s+s'$.

COROLLAIRE. On étendra facilement ce théorème à tant de séries que l'on voudra. Par exemple, si les trois séries

$$a_0,\quad a_1 x,\quad a_2 x^2,\quad \&c.\ldots,$$
$$b_0,\quad b_1 x,\quad b_2 x^2,\quad \&c.\ldots,$$
$$c_0,\quad c_1 x,\quad c_2 x^2,\quad \&c.\ldots,$$

sont convergentes pour une même valeur attribuée à la variable x, et que l'on désigne par s, s', s'' leurs sommes respectives,

$$a_0+b_0+c_0,\ (a_1+b_1+c_1)x,\ (a_2+b_2+c_2)x^2,\ \&c\ldots$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme $s+s'+s''$.

4.e Théorème. *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si de plus chacune des séries* (10) *reste convergente, lorsqu'on réduit ses différens termes à leurs valeurs numériques,*

$$(12)\left\{\begin{array}{l} a_0 b_0,\ (a_0 b_1+a_1 b_0)x,\ (a_0 b_2+a_1 b_1+a_2 b_0)x^2,\ \ldots \\ \ldots\ (a_0 b_n+a_1 b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_n b_0)x^n,\ \&c\ldots \end{array}\right.$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme ss'.

Corollaire I.er Le théorème précédent se trouve compris dans la formule

$$(13)\left\{\begin{array}{l} (a_0+a_1x+a_2x^2+\&c\ldots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\&c\ldots) \\ =a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\&c\ldots \end{array}\right.$$

qui subsiste dans le cas où chacune des séries (10) reste convergente lors même qu'on réduit ses différens termes à leurs valeurs numériques, et qui sert à développer dans cette hypothèse le produit des sommes des deux séries en une nouvelle série de même forme.

Corollaire 2.e En répétant plusieurs fois de suite l'opération indiquée par l'équation (13), on pourrait multiplier entre elles les sommes de trois ou d'un plus grand nombre de séries semblables aux séries (10), et dont chacune resterait convergente après la réduction de ses différens termes à leurs valeurs numériques. Le produit obtenu serait la somme d'une nouvelle série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Corollaire 3.e Si dans les deux corollaires précédens on suppose que toutes les séries dont on multiplie les sommes deviennent égales, on obtiendra pour produit une puissance entière de la somme de chacune d'elles; et cette puissance se trouvera encore représentée par la somme d'une série du même genre. Par exemple, si dans l'équation (13) on fait $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, &c..., on en tirera

$$(14)\left\{\begin{array}{l}(a_0+a_1x+a_2x^2+\&c.\ldots.)^2\\ =a_0^2+2a_0a_1x+(2a_0a_2+a_1^2)x^2+\&c.\ldots\end{array}\right.$$

Corollaire 4.e Si l'on prend pour termes généraux des séries (10)

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots.n}x^n,$$

et $$\frac{\mu'(\mu'-1)(\mu'-2)\ldots(\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots.n}x^n,$$

μ, μ' désignant deux quantités quelconques, et la variable x étant renfermée entre les limites $x = -1$, $x = +1$, chacune des séries (10) restera convergente même lorsqu'on réduira ses différens termes à leurs valeurs numériques, et le terme général de la série (12) deviendra

$$\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n} + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}.\frac{\mu'}{1} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{\mu}{1}.\frac{\mu'(\mu'-2)\ldots(\mu'-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{\mu'(\mu'-1)\ldots(\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots n}\right]x^n$$
$$= \frac{(\mu+\mu')(\mu+\mu'-1)(\mu+\mu'-2)\ldots(\mu+\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}x^n.$$

Cela posé, si l'on appelle $\phi(\mu)$ la somme de la première des séries (10) dans l'hypothèse que l'on vient de faire, c'est-à-dire, si l'on pose

$$(15) \qquad \phi(\mu) = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \&c\ldots,$$

les sommes des séries (10) et (12) seront respectivement désignées, dans la même hypothèse, par $\phi(\mu)$, $\phi(\mu')$ et $\phi(\mu+\mu')$; en sorte que l'équation (13) deviendra

$$(16) \qquad \phi(\mu).\phi(\mu') = \phi(\mu+\mu').$$

Lorsque dans l'équation (13) on remplace la somme de la série

$$b_0, \quad b_1 x, \quad b_2 x^2, \quad \&c.\ldots.$$

par un polynome composé d'un nombre fini de termes, on obtient une formule qui ne cesse jamais d'être exacte, tant que la série

$$a_0\,,\quad a_1 x\,,\quad a_2 x^2\,,\ \&c.\dots.$$

demeure convergente. C'est ce que nous allons prouver directement, en établissant le théorème qui suit.

