Master de Mathématiques – UPMC (M1)

UE 4MUMA039 : Histoire d'un objet mathématique

(Alexandre Guilbaud et Laurent Mazliak)

Semaine 8

Cauchy et l'Analyse Algébrique

Contexte historique en France :
incidence européenne

-Révolution française (1789-1804)

- 1789 : Assemblée nationale/ Prise de la Bastille

Monarchie constitutionnelle

-1792 : guerre / chute de la monarchie / 1ère République

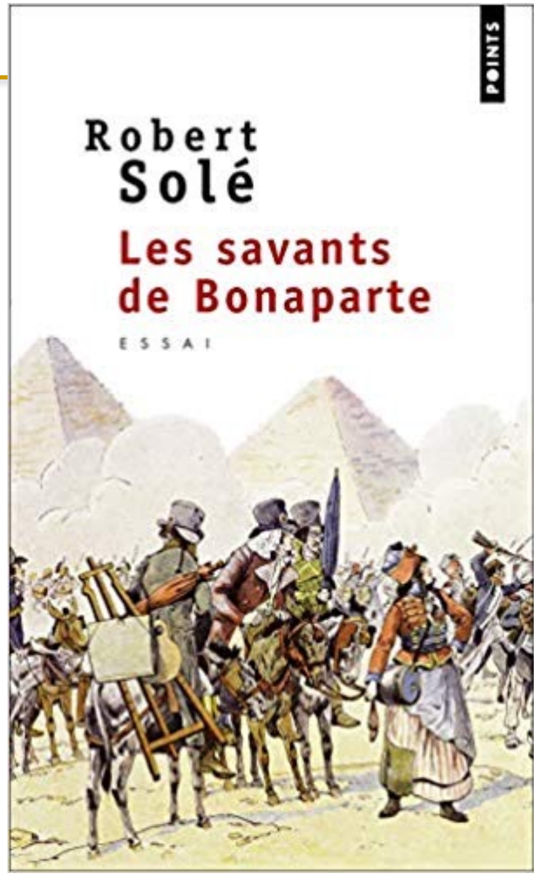
-1793-1794 : Convention montagnarde – Terreur

-Juillet 1794: chute de Robespierre

-1794-1795 : Convention thermidorienne

-La Convention met en place un certain nombre d'institutions :

-1794 : Création du CNAM
-1794 : Création de l'Ecole Normale (Supérieure)
-1795: Création de l'Ecole Polytechnique



-1795-1799 : Directoire

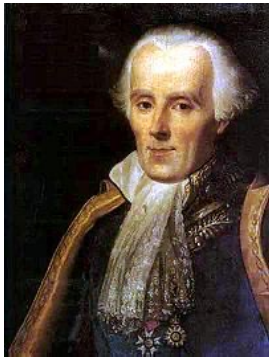
-Expédition d’Egypte : 1798-1799 (Aboukir : août 1798)

https://boutique.arte.tv/detail/bonaparte_campagne_egypte_serie#

18 Brumaire An 8 (9 novembre 1799) : Coup d’état de Bonaparte

-1799-1804: Consulat . Suppression de toute chambre élue et création d’un Sénat conservateur nommé.

-Empire (1804-1814/15)



P-S.Laplace (1749-1827)

Ministre de l'Intérieur (1799)
Sénateur nommé (1799)

G.Monge (1746-1818)

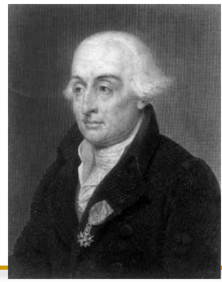
Sénateur nommé en 1799

J.Fourier (1768-1830)

Administrateur civil de l'Egypte (1799)
Préfet de l'Isère (1802)

L.Carnot (1753-1823)

Ministre de la Guerre (1800)
Tribun (1802)



J.L.Lagrange (1736-1813)

Sénateur nommé en 1799

mai 1814 : restauration
février 1815 : Les Cent-Jours

Waterloo : 18 juin 1815 / Restauration

- Monarchie constitutionnelle (1814/15-1830)

Révolution de Juillet 1830 (cf. colonne de Juillet)

- Monarchie de Juillet (1830-1848)

- 2ème République (1848-1852)

I.Cauchy

Naît en 1789

Vient d'un milieu parisien pauvre

Tourmente révolutionnaire traversée péniblement

1800 : père nommé secrétaire du Sénat

Rencontres décisives avec Laplace (sénateur et Ministre de l'intérieur) et Lagrange (sénateur)

1802: Sur les conseils de Lagrange, Cauchy entre à l'Ecole Centrale du Panthéon (actuel lycée Henri IV) pour étudier les langues vivantes, puis après 1804 les mathématiques avec un tuteur privé.
1805 : Candidat à l'Ecole Polytechnique. Classé 2ème.

Suit les cours de Lacroix et Ampère.

1807 : Diplôme de l’Ecole Polytechnique

Entre à l’Ecole des Ponts et Chaussées

Affecté à la construction du canal de l’Ourcq sous la direction de Pierre Girard (un des savants de la Campagne d’Egypte) (ouverture: décembre 1808 / août 1809 : fontaine des Innocents)

1810 : Cauchy à Cherbourg pour l’aménagement du port militaire / parallèlement : étudie Laplace (Mécanique Céleste) et Lagrange (Théorie des fonctions)

Premiers travaux mathématiques (polyèdres): 1811

1815 : Assistant à l’Ecole Polytechnique

Légitimiste et catholique fervent et engagé : aidé après 1815 par la nouvelle situation politique. Remplace Carnot et Monge à l’Académie

« *C’est vraiment une chose curieuse de voir un académicien qui semble remplir les respectables fonctions d’un missionnaire prêchant les païens* »

Relations difficiles avec les autres mathématiciens
Abel, exemple malheureux (1826) : « Cauchy est cinglé, mais actuellement c’est le seul qui sache comment on doit faire des mathématiques »
1817 : nommé au Collège de France. Cours sur l’intégration.

