MÉMOIRE

SUR

LES INTÉGRALES DÉFINIES,

LU A L'INSTITUT LE 22 AOUT 1814,

REMIS AU SECRÉTARIAT POUR ÊTRE IMPRIMÉ, LE 14 SEPTEMBRE 1825.

AVERTISSEMENT DE L'AUTEUR.

Quoique la plupart des formules auxquelles j'étais parvenu dans le Mémoire qu'on va lire aient été reproduites dans d'autres Ouvrages que j'ai publiés à diverses époques ([1]), et quoique j'aie apporté de nouveaux perfectionnements à la méthode par laquelle j'avais d'abord établi ces formules, néanmoins l'accueil favorable que cette méthode avait primitivement reçu me détermine à publier le Mémoire qui la renferme. Seulement j'ajouterai quelques notes au bas des pages, pour indiquer la manière de simplifier les formules ou d'en tirer de nouveaux résultats. A la tête du Mémoire est placé le Rapport de M. Legendre, qui en offre l'analyse en peu de mots.

([1]) On peut voir, à ce sujet, les Notes du *Mémoire sur les ondes*, le *Résumé des Leçons données à l'École royale Polytechnique*, le XIX^e Cahier du *Journal* de cette École, et un *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*. On trouve aussi quelques formules extraites du Mémoire qu'on va lire, et citées par M. Legendre dans la cinquième Partie des *Exercices de Calcul intégral*.

EXTRAIT DU PROCÈS-VERBAL

DE LA SÉANCE

DE LA CLASSE DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

DU LUNDI 7 NOVEMBRE 1814.

REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA.

La Classe nous a chargés, M. Lacroix et moi, de lui rendre compte d'un Mémoire *sur les intégrales définies* qui lui a été présenté par M. Cauchy, dans sa séance du 22 août dernier.

La première Partie de ce Mémoire est intitulée : *Des équations qui autorisent le passage du réel à l'imaginaire.*

Elle nous a paru avoir un objet tout autre que celui que le titre annonce. Certaines recherches de Calcul intégral ont offert parfois des résultats dans lesquels le *passage du réel à l'imaginaire* a été employé comme une sorte d'induction qui, n'étant point assez évidente par elle-même, avait besoin d'être confirmée par des démonstrations directes et rigoureuses. Mais l'emploi que M. Cauchy fait des imaginaires dans la première Partie de son Mémoire, n'a rien que de conforme aux règles ordinaires de l'Analyse, et n'est sujet à aucune difficulté.

M. Cauchy, à l'exemple de plusieurs géomètres, a pris pour base de ses recherches la considération des intégrales doubles, qui, en effet, a de grands rapports avec la théorie des intégrales définies, et qui fournit les moyens de varier à l'infini les transformations de ces intégrales.

Il suppose que les intégrales doubles qu'il considère sont prises entre des limites déterminées pour chaque variable; savoir : a' et a'' pour la variable x; b' et b'' pour la variable z. On peut donc imaginer que chaque intégrale double dont il s'agit, $\int\int v\,dx\,dz$, représente, sur une surface courbe donnée, la portion d'aire dont la projection sur le plan des x et z est un rectangle donné.

Cette supposition d'une figure rectangulaire restreint, comme on voit, l'étendue des fonctions représentées par la formule $\int\int v\,dx\,dz$, puisque cette formule, considérée dans toute sa généralité, représente l'aire qui a pour projection, sur le plan des x et z, une figure terminée par un contour quelconque.

Ayant pris pour v une fonction quelconque de x et z, on peut procéder de deux manières à la détermination de l'intégrale double $\int\int v\,dx\,dz$, selon que la première intégration se rapporte à la variable x ou qu'elle se rapporte à la variable z, et le choix entre ces deux manières d'opérer n'est pas toujours indifférent. Quelquefois les deux intégrations se font avec facilité en commençant par une variable, tandis que, si l'on commençait par l'autre variable, on rencontrerait immédiatement une transcendante qui rendrait la seconde intégration fort difficile.

Cette difficulté, au reste, quand elle a lieu, tourne à l'avantage de la science, puisque, sachant *a priori* que les deux résultats doivent s'accorder entre eux, on a, en établissant l'égalité, une formule qui donne la valeur d'une intégrale à laquelle les procédés directs de l'intégration ne seraient point applicables. C'est ainsi que quelques géomètres sont parvenus à différents résultats plus ou moins remarquables dans la théorie des intégrales définies.

M. Cauchy ne s'est point occupé de ce genre d'intégrales, et il a considéré seulement celles où l'on peut exécuter immédiatement la première intégration, tant par rapport à x que par rapport à z.

Il est facile de trouver généralement une valeur de la fonction v qui satisfasse à cette condition : il suffit, pour cela, de prendre une différentielle complète $p\,dx + q\,dz$, et de faire v égal à l'un des membres de l'équation de condition $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x}$. Ce moyen est général; mais M. Cauchy détermine par des procédés particuliers les fonctions dont il veut faire usage.

Il observe d'abord que, y étant une fonction quelconque de x et de z, et Y une fonction de y, le produit $Y\,dy$ sera une différentielle complète, et fournira entre les coefficients de dx et de dz l'équation connue, laquelle peut être vérifiée immédiatement par la différentiation.

Supposant ensuite qu'au lieu de y on mette

$$M + N\sqrt{-1},$$

M et N étant des fonctions réelles de x et de z, l'équation de condition relative à la différentielle $Y\,dy$, étant développée, se partagera en deux autres, comme cela a lieu dans toute équation qui contient à la fois des parties réelles et des parties imaginaires.

Ces deux équations donnant chacune une quantité qui peut être prise pour v, il multiplie les deux membres de chaque équation par $dx\,dz$; il intègre d'un côté par rapport à x, de l'autre par rapport à z : il obtient ainsi deux équations entre des intégrales définies, les unes relatives à la variable x, les autres relatives à la variable z. Ces équations offrent, en général, un moyen de transformation qui peut conduire à la détermination d'un grand nombre d'intégrales définies.

Cette méthode est d'autant plus féconde, que les limites des intégrales, tant par rapport à x que par rapport à z, peuvent être prises à volonté, et que, dans le cas surtout où l'on prend pour limites o et ∞, les équations se simplifient et peuvent offrir des résultats élégants.

L'emploi des imaginaires dans la méthode de M. Cauchy a l'avantage de fournir à la fois deux formules composées de fonctions qui ont entre elles les rapports d'analogie qu'elles doivent à leur source commune.

Ces formules se simplifient encore suivant les suppositions qui peuvent faire partager chaque équation de condition en deux autres. Ainsi, en prenant pour fonction principale $y = p \cos r$, p et r étant des fonctions de x; substituant ensuite $M + N\sqrt{-1}$ au lieu de x, l'équation de condition relative à la différentielle exacte dy se partage en deux autres, à raison des imaginaires, et chacune de celles-ci se partage de nouveau en deux autres, à raison des exponentielles qui naissent du développement de $\cos r$, et dans lesquelles les termes affectés d'un exposant positif peuvent se séparer des termes affectés d'un exposant négatif. On obtient donc alors quatre équations de condition, dont chaque membre peut être pris pour v, et qui donnent ainsi quatre équations entre des intégrales définies tirées d'une même source.

Tels sont les principes sur lesquels M. Cauchy a établi les nombreuses formules qui composent la première Partie de son Mémoire. Ces formules et les corollaires qu'il en déduit, dans différentes hypothèses sur les limites des intégrales, ont une grande généralité, et les applications que l'auteur en donne fournissent plusieurs résultats intéressants.

Le reste du Mémoire présente une théorie qui appartient presque entièrement à l'auteur, et qui paraît mériter l'attention des géomètres.

En appliquant ses formules à divers exemples, M. Cauchy n'a pas tardé à reconnaître que, dans certains cas, ces formules étaient en défaut; c'est-à-dire, qu'on n'obtenait pas le même résultat en intégrant d'abord par rapport à x, ensuite par rapport à z, ou en suivant une marche contraire.

Pour faire voir clairement l'objet de la difficulté, prenons pour exemple la différentielle de l'arc dont la tangente est $\frac{x}{z}$, et soit v l'un des membres de l'équation de condition à laquelle les coefficients de cette différentielle doivent satisfaire. Si l'on cherche la valeur de l'intégrale double $\int\int v\,dx\,dz$, prise entre les limites o et 1, tant pour x que pour z, on trouvera que le résultat est $\frac{\pi}{4}$, quand on commence le calcul par l'intégration relative à z, et qu'il est, au contraire, $-\frac{\pi}{4}$, lorsque les intégrations se font dans l'ordre inverse.