5.^{e} THÉORÈME. *Si, la série* (1) *étant convergente, on multiplie la somme de cette série par le polynome*

$$(17)\qquad k x^m + l x^{m-1} + \&c.\dots + p x + q\,,$$

dans lequel m *désigne un nombre entier, on obtiendra pour produit la somme d'une nouvelle série convergente de même forme, dont le terme général sera*

$$(q a_n + p a_{n-1} + \dots\ l a_{n-m+1} + k a_{n-m}) x^m\,,$$

pourvu que l'on considère comme nulles dans les premiers termes celles des quantités

$$a_{n-1}\,,\quad a_{n-2}\,\dots.\ a_{n-m+1}\,,\quad a_{n-m}\,,$$

qui se trouveront affectées d'indices négatifs : en d'autres termes, on aura

$$(18)\left\{\begin{array}{l}(k x^m + l x^{m-1} + \dots + p x + q) \times (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \&c.\dots)\\ = q a_0 + (q a_1 + p a_0) x + \dots + (q a_m + p a_{m-1} + \dots + l a_1 + k a_0) x^m\\ + \&c.\dots.\\ + (q a_n + p a_{n-1} + \dots + l a_{n-m+1} + k a_{n-m}) x^n + \&c.\dots.\end{array}\right.$$

Démonstration. Pour multiplier la somme de la série (1) par le polynome (17), il suffira de la multiplier successivement par les différens termes de ce polynome. On aura donc

$$(kx^m + lx^{m-1} + \ldots + px + q)\ (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \&c\ldots)$$
$$= q\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \&c\ldots) + px\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \&c\ldots)$$
$$+ \&c\ldots.$$
$$+ lx^{m-1}\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) + kx^m\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \&c\ldots)$$

Comme on a de plus, pour des valeurs entières quelconques de n,

$$q\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_{n-1}x^{n-1})$$
$$= qa_0 + qa_1x + qa_2x^2 + \ldots\ldots + qa_{n-1}x^{n-1},$$

on en conclura, en faisant croître n indéfiniment, et passant aux limites,

$$q\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \&c\ldots\ldots) = qa_0 + qa_1x + qa_2x^2 + \&c\ldots.$$

On trouvera de même

$$px\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \&c\ldots.) = pa_0x + pa_1x^2 + pa_2x^3 + \&c\ldots,$$
$$\&c\ldots.$$
$$lx^{m-1}\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \&c\ldots) = la_0x^{m-1} + la_1x^m + la_2x^{m+1} + \&c\ldots,$$
$$kx^m\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \&c\ldots\ldots) = ka_0x^m + ka_1x^{m+1} + ka_2x^{m+2} + \&c\ldots$$

Si l'on ajoute ces dernières équations, et qu'en formant la somme des seconds membres on réunisse les coefficiens des puissances semblables de la variable x, on obtiendra précisément la formule (18).

Concevons maintenant que dans la série (1) on fasse varier la valeur de x par degrés insensibles.

Tant que la série restera convergente, c'est-à-dire, tant que la valeur de x demeurera comprise entre les limites

$$-\frac{1}{A},\ +\frac{1}{A},$$

la somme de la série sera [en vertu du 1.er théorème, §. 1] une fonction continue de la variable x. Soit $\varphi(x)$ cette fonction continue. L'équation

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \&c.....$$

subsistera pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $-\frac{1}{A}$, $+\frac{1}{A}$; ce que nous indiquerons, en écrivant ces limites à côté de la série, comme on le voit ici

$$(19)\qquad \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \&c... \left\{\begin{matrix} x = -\frac{1}{A} \\ x = +\frac{1}{A} \end{matrix}\right\}.$$

Lorsque la série est supposée connue, on peut quelquefois en déduire la valeur de la fonction $\varphi(x)$ sous forme finie; et c'est-là ce qu'on appelle *sommer* la série. Mais le plus souvent la fonction $\varphi(x)$ est donnée, et l'on se propose de revenir de cette fonction à la série, ou, en d'autres termes, de *développer* la fonction en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x. Il est facile d'établir à ce sujet la proposition que je vais énoncer.