Cours à l’Ecole Royale Polytechnique. Analyse Algébrique (1821)

Discipline scolaire née dans une école, par une école et pour une école (mais peut-être devrait-on dire à l'École Polytechnique, par l'École Polytechnique et pour l'École Polytechnique), la géométrie descriptive permet de passer d'un processus de formation par apprentissage en petits groupes, caractéristique des écoles de l'Ancien Régime, à un enseignement en amphithéâtre, avec des cours magistraux et des exercices pratiques, qui ne s'adressent plus à 20 élèves, mais à 400 élèves. La géométrie descriptive est également issue de méthodes révolutionnaires. Moyen d'enseigner l'espace de manière accélérée par rapport à l'ancienne manière d'enseigner la stéréotomie, langage abstrait, minimal, rapide de l'ordre de la sténographie, la géométrie descriptive permet de répondre à l'urgence de la situation quant à l'éducation d'une élite, ce qui était le cas de la France au moment de la création de l'École Polytechnique. (J.Sakarovitch. *Histoire de la stéréotomie*, 2005).

Formalisation des concepts fondamentaux de l’analyse : convergence, continuité, intégrale…

En fait, Cauchy en forte opposition avec de nombreux collègues (Arago) qui reprochent un cours trop théorique. Le cours enseigné s’écarte du cours imprimé…

(C.Gilain: *Cauchy et le cours d'analyse de l'Ecole polytechnique*, Bulletin de la Sabix, 1989)

Œuvre gigantesque : 789 articles (27 volumes !)

Son « monument » : Etude des fonctions d'une variable complexe :

1825 : Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires
1826 : Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal
1829 : Leçons sur le calcul différentiel
1831 : « Formule de Cauchy » (résidus)

1830 : fuit la France avec Charles X en exil

Enseigne à Turin. Séjour à Prague (contacts avec Bolzano). Retour en 1838: à l'Académie mais pas à l'Ecole Polytechnique car refuse de prêter serment à Louis-Philippe

1843 : Cauchy candidat au Collège de France après la mort de Lacroix mais Guigliermo Libri élu (contre Cauchy et Liouville) pour raisons politiques

Bref retour en grâce après la révolution de 1848 mais rapidement en opposition avec le régime républicain.

II- L'analyse algébrique

Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoiqu'assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles enferment. *(Cauchy, Analyse Algébrique. Introduction)*

Définir la convergence des suites et des séries. L'appliquer à l'étude des propriétés des fonctions

Systématisation de la notion de convergence

Critère d'existence de la limite : approche non constructive

pour rester constamment fidèle à ces principes, je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être **un peu dures** *au premier abord. Par exemple, j'énonce dans le chapitre VI, qu'*une série divergente n'a pas de somme; *dans le chapitre IX, que,* si des constantes ou des variables comprises dans une fonction, après avoir été supposées réelles, deviennent imaginaires, la notation à l'aide de laquelle la fonction se trouvait exprimée, ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu d'une convention nouvelle propre à fixer le sens de cette notation dans la dernière hypothèse*;* *(Cauchy, Analyse Algébrique (1821), Introduction)*

Par exemple, la formule $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

universellement valable pour Euler, a un sens seulement pour $x \in]-1,1[$ chez Cauchy

Contestation du concept de continuité chez Euler (« une seule formule analytique »)

selon lequel la valeur absolue $|\, x \,|$ est à la fois continue et discontinue puisque

$$|\, x \,| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \sqrt{x^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{t^2 - x^2} dt$$

Continuité d'une fonction (au sens *moderne*) :

valeurs numériques de $f(x+\alpha)-f(x)$ décroissent indéfiniement avec α pour $x \in [a,b]$

Notion centrale : continuité *sur un intervalle (et « donc » pas de distinction entre continuité simple ou uniforme)*

Miroir : discontinuité *en un point*

Critère «de Cauchy » : condition suffisante pour la convergence

Affirmation du caractère <u>suffisant</u> : pas de questionnement sur le caractère « complet » du corps des réels.

Pas de véritable notion « générale » de fonction mais distinction entre fonction *explicite* et *implicite.*

En 1827 premier essai de démonstration de la convergence des séries de Fourier

$$f(x) \longrightarrow f(x+iy)$$

Pas de sens si on n'a pas d'expression explicite

Intégrale : f continue sur $[a, b]$

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \text{ subdivision}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})$$

Si P et P' suffisamment fines, $| S - S' |$ est aussi petit

qu'on veut grâce à la continuité de f

Limite existe : c'est l'*intégrale définie* $\int_a^b f$

Résolution du problème des primitives des fonctions continues :

$$F(x) = \int_a^x f, \text{ primitive de } f \text{ continue}$$

(Théorème « fondamental » de l'Analyse)

Pour Cauchy : fonctions discontinues : discontinuités isolées sur $[a,b]$

D'où extension possible : si f bornée sur $[a,b]$ et discontinue en c (et continue ailleurs) alors

$$\lim_{h\to 0}\int_a^{c-h} f,\ \lim_{h\to 0}\int_{c+h}^{b} f$$

existent et on peut définir

$$\int_a^b f = \lim_{h\to 0}\int_a^{c-h} f + \lim_{h\to 0}\int_{c+h}^{b} f$$