La différence de ces deux résultats s'explique aisément, si, au lieu de prendre les intégrales dans les limites désignées, on les prend depuis $x=\alpha$ jusqu'à $x=1$, et depuis $z=6$ jusqu'à $z=1$, α et 6 étant des quantités positives infiniment petites. Alors les deux manières d'évaluer l'intégrale double donnent un seul et même résultat, lequel est $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tang}\frac{6}{\alpha}$. On voit donc que ce résultat peut avoir une infinité de valeurs, suivant le rapport qu'on établit entre les quantités infiniment petites α et 6.

Lorsqu'on fait $\frac{6}{\alpha}=0$, ce qui revient à faire la première intégration par rapport à z, depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$, le résultat est $\frac{\pi}{4}$. Lorsqu'au contraire on fait $\frac{\alpha}{6}=0$, ce qui revient à faire la première intégration par rapport à x, depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, le résultat est $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{4}$: d'où l'on voit que l'intégrale double, dans le premier cas, doit être corrigée de $-\frac{\pi}{2}$, pour donner le même résultat qu'on obtient par la seconde manière d'opérer, en prenant d'abord l'intégrale par rapport à x.

Après avoir reconnu l'existence des anomalies que peut offrir la détermination des intégrales doubles, M. Cauchy a dû rechercher la cause générale qui les produit. Il a trouvé que cette difficulté avait lieu toutes les fois qu'après la première intégration, la fonction sous le signe était indéterminée ou de la forme $\frac{0}{0}$, pour des valeurs de x et de z comprises entre les limites de l'intégrale. Il observe à ce sujet que l'indétermination qui a lieu pour des fonctions de deux variables, est essentiellement différente de celle qu'on observe à l'égard des fonctions d'une seule variable. Dans celles-ci, il y a toujours une limite déterminée pour la quantité qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Dans les autres, au contraire, il n'y a aucune limite fixe, à moins d'établir une relation entre les différences des deux variables qui, de leur nature, sont indépendantes l'une de l'autre. C'est ainsi que, dans l'exemple rapporté ci-dessus, le résultat prend toutes les valeurs possibles entre $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$, selon les valeurs diverses qu'on attribue au rapport $\frac{\alpha}{\delta}$.

Il ne suffisait pas de connaître la cause générale des anomalies dont nous venons de parler; il fallait encore déterminer exactement la correction nécessaire pour rétablir l'égalité entre les deux résultats obtenus par les deux manières d'effectuer les intégrations. Cette question, considérée en général, était à la fois délicate et épineuse. M. Cauchy l'a pleinement résolue, au moyen d'une formule intégrale composée de quatre parties, de deux ou d'une seulement, suivant que le point où l'indétermination a lieu est situé au dedans du rectangle de projection, sur un de ses côtés, ou à l'un de ses angles.

Ces sortes d'intégrales que l'auteur appelle *intégrales singulières*, ne s'étendent qu'infiniment peu autour du point donné, c'est-à-dire qu'elles sont prises dans une partie infiniment petite de l'aire qui avoisine le point donné, sans sortir du rectangle de projection, et cette circonstance contribue beaucoup à en faciliter la détermination.

M. Cauchy revient donc aux formules principales qu'il a données dans la première Partie, et il donne, à l'aide des intégrales singulières, la correction qui doit être appliquée à ces formules pour tous les points d'indétermination compris dans les limites de l'intégrale, et suivant la position de ces points sur le rectangle de projection.

Après avoir exposé les méthodes générales, M. Cauchy en donne un grand nombre d'applications qui démontrent l'utilité et la fécondité de ces méthodes.

Dans cette partie du Mémoire de M. Cauchy, on retrouve presque toutes les formules connues, relatives au genre de fonctions qu'il a considérées, et plusieurs d'entre elles y sont présentées d'une manière plus générale qu'elles ne l'ont été jusqu'à présent. On y voit aussi des formules intégrales qui sont entièrement nouvelles et qui méritent de fixer l'attention.

Dans le nombre des premières intégrales, nous citerons la belle formule d'Euler, relative à l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x^n}$. M. Cauchy parvient très facilement à la valeur de cette intégrale; et ce qui est remarquable, c'est que la formule qui la détermine est uniquement composée d'intégrales singulières.

Il détermine non moins facilement l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x^n}$. La formule relative à cette intégrale peut être réputée nouvelle à quelques égards, quoiqu'elle se déduise aisément des formules connues.

Cette intégrale est remarquable en ce qu'elle serait infinie si on la prenait seulement jusqu'à $x = 1$; mais au delà de $x = 1$, l'infini se reproduit en signe contraire, et le résultat total est une quantité finie.

Parmi les formules qui appartiennent entièrement à M. Cauchy, nous devons citer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2}$, et trois autres du même genre, dont personne n'avait encore donné la valeur. M. Cauchy les trouve d'abord par une méthode qui suppose $a < b$; ensuite il se sert d'une autre méthode pour déterminer les mêmes intégrales dans le cas où l'on a $a > b$.

Nous avons vérifié ces intégrales par des méthodes qui nous sont propres, et nous les avons trouvées exactes, sauf quelques cas particuliers dans la discussion desquels l'auteur n'était point entré. Il faut observer, d'ailleurs, à l'égard de ces différences, que les formules de ce genre offrent quelques cas où la loi de continuité est violée. Une de ces formules, entre autres $\left(\text{c'est l'intégrale } \int_0^\infty \frac{x\cos ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2}\right)$, augmente ou diminue tout d'un coup de $\frac{1}{2}\pi$, lorsque le rapport $\frac{a}{b}$, qui d'abord est supposé égal à un nombre entier, diminue ou augmente d'une quantité infiniment petite.

Cette difficulté n'était point résolue dans le Mémoire de M. Cauchy : mais, sur l'observation qui lui a été faite de l'inexactitude de sa formule dans le cas de $a = b$, il a donné pour réponse deux Suppléments qui contiennent la vraie solution de cette difficulté et de quelques autres semblables.

Dans un sujet de pure Analyse, nous ne pouvons guère donner une idée plus détaillée du Mémoire de M. Cauchy, qui embrasse un grand nombre d'objets, quoiqu'il ne traite pas à beaucoup près de tous ceux qui appartiennent à la théorie des intégrales définies.

Nous n'examinerons pas si les nouvelles méthodes de M. Cauchy sont plus simples que celles qui étaient déjà connues, si leur application est plus facile, et si l'on peut trouver par leur moyen quelque résultat que ne pourraient donner les méthodes connues : car, quand même on répondrait négativement à ces différentes questions, il n'en resterait pas moins à l'auteur le mérite,

1° D'avoir construit, par une marche uniforme, une suite de formules générales, propres à transformer les intégrales définies et à en faciliter la détermination;

2° D'avoir remarqué le premier qu'une intégrale double, prise entre des limites données pour chaque variable, n'offre pas toujours le même résultat, dans les deux manières d'effectuer les intégrations;

3° D'avoir déterminé la cause de cette différence et d'en avoir donné la mesure exacte, au moyen des *intégrales singulières*, dont l'idée appartient à l'auteur, et qui peuvent être regardées comme une découverte en Analyse;

4° Enfin d'avoir donné, par ses méthodes, de nouvelles formules intégrales fort remarquables, qui peuvent bien se déduire des méthodes connues, mais auxquelles personne n'était encore parvenu.

Il nous paraît, par tous ces motifs, que M. Cauchy a donné, dans ses recherches sur les intégrales définies, une nouvelle preuve de la sagacité qu'il a montrée dans plusieurs de ses autres productions; nous pensons donc que son Mémoire est digne de l'approbation de la Classe, et d'être imprimé dans le *Recueil des Savants étrangers*.

Fait à l'Institut, le 7 novembre 1814.

Signé LACROIX, LEGENDRE, *Rapporteur*.

La Classe approuve le Rapport et en adopte les conclusions.

MÉMOIRE

SUR

LES INTÉGRALES DÉFINIES[1].

INTRODUCTION.