6.e THÉORÈME. *Une fonction continue de la variable x ne peut être développée que d'une seule manière en série convergente ordonnée suivant les* *puissances ascendantes et entières de cette variable.*

Démonstration. En effet, supposons qu'on ait développé par deux méthodes différentes la fonction $\varphi(x)$; et soient

$$a_0\,,\quad a_1 x\,,\quad a_2 x^2 \ldots a_n x^n\,,\quad \&c\ldots,$$
$$b_0\,,\quad b_1 x\,,\quad b_2 x^2 \ldots b_n x^n\,,\quad \&c\ldots,$$

les deux développemens, c'est-à-dire, deux séries dont chacune, étant convergente pour des valeurs de x différentes de zéro, ait pour somme, tant qu'elle demeure convergente, la fonction $\varphi(x)$. Ces deux séries étant constamment convergentes pour de très-petites valeurs numériques de x, on aura, pour de semblables valeurs,

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\&c\ldots = b_0+b_1x+b_2x^2+\&c\ldots$$

Comme, en faisant évanouir x, on tire de l'équation précédente

$$a_0 = b_0\,,$$

il en résulte qu'on peut la réduire généralement à

$$a_1x+a_2x^2+\&c\ldots = b_1x+b_2x^2+\&c\ldots,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$x(a_1+a_2x+\&c\ldots) = x(b_1+b_2x+\&c\ldots).$$

Si l'on multiplie par $\frac{1}{x}$ les deux membres de cette dernière équation, on obtiendra la suivante

$$a_1+a_2x+\&c\ldots = b_1+b_2x+\&c\ldots,$$

qui devra encore subsister pour de très-petites valeurs numériques de la variable x, et de laquelle on conclura, en posant $x = 0$,

$$a_1 = b_1.$$

En continuant de même, on ferait voir que les constantes a_0, a_1, a_2, &c... sont respectivement égales aux constantes b_0, b_1, b_2, &c... ; d'où il suit que les deux développemens de la fonction $\phi(x)$ sont identiques.

Le calcul différentiel fournit des méthodes très-expéditives pour développer les fonctions en séries. Nous exposerons plus tard ces méthodes ; et nous nous bornerons pour l'instant à faire connaître, avec le développement de la fonction $(1 + x)^\mu$, dans laquelle μ désigne une quantité quelconque, deux autres développemens que l'on ramène facilement au premier, savoir, ceux des fonctions

$$A^x \text{ et } L(1 + x),$$

A désignant une constante positive, et L la caractéristique des logarithmes dans un système choisi à volonté. En conséquence, nous allons résoudre l'un après l'autre les trois problèmes qui suivent.

1.er PROBLÈME. *Développer, lorsque cela se peut, la fonction*

$$(1 + x)^\mu$$

en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Solution. Si d'abord on suppose $\mu = m$, m désignant un nombre entier quelconque, on aura, par la formule de *Newton*,

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x + \&c....$$

La série dont la somme constitue le second membre de cette formule est toujours composée d'un nombre fini de termes : mais, si l'on y remplace le nombre entier m par une quantité quelconque μ, la nouvelle série que l'on obtiendra, savoir,

$$(5) \qquad 1, \quad \frac{\mu}{1}x, \quad \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2, \quad \&c.....$$

se trouvera composée en général d'un nombre indéfini de termes, et sera convergente seulement pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité. Soit, dans cette hypothèse, $\phi(\mu)$ la somme de la nouvelle série; en sorte qu'on ait

$$(15) \quad \phi(\mu) = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \&c... \left\{\begin{matrix} x=-1 \\ x=+1 \end{matrix}\right\}.$$

En vertu du 1.^{er} théorème [§. 1.^{er}], $\phi(\mu)$ sera fonction continue de la variable μ entre des limites quelconques de cette variable, et l'on aura [voyez le 3.^{e} théorème, corollaire 4]

$$(16) \qquad \phi(\mu).\phi(\mu') = \phi(\mu+\mu').$$

Cette dernière équation, étant entièrement semblable à l'équation (2) du chapitre V [§. 1.^{er}], se résoudra de la même manière ; et l'on en conclura

$$\phi(\mu) = [\phi(1)]^{\mu} = (1+x)^{\mu}.$$

La valeur de $\phi(\mu)$ étant ainsi déterminée, si on la substitue dans la formule (15), on trouvera, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x = -1$, $x = +1$,

$$(20)\quad (1+x)^{\mu} = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \&c\ldots \left\{\begin{matrix} x=-1 \\ x=+1 \end{matrix}\right\}.$$

Lorsque la valeur numérique de x devient supérieure à l'unité, la série (5), n'étant plus convergente, cesse d'avoir une somme; en sorte que l'équation (20) ne subsiste plus. Dans la même hypothèse, il devient impossible, ainsi qu'on le prouvera plus tard à l'aide du calcul infinitésimal, de développer la fonction $(1+x)^{\mu}$ en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

COROLLAIRE I.er Si dans l'équation (20) on remplace μ par $\frac{1}{\alpha}$, et x par $\alpha.x$, α désignant une quantité infiniment petite, on aura pour toutes les valeurs de $\alpha.x$ renfermées entre les limites -1, $+1$, ou, ce qui revient au même, pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $-\frac{1}{\alpha}$, $+\frac{1}{\alpha}$,

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2}(1-\alpha)\frac{x^3}{1.2.3}(1-\alpha)(1-2\alpha) + \&c.\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{matrix} x=-\frac{1}{\alpha} \\ x=+\frac{1}{\alpha} \end{matrix}\right\}.$$

Cette dernière équation devant subsister, quelque petite que soit la valeur numérique de α, si l'on désigne à l'ordinaire, par l'abréviation *lim.* placée devant une expression qui renferme la variable α, la limite vers laquelle converge cette expression, tandis que la valeur numérique de α décroît indéfiniment, on trouvera, en passant aux limites,

$$(21)\left\{\begin{array}{l} \lim.\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\&c\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} x=-\infty \\ x=+\infty \end{array}\right\}. \end{array}\right.$$

Il reste à chercher la limite de $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$. Or, en premier lieu, on tirera de la formule précédente

$$\lim.\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\&c\ldots,$$

ou, en d'autres termes,

$$(22)\qquad \lim.\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e,$$

e désignant la base des logarithmes népériens [voy. le §. 1.^{er}, équation (6)]. On en conclura immédiatement

$$\lim.\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}=e,$$

et par suite

$$\lim.\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim.\left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^x=e^x.$$

Si maintenant on remet la valeur de $\lim.\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'équation (21), on obtiendra la suivante

$$(23)\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \&c\ldots \left\{\begin{matrix} x=-\infty \\ x=+\infty \end{matrix}\right\}.$$

On pourrait arriver directement à l'équation (23), en observant que la série

$$(6)\qquad 1,\ \frac{x}{1},\ \frac{x^2}{1.2},\ \frac{x^3}{1.2.3},\ \&c\ldots\ldots$$

est convergente pour toutes les valeurs possibles de la variable x, et cherchant la fonction de x qui représente la somme de cette même série. En effet, soit $\phi(x)$ la somme de la série (6) qui a pour terme général

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n};$$

$\phi(y)$ sera la somme de la série qui a pour terme général

$$\frac{y^n}{1.2.3\ldots n},$$

et [en vertu du 6.^{e} théorème, §. 3] le produit de ces deux sommes sera la somme d'une nouvelle série qui aura pour terme général

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}.\frac{y}{1} + \ldots + \frac{x}{1}.\frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$+ \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} = \frac{(x+y)^n}{1.2.3\ldots n}.$$

Ce produit sera donc égal à $\phi(x+y)$; et par suite, si l'on fait

$$\phi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \&c\ldots,$$

la fonction $\phi(x)$ vérifiera l'équation

$$\phi(x) \cdot \phi(y) = \phi(x+y).$$

En résolvant cette équation, on en tirera

$$\phi(x) = [\phi(1)]^x = \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \&c...\right)^x;$$

c'est-à-dire,

$$\phi(x) = e^x.$$

Corollaire 2.e Si, après avoir retranché l'unité de chaque membre de l'équation (20), on divise les deux membres par μ, l'équation que l'on obtiendra pourra s'écrire ainsi qu'il suit,