La solution d'un grand nombre de problèmes se réduit, en dernière analyse, à l'évaluation des intégrales définies; aussi les géomètres se sont-ils beaucoup occupés de leur détermination. On trouve, à cet égard, une foule de théorèmes curieux et utiles dans les Mémoires et le *Calcul intégral* d'Euler, dans plusieurs Mémoires de M. Laplace, dans ses *Recherches sur les approximations de certaines formules,* et dans les *Exercices de Calcul intégral* de M. Legendre. Mais, parmi les diverses intégrales obtenues par les deux premiers géomètres que je viens de citer, plusieurs ont été découvertes pour la première fois à l'aide d'une espèce d'induction fondée sur le passage du réel à l'imaginaire. Les passages de cette nature conduisent souvent d'une manière très prompte à des résultats dignes de remarque. Toutefois cette portion de la théorie est, ainsi que l'a observé M. Laplace, sujette à plusieurs difficultés. Aussi, après avoir montré, dans le calcul des fonctions génératrices, les ressources que l'Analyse peut retirer de semblables considérations, l'auteur ajoute : « On peut donc considérer ces passages comme des moyens de découvertes semblables à l'induction dont les

(1) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. Sciences mathématiques et physiques.* Tome I. Imprimé, par autorisation du Roi, à l'Imprimerie royale; 1827.

géomètres font depuis longtemps usage. Mais ces moyens, quoique employés avec beaucoup de précaution et de réserve, laissent toujours à désirer des démonstrations de leurs résultats. » Pour obvier à cet inconvénient, l'auteur a eu soin de confirmer par d'autres méthodes les valeurs des intégrales qu'il avait trouvées. Quant à celles d'Euler, M. Poisson a fait voir, dans le *Bulletin de la Société philomathique*, n° 42, et dans le *Journal de l'École royale Polytechnique*, t. IX, qu'on pouvait les obtenir, soit par des intégrations doubles, soit par l'intégration d'équations différentielles du second ordre. Après avoir réfléchi sur cet objet, et rapproché les uns des autres les divers résultats ci-dessus mentionnés, j'ai conçu l'espoir d'établir le passage du réel à l'imaginaire sur une analyse directe et rigoureuse; et mes recherches m'ont conduit à la méthode qui fait l'objet de ce Mémoire, et que je vais exposer en peu de mots. On ne verra peut-être pas sans intérêt comment une des difficultés que ce sujet présente peut non seulement être éclaircie, mais encore tourner au profit de l'Analyse, et se transformer, pour ainsi dire, elle-même en un nouveau moyen d'intégration.

Lorsque, dans une intégrale simple ou relative à une seule variable y, on remplace cette variable unique par une fonction quelconque de deux autres variables x et z, les deux coefficients différentiels de l'intégrale, pris, l'un par rapport à x, l'autre par rapport à z, se trouvent tous deux dégagés du signe d'intégration, et représentent simplement deux nouvelles fonctions de x et de z. Mais ces deux fonctions ont entre elles une relation qui mérite d'être remarquée : c'est que le coefficient différentiel de la première, pris par rapport à z, est égal au coefficient différentiel de la seconde, pris par rapport à x. Ce résultat se déduit, à la vérité, de cette seule considération, que, l'intégrale pouvant être censée représenter une fonction déterminée de x et de z, sa différentielle de second ordre, prise relativement à ces deux variables, doit rester la même, dans quelque ordre que les différentiations aient été faites. Mais, si cette preuve ne semble pas assez rigoureuse, on lèvera toute incertitude en vérifiant immédiatement, par la seule différentiation des deux fonctions que l'on considère, l'égalité de leurs coefficients différentiels. Cette égalité ou équation subsiste dans le cas même où la fonction de x et de z, qui remplace la variable y, est en partie réelle, en partie imaginaire, et se partage alors en deux équations nouvelles, dont chacune peut toujours être vérifiée directement par la seule différentiation. Celles-ci sont encore semblables à l'équation qui leur a donné naissance, et peuvent elles-mêmes, dans plusieurs cas, se partager chacune en deux équations de même forme. Dans toutes ces équations, une fonction de x et de z, différentiée par rapport à z et divisée par dz, se trouve égalée à une autre fonction de x et de z, différentiée par rapport à x et divisée par dx. Nous allons maintenant développer les avantages que présentent, dans la théorie des intégrales définies, les équations différentielles dont il s'agit.

Si, dans une équation de cette forme, on multiplie les deux membres par $dx\,dz$, et qu'on se propose ensuite de les intégrer, par rapport à x et à z, entre des limites déterminées de ces deux variables, on obtiendra une équation entre deux intégrales doubles. Mais, comme les deux membres de l'équation donnée, multipliés, le premier par dz, le second par dx, deviennent des différentielles exactes relativement aux variables z et x, on pourra immédiatement effectuer de part et d'autre une première intégration; et l'on obtiendra par suite une équation entre deux espèces d'intégrales définies relatives, les unes à la variable x, les autres à la variable z. On peut donc, à l'aide des considérations précédentes, établir des équations entre des intégrales définies de nature fort différente, et les transformer les unes dans les autres. Dans plusieurs cas, on détermine facilement les valeurs de quelques-unes d'entre elles, et l'on en déduit alors les valeurs d'autres intégrales plus compliquées. Enfin, si les intégrales que l'on considère ne peuvent s'obtenir en termes finis, on pourra du moins les ramener à d'autres plus simples ou plus faciles à calculer.

Les diverses applications qu'on peut faire de la théorie précédente sont relatives aux diverses fonctions de x et de z qui peuvent remplacer la variable y. Parmi les hypothèses sans nombre qu'on peut faire à cet égard, j'ai choisi celles qui m'ont paru les plus simples. J'ai obtenu de cette manière la plupart des intégrales déjà connues et plusieurs autres qui me paraissent nouvelles; enfin des formules générales qui, par les rapprochements qu'elles offrent, semblent devoir mériter l'attention des géomètres.

La méthode que je viens d'exposer est fondée, comme on voit, sur des principes clairs et faciles à saisir; mais elle suppose qu'il est toujours aisé de convertir les intégrales indéfinies en intégrales définies; et le passage des unes aux autres offre, dans la pratique, plusieurs difficultés qu'il est bon de faire disparaître, afin de tirer de la méthode le parti le plus avantageux possible.

La première difficulté qui se présente regarde les fonctions d'une seule variable. Si une intégrale indéfinie est exprimée par une certaine fonction de la variable augmentée d'une constante arbitraire, la même intégrale, prise entre deux limites données, a et b, sera exprimée en général par la différence des valeurs de la fonction relative à ces deux limites. Toutefois ce théorème n'est vrai que dans le cas où la fonction trouvée croît ou décroît d'une manière continue entre les deux limites dont il s'agit. Mais si, lorsqu'on fait croître la variable par degrés insensibles, la fonction trouvée passe subitement d'une valeur à une autre, la variable étant toujours comprise entre les limites de l'intégration, la différence de ces deux valeurs devra être retranchée de l'intégrale définie prise à l'ordinaire, et chacun des sauts brusques que pourra faire la fonction trouvée nécessitera une correction de même nature. On obtient facilement cette règle en considérant l'intégrale proposée comme la somme des éléments qui correspondent aux diverses valeurs de la variable, et partageant la somme totale en autant de sommes partielles qu'il y a de sauts brusques, plus un, dans la fonction trouvée.

Les autres difficultés sont relatives aux intégrales doubles dans lesquelles, après une première intégration, la fonction sous le signe $\int$ devient, pour certaines valeurs des variables, infinie ou indéterminée. Dans la méthode ci-dessus exposée, le dernier cas est le seul qui se présente; et ce n'est jamais que pour des valeurs déterminées de l'une et l'autre variable, que les fonctions sous le signe $\int$ prennent la forme $\frac{0}{0}$. Dans une semblable hypothèse, les intégrales doubles que l'on considère sont entièrement indéterminées; et lorsqu'on parvient à les intégrer complètement relativement aux deux variables données x et z, elles obtiennent en effet deux valeurs différentes l'une de l'autre, suivant que l'on substitue les valeurs de x avant celles de z, et réciproquement. Quoi qu'il en soit, parmi le nombre infini de valeurs que peuvent obtenir ces intégrales doubles, il en est deux qu'on doit soigneusement distinguer de toutes les autres, et qui jouissent d'un caractère particulier propre à les faire reconnaître. Mais, avant d'établir cette distinction, il est nécessaire de rappeler en peu de mots les principes sur lesquels repose la détermination des valeurs des fonctions à une ou à plusieurs variables.