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = x - \frac{x^2}{2}(1-\mu) + \frac{x^3}{3}(1-\mu)(1-\tfrac{1}{2}\mu) - \&c...$$
$$\ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} x = -1 \\ x = +1 \end{matrix} \right\};$$

et, si dans cette dernière on fait converger μ vers la limite zéro, on trouvera, en passant aux limites,

$$(24) \qquad lim. \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \&c....$$

De plus, comme, en désignant par l la caractéristique des logarithmes népériens pris dans le système dont la base est e, on a évidemment

$$1 + x = e^{l(1+x)},$$

$$(1+x)^\mu = e^{\mu l(1+x)} = 1 + \frac{\mu\, l(1+x)}{1} + \frac{\mu^2 [l(1+x)]^2}{1.2} + \&c...,$$

on en conclura

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = l(1+x) + \frac{\mu}{2}[l(1+x)]^2 + \&c....,$$

et par suite

$$(25) \qquad \lim. \frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu} = l(1+x).$$

Cela posé, la formule (24) deviendra

$$(26) \qquad l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \&c... \left\{ \begin{matrix} x = -1 \\ x = +1 \end{matrix} \right\}.$$

L'équation précédente subsiste tant que la valeur numérique de x reste inférieure à l'unité ; et, dans ce cas, la série

$$(27) \qquad x, \; -\frac{x^2}{2}, \; +\frac{x^3}{3}, \; .... \pm \frac{x^n}{n}, \; \&c.....$$

est convergente, aussi bien que la série (4), qui en diffère seulement par les signes des termes de rang impair. Les mêmes séries devenant divergentes, dès qu'on suppose la valeur numérique de x supérieure à l'unité, l'équation (26) cesse d'avoir lieu dans cette hypothèse.

Dans le cas particulier où l'on prend $x = 1$, la série (27) se réduit à la série (3) du troisième paragraphe, laquelle est convergente, comme on l'a fait voir. L'équation (26) doit donc alors subsister; en sorte qu'on a

$$(28) \qquad l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \&c....$$

Si l'on prenait au contraire $x = -1$, la série (27) deviendrait divergente, et n'aurait plus de somme.

On peut remarquer encore que, si, après avoir écrit $-x$ au lieu de x dans la formule (26), on change à-la-fois les signes des deux membres, on obtiendra la suivante

$$(29) \qquad l\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \&c. \ldots \left\{ \begin{matrix} x = -1 \\ x = +1 \end{matrix} \right\}.$$

2.e PROBLÈME. *Développer la fonction*

$$A^x,$$

dans laquelle A désigne un nombre quelconque, en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

SOLUTION. Désignons toujours par la caractéristique l les logarithmes népériens pris dans le système dont la base est e. On aura, d'après la définition même des logarithmes,

$$A = e^{l(A)},$$

et l'on en conclura

$$(30) \qquad A^x = e^{x\,l(A)}.$$

Par suite, en ayant égard à l'équation (23), on trouvera

$$(31) \left\{ \begin{array}{l} A^x = 1 + \dfrac{x\,lA}{1} + \dfrac{x^2\,(lA)^2}{1.2} + \dfrac{x^3\,(lA)^3}{1.2.3} + \&c. \ldots \\ \ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} x = -\infty \\ x = +\infty \end{matrix} \right\}. \end{array} \right.$$

Cette dernière formule subsiste pour toutes les valeurs réelles possibles de la variable x.

3.e PROBLÈME. *La caractéristique L désignant les logarithmes pris dans le système dont la base est A, développer, lorsque cela se peut, la fonction*

$$L(1+x)$$

en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Solution. Désignons toujours par l la caractéristique des logarithmes népériens. On aura, en vertu des propriétés connues des logarithmes,

$$L(1+x) = \frac{L(1+x)}{L(A)} = \frac{l(1+x)}{l(A)};$$

et par suite, en ayant égard à l'équation (26), on trouvera, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites -1, $+1$,

$$(32) \quad L(1+x) = \frac{1}{l(A)}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \&c..\right].\left\{\begin{matrix} x=-1 \\ x=+1 \end{matrix}\right\}.$$

Cette dernière formule subsiste dans le cas même où l'on prend $x = 1$. Mais elle cesse d'avoir lieu, lorsqu'on suppose $x = -1$, ou $x^2 > 1$.