Lorsqu'une fonction d'une seule variable x se présente, pour une certaine valeur a de cette variable, sous la forme $\frac{0}{0}$, elle n'est pas indéterminée, mais elle a pour valeur la limite dont elle s'approche sans cesse à mesure que $x - a$ décroît. Au contraire, si une fonction de x et de z prend la forme $\frac{0}{0}$ pour les valeurs $x = a$, $z = b$, de ces deux variables, elle sera totalement indéterminée, et tendra vers des limites différentes, selon qu'en faisant décroître simultanément les différences $x - a$, $z - b$, on établira entre ces deux différences tel ou tel autre rapport. Cependant on obtiendra une limite déterminée, si l'on néglige la différence $x - a$ relativement à la différence $z - b$, et une autre limite aussi déterminée, mais différente de la première, si l'on néglige $z - b$ relativement à $x - a$. La première hypothèse revient à considérer d'abord x comme constant et z seul comme variable, puis à substituer, dans cette supposition, la valeur de z, et, après, la valeur de x : c'est ce que nous appellerons substituer la valeur de z avant celle de x. Le contraire aura lieu dans la seconde hypothèse. Ainsi l'on peut dire que la fonction obtient deux valeurs différentes, mais toutes deux déterminées suivant l'ordre dans lequel on substitue les valeurs des variables.

Pour appliquer ces principes à la détermination des intégrales doubles définies, il suffit d'observer qu'une intégrale double étant la somme des éléments relatifs aux diverses valeurs des deux variables, cette intégrale sera nécessairement déterminée, si tous les éléments ont une valeur déterminée. Cela posé, si, pour aucune des valeurs de x et de z comprises entre les limites de l'intégrale, la fonction sous le signe $\int$ ne prend la forme $\frac{0}{0}$, la fonction de deux variables qui résultera d'une première intégration ne pourra jamais devenir indéterminée, et, par suite, l'intégrale conservera la même valeur dans quelque ordre que les substitutions soient faites. Si le contraire avait lieu, on en serait averti par cette circonstance remarquable, que la fonction de x et de z, résultant d'une première intégration, acquerrait, pour certaines valeurs des variables comprises entre les limites de l'intégrale double, une forme indéterminée. Dans cette hypothèse, l'intégrale cherchée obtient deux valeurs déterminées, mais différentes l'une de l'autre, suivant que, dans tous les éléments à la fois, on substitue les valeurs de x avant celles de z, ou les valeurs de z avant celles de x. Il ne reste plus qu'à faire voir comment, dans le calcul, on peut avoir égard à l'ordre de ces substitutions.

Supposons, par exemple, que l'on veuille substituer les valeurs de x avant celles de z. Alors, si l'on effectue la première intégration par rapport à x, rien n'empêchera de substituer immédiatement les valeurs de x, et l'intégrale double cherchée se trouvera remplacée en général par la différence de deux intégrales définies relatives à z. Mais, si l'on effectue la première intégration relativement à la variable z, et que, pour un système de valeurs des deux variables comprises entre les limites de l'intégrale, la fonction obtenue par ce moyen prenne une forme indéterminée, on ne pourra substituer immédiatement les valeurs de z, puisqu'on renverserait ainsi l'ordre des substitutions. Au reste, il est facile de voir que l'erreur produite par ce renversement porte entièrement sur la partie de l'intégrale double qui correspond aux systèmes très voisins de celui qu'on vient de citer : car cette partie est la seule dont les éléments n'aient pas une valeur déterminée. Cette même partie obtient une valeur nulle, lorsqu'après l'intégration relative à z, on y substitue immédiatement les valeurs de z; mais elle cesse de s'évanouir, lorsqu'avant d'opérer cette substitution, on effectue l'intégration relative à x. Nous sommes donc conduits, par ce qui précède, à considérer une espèce particulière d'intégrales définies dans lesquelles les limites relatives à chaque variable sont infiniment rapprochées l'une de l'autre, sans que pour cela les intégrales soient nulles. Je les désignerai sous le nom d'*intégrales singulières*. Une intégrale de ce genre était déjà connue, et cette intégrale est due à M. Legendre, qui, dans un Supplément aux *Exercices de Calcul intégral*, a, le premier, appelé sur cet objet l'attention des géomètres. Ces dernières intégrales peuvent être employées avec avantage dans la théorie des intégrales définies; et lorsque l'on considère deux variables, elles servent à corriger les erreurs dépendantes de l'ordre des substitutions. Elles se trouvent, par la méthode précédente, introduites dans les équations qui déterminent les valeurs des intégrales définies; et souvent une intégrale définie est exprimée par la somme de plusieurs intégrales singulières.

Ce qu'il y a de remarquable et de fort heureux en même temps, c'est qu'on peut toujours déterminer les valeurs des intégrales singulières que la méthode précédente introduit dans le calcul. Ces valeurs renferment, en général, le rapport de la circonférence au diamètre, les fonctions placées sous le signe $\int$ dans les intégrales que l'on considère, et les racines imaginaires des équations qu'on obtient en égalant à zéro les dénominateurs de ces mêmes fonctions. Ainsi, toutes les fois qu'on parvient à exprimer une intégrale définie dont on cherche la valeur par la somme de plusieurs intégrales singulières, la question n'est pas seulement changée de nature, mais elle est même complètement résolue. On trouvera dans le présent Mémoire plusieurs exemples de ce genre de calcul.

PREMIÈRE PARTIE.

DES ÉQUATIONS QUI AUTORISENT LE PASSAGE DU RÉEL A L'IMAGINAIRE.

I.

EXPOSITION GÉNÉRALE DE LA MÉTHODE.

Soit $f(y)$ une fonction quelconque de la variable y, et supposons que y soit elle-même une fonction de deux autres variables, x et z : le coefficient différentiel de l'intégrale

$$\int f(y)\,dy,$$

pris relativement à x, sera

$$f(y)\frac{\partial y}{\partial x},$$

et le coefficient différentiel de la même intégrale, relativement à z, sera

$$f(y)\frac{\partial y}{\partial z}.$$

Quant au coefficient différentiel du second ordre, pris relativement aux deux variables x et z, il pourra être désigné, ou par

$$\frac{\partial\left[f(y)\frac{\partial y}{\partial x}\right]}{\partial z},$$

ou par

$$\frac{\partial\left[f(y)\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial x}.$$

On aura donc

$$\frac{\partial\left[f(y)\frac{\partial y}{\partial x}\right]}{\partial z} = \frac{\partial\left[f(y)\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial x}. \tag{1}$$

On peut vérifier cette équation directement par la seule différentiation. On a, en effet,

$$\frac{\partial\left[f(y)\frac{\partial y}{\partial x}\right]}{\partial z} = f(y)\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial z} + f'(y)\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\left[f(y)\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial x} = f(y)\frac{\partial^2 y}{\partial z\,\partial x} + f'(y)\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial z},$$

d'où l'on déduit l'équation (1). Cette dernière équation subsiste, quelle que soit la fonction de x et de z que l'on prenne pour y. Elle subsistera donc encore, si l'on suppose cette fonction en partie réelle, en partie imaginaire. Ainsi, par exemple, si M et N désignent deux fonctions quelconques de x et de z, on pourra faire

$$y = \mathrm{M} + \mathrm{N}\sqrt{-1}.$$

Alors, si l'on suppose

$$f(\mathrm{M} + \mathrm{N}\sqrt{-1}) = \mathrm{P}' + \mathrm{P}''\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{P}'\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} - \mathrm{P}''\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = \mathrm{S}, \quad \mathrm{P}'\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} - \mathrm{P}''\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z} = \mathrm{U},$$

$$\mathrm{P}'\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} + \mathrm{P}''\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} = \mathrm{T}, \quad \mathrm{P}'\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z} + \mathrm{P}''\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} = \mathrm{V},$$

l'équation (1) deviendra

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\sqrt{-1} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\sqrt{-1}.$$

Si, au lieu de supposer $y = \mathrm{M} + \mathrm{N}\sqrt{-1}$, on eût supposé $y = \mathrm{M} - \mathrm{N}\sqrt{-1}$, on aurait trouvé

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\sqrt{-1} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\sqrt{-1}.$$

On aura donc séparément :

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial z} = \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial z} = \dfrac{\partial V}{\partial x}. \end{cases}$$

On peut encore vérifier immédiatement les deux équations précédentes à l'aide de la seule différentiation des quatre quantités désignées par S, T, U, V. Ces deux équations renferment toute la théorie du passage du réel à l'imaginaire, et il ne nous reste plus qu'à indiquer la manière de s'en servir.

Supposons qu'après avoir multiplié les deux membres de chacune des équations (2) par $dx\,dz$, on se propose de les intégrer, par rapport à x et à z, entre des limites réelles de ces deux variables. Désignons par

$$S',\ S'',\ T',\ T''$$

les valeurs de S et de T relatives aux deux limites de z, et par

$$U',\ U'',\ V',\ V''$$

les valeurs de U et de V relatives aux deux limites de x. Si, entre les limites dont il s'agit, les quatre quantités

$$S,\ T,\ U,\ V$$

conservent toujours une valeur déterminée, on aura généralement

$$(3)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int S''\,dx - \int S'\,dx = \int U''\,dz - \int U'\,dz \quad (^1), \\[2ex] \displaystyle\int T''\,dx - \int T'\,dx = \int V''\,dz - \int V'\,dz. \end{cases}$$

(1) Les équations (3) peuvent être remplacées par une seule formule imaginaire, savoir :

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} \displaystyle\int (S'' + T''\sqrt{-1})\,dx - \int (S' + T'\sqrt{-1})\,dx \\[2ex] \displaystyle\quad = \int (U'' + V''\sqrt{-1})\,dz - \int (U' + V'\sqrt{-1})\,dz. \end{cases}$$

La même remarque s'applique aux équations (4), et généralement à tous les systèmes d'équations qui seront établis dans les paragraphes suivants, chaque système de deux équations réelles pouvant être remplacé par une seule formule imaginaire.

Supposons, pour plus de simplicité, que les limites relatives à x soient o et x, et les limites relatives à z, o et z; enfin désignons par

s et t ce que deviennent S et T quand $z = 0$,

et par

u et v ce que deviennent U et V quand $x = 0$.

Les deux équations précédentes deviendront

$$(4)\quad \begin{cases} \int_0^x S\,dx - \int_0^x s\,dx = \int_0^z U\,dz - \int_0^z u\,dz, \\ \int_0^x T\,dx - \int_0^x t\,dx = \int_0^z V\,dz - \int_0^z v\,dz. \end{cases}$$

Nous examinerons, dans la seconde Partie de ce Mémoire, le cas où les valeurs de S, T, U, V deviennent indéterminées entre les limites de l'intégration. Quant à présent, nous nous bornerons à montrer par quelques applications l'usage des formules que nous venons de trouver.

II.

PREMIÈRE APPLICATION.

Faisons $M = x$, $N = z$, on aura

$$P' \pm P''\sqrt{-1} = f(x \pm z\sqrt{-1}),$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = 1,$$

$$S = P', \quad U = -P'',$$

$$T = P'', \quad V = P'.$$

Si l'on fait, de plus, $f(x) = p$, $f(\pm z\sqrt{-1}) = p' \pm p''\sqrt{-1}$, on aura

$$s = p, \quad u = -p'',$$

$$t = 0, \quad v = p';$$

et par suite les équations (4) deviendront

$$(5)\quad \begin{cases} \int_0^x P'\,dx - \int_0^x p\,dx = \int_0^z p''\,dz - \int_0^z P''\,dz \quad (^1), \\ \int_0^x P''\,dx \qquad\qquad\quad = \int_0^z P'\,dz - \int_0^z p'\,dz. \end{cases}$$

Les équations précédentes supposent que P′ et P″ conservent toujours une valeur déterminée entre les limites dont il s'agit.

(1) Si l'on a égard à la note de la page 338, et si l'on désigne avec M. Fourier par la notation

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx$$

l'intégrale définie $\int f(x)\,dx$, prise entre les limites $x = x'$, $x = x''$, on reconnaîtra que les équations (5) peuvent être remplacées par la seule formule

$$(B)\quad \int_0^x f(x+z\sqrt{-1})\,dx - \int_0^x f(x)\,dx = \sqrt{-1}\left[\int_0^z f(x+z\sqrt{-1})\,dz - \int_0^z f(z\sqrt{-1})\,dz\right],$$

et les équations (6) par la suivante :

$$(C)\quad \int_0^a f(x+b\sqrt{-1})\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \sqrt{-1}\int_0^b f(z\sqrt{-1})\,dz.$$

Si, dans cette dernière, on fait successivement $a = -\infty$, $a = \infty$, et si l'on suppose que $f(x+z\sqrt{-1})$ s'évanouisse pour $x = \pm\infty$, quel que soit z, on trouvera

$$\int_0^\infty f(x+b\sqrt{-1})\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx - \sqrt{-1}\int_0^b f(z\sqrt{-1})\,dz,$$

$$\int_{-\infty}^0 f(x+b\sqrt{-1})\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \sqrt{-1}\int_0^b f(z\sqrt{-1})\,dz;$$

et par suite

$$(D)\quad \int_{-\infty}^\infty f(x+b\sqrt{-1})\,dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.$$

On peut déduire immédiatement de l'équation précédente les formules (c), page 342.

EXEMPLE. — Si l'on suppose $f(x) = e^{-x^2}$, on aura

$$\mathrm{P}' = e^{z^2} e^{-x^2} \cos 2xz, \quad \mathrm{P}'' = - e^{z^2} e^{-x^2} \sin 2xz, \quad p = e^{-x^2},$$
$$p' = e^{-x^2}, \qquad p'' = 0.$$

Cela posé, les équations (5) deviendront

$$(a) \quad \begin{cases} e^{z^2} \displaystyle\int_0^x e^{-x^2} \cos 2xz \, dx - e^{-x^2} \int_0^z e^{z^2} \sin 2xz \, dz = \int_0^x e^{-x^2} dx, \\ e^{z^2} \displaystyle\int_0^x e^{-x^2} \sin 2xz \, dx + e^{-x^2} \int_0^z e^{z^2} \cos 2xz \, dz = \int_0^z e^{z^2} dz. \end{cases}$$

Si, dans les équations (a), on suppose infinie la seconde limite de x, les deux quantités

$$e^{-x^2} \int_0^z e^{z^2} \sin 2xz \, dz, \quad e^{-x^2} \int_0^z e^{z^2} \cos 2xz \, dz$$

s'évanouiront, et l'on aura simplement

$$(b) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2xz \, dx = e^{-z^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-z^2}, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2xz \, dx = e^{-z^2} \int_0^z e^{z^2} dz. \end{cases}$$

Ces deux dernières équations étaient déjà connues.

Corollaire I. — Lorsque $f(x)$ est une fonction paire de x, $f(\pm z\sqrt{-1})$ est en général une fonction réelle de z, et l'on a, dans cette hypothèse, $p'' = 0$. Si, de plus, la valeur extrême de x est telle que P'' s'évanouisse, la première des équations (5) deviendra

$$\int_0^x \mathrm{P}' \, dx = \int_0^x p \, dx.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Soit $f(x) = p$ une fonction de x telle que, si l'on fait*

$$f(x \pm z\sqrt{-1}) = \mathrm{P}' \pm \mathrm{P}''\sqrt{-1},$$

P' *et* P'' *conservent une valeur déterminée pour toutes les valeurs de* x *et de* z *comprises entre les limites* $x=0$, $x=a$, $z=0$, $z=b$; *et qu'en outre* P'' *s'évanouisse aux deux limites de* x, *quelle que soit d'ailleurs la valeur de* z. *Si l'on suppose, dans* P', $z=b$, *on aura*

$$\int_0^a \mathrm{P}'\,dx = \int_0^a p\,dx.$$

Dans un grand nombre de cas, la valeur a de x, qui rend P'' nulle, est infinie. C'est ce qui arrive, par exemple, lorsqu'on suppose

$$f(x) = e^{-x^{2k}},$$

k étant un nombre entier. Si, dans cette hypothèse, on fait successivement $k=1$, $k=2$, ..., l'équation

$$\int_0^\infty \mathrm{P}'\,dx = \int_0^\infty p\,dx$$

deviendra

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-x^2+b^2}\cos 2bx\,dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,\\
&\int_0^\infty e^{-x^4+6b^2x^2-b^4}\cos[4bx(x^2-b^2)]\,dx = \int_0^\infty e^{-x^4}\,dx,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\int_0^\infty e^{-\frac{(x+b\sqrt{-1})^{2k}+(x-b\sqrt{-1})^{2k}}{2}}\cos\left[\frac{(x+b\sqrt{-1})^{2k}-(x-b\sqrt{-1})^{2k}}{2}\right]dx = \int_0^\infty e^{-x^{2k}}\,dx,
\end{aligned}\right.$$

La première de ces équations coïncide avec l'équation (b) trouvée ci-dessus.

Corollaire II. — Quand la valeur extrême de x est telle que P' et P'' s'évanouissent indépendamment de toute valeur de z, les équations (5) se réduisent à

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_0^x \mathrm{P}'\,dx = \int_0^x p\,dx + \int_0^z p''\,dz,\\
&\int_0^x \mathrm{P}''\,dx = \qquad\qquad -\int_0^z p'\,dz.
\end{aligned}\right.$$

Si, dans la première de ces équations, on suppose $p''=0$, on retrouvera le théorème ci-dessus démontré.

Corollaire III. — Si, dans les équations (6), on suppose

$$f(x)=x^{n-1}\,\mathrm{F}(x),$$

n étant un nombre entier positif, on aura

$$\mathrm{P}'\pm\mathrm{P}''\sqrt{-1}=(x\pm z\sqrt{-1})^{n-1}\,\mathrm{F}(x\pm z\sqrt{-1}).$$

Soit, pour abréger,

$$\begin{gathered}(x\pm z\sqrt{-1})^{n-1}=\mathrm{X}\pm\mathrm{Z}\sqrt{-1},\\ \mathrm{F}(x)=q,\\ \mathrm{F}(x\pm z\sqrt{-1})=\mathrm{Q}'\pm\mathrm{Q}''\sqrt{-1},\\ \mathrm{F}(\pm z\sqrt{-1})=q'\pm q''\sqrt{-1}.\end{gathered}$$

On trouvera

$$\mathrm{P}'=\mathrm{Q}'\mathrm{X}-\mathrm{Q}''\mathrm{Z},\quad \mathrm{P}''=\mathrm{Q}'\mathrm{Z}+\mathrm{Q}''\mathrm{X},\quad p=qx^{n-1}.$$

On aura, de plus, si n est un nombre impair,

$$(\pm z\sqrt{-1})^{n-1}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}z^{n-1},$$

et par suite

$$p'=(-1)^{\frac{n-1}{2}}q'z^{n-1},\quad p''=(-1)^{\frac{n-1}{2}}q''z^{n-1}.$$

Au contraire, si n est un nombre pair, on aura

$$(\pm z\sqrt{-1})^{n-1}=\pm(-1)^{\frac{n-2}{2}}z^{n-1}\sqrt{-1},$$

et par suite

$$p'=(-1)^{\frac{n}{2}}q'',\quad p''=(-1)^{\frac{n}{2}-1}q'.$$

On aura donc, en supposant, dans les équations (6), $n=2k+1$,

$$(7)\qquad\left\{\begin{aligned}&\int_0^x(\mathrm{Q}'\mathrm{X}-\mathrm{Q}''\mathrm{Z})\,dx=\int_0^x qx^{2k}\,dx+(-1)^k\int_0^z q''z^{2k}\,dz,\\ &\int_0^x(\mathrm{Q}'\mathrm{Z}+\mathrm{Q}''\mathrm{X})\,dx=\qquad\qquad\qquad(-1)^{k-1}\int_0^z q'z^{2k}\,dz;\end{aligned}\right.$$

et, en supposant $n=2k$,

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x (Q'X - Q''Z)\,dx = \int_0^x qx^{2k-1}\,dx + (-1)^{k-1}\int_0^z q'\,z^{2k-1}\,dz, \\ \displaystyle\int_0^x (Q'Z + Q''X)\,dx = \phantom{\int_0^x qx^{2k-1}\,dx +} (-1)^{k-1}\int_0^z q''\,z^{2k-1}\,dz. \end{cases}$$

Si, dans les équations (7) et (8), on fait successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, ..., on trouvera

$$\begin{array}{llll} \text{pour } & n=1, & X=1, & Z=0; \\ & n=2, & X=x, & Z=z; \\ & n=3, & X=x^2-z^2, & Z=2xz; \\ & n=4, & X=x^3-3xz^2, & Z=3x^2z-z^3; \\ & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots \end{array}$$

Cela posé, la première des équations (7), conjointement avec la seconde des équations (8), fournira les résultats suivants :

$$(9)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x Q'\,dx = \int_0^x q\,dx + \int_0^z q''\,dz, \\ \displaystyle\int_0^x Q''x\,dx + z\int_0^x Q'\,dx = \int_0^z q''z\,dz, \\ \displaystyle -\int_0^x Q'x^2\,dx + 2z\int_0^x Q''x\,dx + z^2\int_0^x Q'\,dx = -\int_0^x qx^2\,dx + \int_0^z q''z^2\,dz, \\ \displaystyle -\int_0^x Q''x^3\,dx - 3z\int_0^x Q'x^2\,dx + 3z^2\int_0^x Q''x\,dx + z^3\int_0^x Q'\,dx = \int_0^z q''z^3\,dz, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Au contraire, la seconde des équations (7), jointe à la première des équations (8), donnera

$$(10)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x Q''dx = -\int_0^z q'\,dz, \\ \displaystyle -\int_0^x Q'x\,dx + z\int_0^x Q''dx = -\int_0^x qx\,dx - \int_0^z q'z\,dz, \\ \displaystyle -\int_0^x Q''x^2\,dx - 2z\int_0^x Q'x\,dx + z^2\int_0^x Q''dx = -\int_0^z q'z^2\,dz, \\ \displaystyle \int_0^x Q'x^3\,dx - 3z\int_0^x Q''x^2\,dx - 3z^2\int_0^x Q'x\,dx + z^3\int_0^x Q''dx = \int_0^x qx^3\,dx - \int_0^z q'z^3\,dz, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les équations (7), (8), (9) et (10) supposent que, pour la valeur extrême de x, les quantités

$$Q'X - Q''Z, \quad Q'Z + Q''X,$$

s'évanouissent indépendamment de toute valeur de z. Si la valeur extrême de x est infinie, il suffira que

$$Q'x^{n-1} \quad \text{et} \quad Q''x^{n-1}$$

s'évanouissent par la supposition $x = \infty$.

Toutes les fois que les valeurs des intégrales de la forme $\int_0^z q' z^k \, dz$, $\int_0^x q x^{2k} \, dx$ seront connues, on pourra déduire des équations (9) les valeurs des intégrales de la forme

$$\int_0^x Q' x^{2k} \, dx, \quad \int_0^x Q'' x^{2k-1} \, dx.$$

De même, toutes les fois que les valeurs des intégrales

$$\int_0^z q'' z^k \, dz, \quad \int_0^x q x^{2k-1} \, dx$$

seront données, les équations (10) feront connaître les valeurs des intégrales

$$\int_0^x Q' x^{2k-1} \, dx, \quad \int_0^x Q'' x^{2k-1} \, dx.$$

On peut d'ailleurs, sans nul inconvénient, changer dans les équations (9) et (10), q en p, et par suite q' en p', q'' en p'', Q' en P' et Q'' en P''. Cela posé, on obtiendra facilement par l'élimination les valeurs des quatre espèces d'intégrales

$$\int_0^x P' x^{2k} \, dx, \quad \int_0^x P' x^{2k-1} \, dx, \quad \int_0^x P'' x^{2k-1} \, dx, \quad \int_0^x P'' x^{2k} \, dx.$$

Ces valeurs seront comprises dans les quatre formules suivantes :

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
\int_0^x \mathrm{P}' x^{2k-1}\,dx &= \int_0^x \Big[x^{2k-1} - \frac{(2k-1)(2k-2)}{1.2} x^{2k-3} z^2 \\
&\qquad + \frac{(2k-1)(2k-2)(2k-3)(2k-4)}{1.2.3.4} x^{2k-5} z^4 - \ldots\Big] p\,dx \; [1] \\
&+ (-1)^{k+1}\Big[\int_0^z p' z^{2k-1}\,dz - \frac{(2k-1)}{1} z \int_0^z p' z^{2k-2}\,dz \\
&\qquad + \frac{(2k-1)(2k-2)}{1.2} z^2 \int_0^z p' z^{2k-3}\,dz - \ldots\Big],
\end{aligned}\right.
$$

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
\int_0^x \mathrm{P}' x^{2k}\,dx &= \int_0^x \Big[x^{2k} - \frac{2k(2k-1)}{1.2} x^{2k-2} z^2 \\
&\qquad + \frac{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)}{1.2.3.4} x^{2k-4} z^4 - \ldots\Big] p\,dx \\
&+ (-1)^{k}\Big[\int_0^z p'' z^{2k}\,dz - \frac{2k}{1} z \int_0^z p'' z^{2k-1}\,dz \\
&\qquad + \frac{2k(2k-1)}{1.2} z^2 \int_0^z p'' z^{2k-2}\,dz - \ldots\Big],
\end{aligned}\right.
$$

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
\int_0^x \mathrm{P}'' x^{2k-1}\,dx &= -\int_0^x \Big[\frac{2k-1}{1} x^{2k-2} z \\
&\qquad - \frac{(2k-1)(2k-2)(2k-3)}{1.2.3} x^{2k-4} z^3 + \ldots\Big] p\,dx \\
&+ (-1)^{k+1}\Big[\int_0^z p'' z^{2k-1}\,dz - \frac{2k-1}{1} z \int_0^z p'' z^{2k-2}\,dz \\
&\qquad + \frac{(2k-1)(2k-2)}{1.2} \int_0^z p'' z^{2k-3}\,dz - \ldots\Big],
\end{aligned}\right.
$$

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
\int_0^x \mathrm{P}'' x^{2k}\,dx &= -\int_0^x \Big[\frac{2k}{1} x^{2k-1} z - \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{1.2.3} x^{2k-3} z^3 + \ldots\Big] p\,dx \\
&+ (-1)^{k+1}\Big[\int_0^z p' z^{2k}\,dz - \frac{2k}{1} z \int_0^z p' z^{2k-1}\,dz + \ldots\Big].
\end{aligned}\right.
$$

[1] Les équations (11), (12), (13) et (14) peuvent être remplacées par la seule formule

$$
(\mathrm{E})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^{n-1} f(x + b\sqrt{-1})\,dx \\
&= \int_0^\infty (x - b\sqrt{-1})^{n-1} f(x)\,ax - (\sqrt{-1})^n \int_0^b (z-b)^{n-1} f(z\sqrt{-1})\,dz.
\end{aligned}\right.
$$

que l'on déduit immédiatement de l'équation (C), en substituant le produit $(x - b\sqrt{-1})^{n-1} f(x)$

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Ces formules sont principalement utiles dans le cas où la valeur extrême de x est infinie. Mais alors $P'x^{2k}$ et $P''x^{2k}$ doivent s'évanouir lorsqu'on suppose $x = \infty$. On peut donc énoncer le théorème suivant.

Théorème II. — *Soit $f(x) = p$ une fonction de x telle que, si l'on fait*

$$f(x \pm z\sqrt{-1}) = P' \pm P''\sqrt{-1},$$

P' et P'' conservent une valeur déterminée pour toutes les valeurs de x et de z comprises entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, $z = 0$, $z = b$, et qu'en outre

$$P'x^{2k} \quad \text{et} \quad P''x^{2k}$$

à la fonction $f(x)$. Quant aux équations (d), elles peuvent s'écrire comme il suit :

$$(\mathrm{F}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty x^{2k} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx = e^{-b^2} \int_0^\infty \frac{(x+b\sqrt{-1})^{2k} + (x-b\sqrt{-1})^{2k}}{2} e^{-x^2} dx, \\ &\int_0^\infty x^{2k-1} e^{-x^2} \sin 2bx\, dx = e^{-b^2} \int_0^\infty \frac{(x+b\sqrt{-1})^{2k-1} - (x-b\sqrt{-1})^{2k-1}}{2\sqrt{-1}} e^{-x^2} dx. \end{aligned} \right.$$

Ajoutons que si, dans l'équation (D), on remplace $f(x)$ par

$$(b - x\sqrt{-1})^{m-1} f(x),$$

on en tirera

$$(\mathrm{G}) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (-x\sqrt{-1})^{m-1} f(x + b\sqrt{-1})\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (b - x\sqrt{-1})^{m-1} f(x)\, dx.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(\mathrm{H}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty x^{m-1} \left[(-\sqrt{-1})^{m-1} f(x + b\sqrt{-1}) + (\sqrt{-1})^{m-1} f(-x + b\sqrt{-1})\right] dx \\ &\quad = \int_0^\infty \left[(b - x\sqrt{-1})^{m-1} f(x) + (b + x\sqrt{-1})^{m-1} f(-x)\right] dx. \end{aligned} \right.$$

Cette dernière formule subsiste, quel que soit m. Si l'on y pose $f(x) = e^{-x^2}$, on obtiendra l'équation

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty x^{m-1} \sin\left(\frac{m\pi}{2} - 2bx\right) e^{-x^2} dx \\ &\quad = e^{-b^2} \int_0^\infty \frac{(b + x\sqrt{-1})^{m-1} + (b - x\sqrt{-1})^{m-1}}{2} e^{-x^2} dx, \end{aligned} \right.$$

que j'ai donnée dans un *Mémoire sur la conversion des différences finies des puissances en intégrales définies,* et dans le *Bulletin de la Société philomathique* de 1822.

s'évanouissent, quelle que soit z, pour $x = \infty$; si l'on désigne par p' et p'' ce que deviennent P′ *et* P″ *quand $z = 0$, on aura, en supposant $z = b$, les quatre équations* (11), (12), (13) *et* (14), *les intégrales relatives à x étant prises entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, et les intégrales relatives à z entre les limites $z = 0$, $z = b$.*

Exemple. — Soit

$$f(x) = p = e^{-x^2},$$

on aura

$$P' = e^{z^2} e^{-x^2} \cos 2xz, \quad P'' = -e^{z^2} e^{-x^2} \sin 2xz,$$
$$p' = e^{z^2}, \qquad p'' = 0.$$

On aura de plus

$$\int_0^\infty x^{2k} e^{-x^2} dx = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2^k} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{(k+1)(k+2)\ldots 2k}{2^{2k}} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Cela posé, si l'on fait $z = \frac{1}{2} a$, les équations (12) et (13) deviendront respectivement

$$(d)\left\{\begin{aligned} \int_0^\infty x^{2k} e^{-x^2} \cos ax\, dx &= \frac{(k+1)(k+2)\ldots 2k}{2^{2k+1}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{4}} \left[1 - \frac{k}{1.2} a^2 + \frac{k(k-1)}{1.2.3.4} a^4 - \ldots\right], \\ \int_0^\infty x^{2k-1} e^{-x^2} \sin ax\, dx &= \frac{k(k+1)\ldots(2k-1)}{2^{2k}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{4}} \left[a - \frac{k-1}{1.2.3} a^3 + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2.3.4.5} a^5 - \ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

On peut aussi trouver directement les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty x^{2k} e^{-x^2} \cos ax\, dx, \quad \int_0^\infty x^{2k-1} e^{-x^2} \sin ax\, dx,$$

en différentiant plusieurs fois de suite, par rapport à la constante a, les deux membres de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos ax\, dx = \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{4}},$$

et l'on obtient alors les formules données par M. Legendre (p. 363 des *Exercices de Calcul intégral*). Les équations (d) comprennent ces mêmes formules, et font connaître de plus la loi générale à laquelle elles sont assujetties, loi qu'il serait peut-être difficile d'obtenir par une autre méthode.

III.

SECONDE APPLICATION.

Faisons

$$\mathrm{M} = ax, \quad \mathrm{N} = xz,$$

a étant une quantité constante, et

$$\mathrm{P}' \pm \mathrm{P}''\sqrt{-1} = f(ax \pm xz\sqrt{-1}).$$

On aura

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = z, \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z} = x,$$

$$\mathrm{S} = a\mathrm{P}' - z\mathrm{P}'', \quad \mathrm{T} = z\mathrm{P}' + a\mathrm{P}'', \quad \mathrm{U} = -x\mathrm{P}'', \quad \mathrm{V} = x\mathrm{P}'.$$

Si l'on fait de plus $\mathrm{P} = f(ax)$, $k = f(0)$, on aura

$$s = a\mathrm{P}, \quad t = 0, \quad u = 0, \quad v = 0.k = 0,$$

à moins que k ne soit infini.

Cela posé, les équations (5) deviendront

$$(15)\quad \begin{cases} a\displaystyle\int_0^x \mathrm{P}'\,dx - z\int_0^x \mathrm{P}''\,dx - a\int_0^x \mathrm{P}\,dx = -x\int_0^z \mathrm{P}''\,dz \text{ [1]}, \\ z\displaystyle\int_0^x \mathrm{P}'\,dx + a\int_0^x \mathrm{P}''\,dx = x\int_0^z \mathrm{P}'\,dz. \end{cases}$$

[1] Les formules (15), (18) et (21) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(\mathrm{K})\quad \begin{cases} (a + z\sqrt{-1})\displaystyle\int_0^x f(ax + xz\sqrt{-1})\,dx - a\int_0^x f(ax)\,dx \\ \quad = x\sqrt{-1}\displaystyle\int_0^z f(ax + xz\sqrt{-1})\,dz, \end{cases}$$

$$(\mathrm{L})\quad (a + b\sqrt{-1})\int_0^\infty f[(a + b\sqrt{-1})x]\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx,$$

$$(\mathrm{M})\quad \int_0^\infty x^{n-1} f[r(\cos k + \sqrt{-1}\sin k)x]\,dx = \frac{\cos nk - \sqrt{-1}\sin nk}{r^n}\int_0^\infty x^{n-1} f(x)\,dx.$$

On peut aussi mettre ces équations sous la forme suivante :

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^x \mathrm{P}'\,dx &= \frac{x}{a^2+z^2}\left[z\int_0^z \mathrm{P}'\,dz - a\int_0^z \mathrm{P}''\,dz\right] + \frac{a^2}{a^2+z^2}\int_0^x \mathrm{P}\,dx, \\ \int_0^x \mathrm{P}''\,dx &= \frac{x}{a^2+z^2}\left[a\int_0^z \mathrm{P}'\,dz + z\int_0^z \mathrm{P}''\,dz\right] + \frac{az}{a^2+z^2}\int_0^x \mathrm{P}\,dx. \end{aligned} \right.$$

Corollaire I. — Si la valeur extrême de x est telle que $x\mathrm{P}'$ et $x\mathrm{P}''$ s'évanouissent, quelle que soit z, on aura

$$x\int_0^z \mathrm{P}'\,dz = x\int_0^z \mathrm{P}''\,dz = 0,$$

et par suite les équations précédentes se réduiront à

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^x \mathrm{P}'\,dx &= \frac{a}{a^2+z^2}\int_0^x a\mathrm{P}\,dx, \\ \int_0^x \mathrm{P}''\,dx &= -\frac{z}{a^2+z^2}\int_0^x a\mathrm{P}\,dx. \end{aligned} \right.$$

Dans un grand nombre de cas, P' et P'' s'évanouiront par la supposition $x = \infty$. Alors, si l'on désigne $f(x)$ par p, on aura

$$\int_0^\infty a\mathrm{P}\,dx = \int_0^\infty af(ax)\,dx = \int_0^\infty p\,dx.$$

Cela posé, si, dans les équations (17), on fait $z = b$, et que l'on remplace $\int_0^\infty a\mathrm{P}\,dx$ par $\int_0^\infty p\,dx$, on obtiendra le théorème suivant.

Théorème III. — *Soit $f(x) = p$ une fonction de x telle que, si l'on fait*

$$f(ax \pm az\sqrt{-1}) = \mathrm{P}' \pm \mathrm{P}''\sqrt{-1},$$

Lorsque, dans cette dernière, on pose $f(x) = e^{-x}$, on obtient l'équation

$$(\mathrm{N})\quad \int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}(\cos bx + \sqrt{-1}\,\sin bx)\,dx = \frac{\cos nk - \sqrt{-1}\,\sin nk}{r^n}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx,$$

qui comprend les formules (e).

P″ et P′ conservent une valeur déterminée pour toutes les valeurs de x et de z comprises entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, $z = 0$, $z = b$, et qu'en outre xP′ et xP″ s'évanouissent, 1° pour $x = 0$, 2° pour $x = \infty$, quelle que soit d'ailleurs la valeur de z. Si l'on suppose, dans P′ et dans P″, $z = b$, on aura

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^\infty P'\,dx &= \frac{a}{a^2+b^2}\int_0^\infty p\,dx,\\ \int_0^\infty P''\,dx &= \frac{-b}{a^2+b^2}\int_0^\infty p\,dx. \end{aligned}\right.$$

Corollaire II. — Si, dans les équations (18), on suppose

$$f(x) = x^{n-1}\,F(x),$$

n étant un nombre réel quelconque, on aura, en faisant $z = b$,

$$P' \pm P''\sqrt{-1} = (a \pm b\sqrt{-1})^{n-1}\,x^{n-1}\,F(ax \pm bx\sqrt{-1}).$$

Soit, pour abréger,

$$F(x) = q,$$
$$F(ax \pm bx\sqrt{-1}) = Q' \pm Q''\sqrt{-1},$$
$$a = r\cos k, \quad b = r\sin k,$$

on aura

$$P' \pm P''\sqrt{-1} = r^{n-1}\left[\cos(n-1)k \pm \sqrt{-1}\sin(n-1)k\right](Q' \pm Q''\sqrt{-1}),$$
$$P' = r^{n-1}[Q'\cos(n-1)k - Q''\sin(n-1)k]x^{n-1},$$
$$P'' = r^{n-1}[Q'\sin(n-1)k + Q''\cos(n-1)k]x^{n-1},$$
$$\frac{a}{a^2+b^2} = \frac{\cos k}{r}, \quad \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{\sin k}{r}.$$

Cela posé, les équations (18) deviendront

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \cos(n-1)k\int_0^\infty Q'\,x^{n-1}\,dx - \sin(n-1)k\int_0^\infty Q''\,x^{n-1}\,dx &= \frac{\cos k}{r^n}\int_0^\infty q\,x^{n-1}\,dx,\\ \cos(n-1)k\int_0^\infty Q''\,x^{n-1}\,dx + \sin(n-1)k\int_0^\infty Q'\,x^{n-1}\,dx &= \frac{\sin k}{r^n}\int_0^\infty q\,x^{n-1}\,dx. \end{aligned}\right.$$

Si l'on ajoute ces deux équations, après avoir multiplié la première par $\cos(n-1)k$ et la seconde par $\sin(n-1)k$, puis, qu'on les retranche l'une de l'autre après avoir multiplié la première par $\sin(n-1)k$ et la seconde par $\cos(n-1)k$, on aura les deux suivantes

$$(20)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty Q'\, x^{n-1}\,dx = \frac{\cos nk}{r^n}\int_0^\infty q x^{n-1}\,dx, \\ \displaystyle\int_0^\infty Q''\, x^{n-1}\,dx = \frac{\sin nk}{r^n}\int_0^\infty q x^{n-1}\,dx. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$a^2+b^2=r^2,\quad \frac{b}{a}=\operatorname{tang}k,$$

et par suite

$$r=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}},\quad k=\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}.$$

La dernière de ces équations donne pour k une infinité de valeurs différentes. Mais comme, en supposant $b=0$, on doit avoir $Q'=F(ax)$, $Q''=0$, les équations (20) devront se réduire, dans cette hypothèse, à

$$\int_0^\infty Q'\, x^{n-1}\,dx = \frac{1}{a^n}\int_0^\infty q x^{n-1}\,dx,$$

$$\int_0^\infty Q''\, x^{n-1}\,dx = 0,$$

et par suite l'équation $b=0$ devra entraîner les deux suivantes

$$\cos nk = 1,$$
$$\sin nk = 0.$$

On satisfait à cette condition en prenant pour k le plus petit des arcs qui ont pour tangente $\frac{b}{a}\cdot$ Cela posé, si l'on change $F(x)=q$ en $f(x)=p$, et par suite Q' en P', Q'' en P'', on aura le théorème suivant.

Théorème IV. — *Soit $f(x)=p$ une fonction de x telle, que si l'on fait*

$$f(ax\pm xz\sqrt{-1})=P'\pm P''\sqrt{-1},$$

P' et P'' conservent une valeur déterminée pour toutes les valeurs de x et

de z comprises entre les limites $x=0$, $x=\infty$, $z=0$, $z=b$; et qu'en outre $x^n\mathrm{P}'$ et $x^n\mathrm{P}''$ s'évanouissent, 1° *pour $x=0$,* 2° *pour $x=\infty$, quelle que soit d'ailleurs la valeur de z. Si l'on suppose, dans* P′ *et dans* P″, *$z=b$, on aura*

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} \int_0^\infty \mathrm{P}' x^{n-1}\,dx &= \frac{\cos nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty p x^{n-1}\,dx,\\ \int_0^\infty \mathrm{P}'' x^{n-1}\,dx &= -\frac{\sin nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty p x^{n-1}\,dx, \end{aligned}\right.$$

k étant le plus petit arc qui ait pour tangente $\frac{b}{a}$.

On peut remarquer que les équations (18) ne sont qu'un cas particulier des équations (21). En effet, si l'on suppose dans celle-ci $n=1$, on aura

$$\frac{\cos nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}=\frac{\cos k}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{a}{a^2+b^2},\qquad \frac{\sin nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}=\frac{\sin k}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Ainsi le théorème (4) renferme le théorème (3).

Exemple I. — Soit

$$p=f(x)=e^{-x};$$

on aura

$$f(ax\pm bx\sqrt{-1})=e^{-ax}\cos bx\mp\sqrt{-1}\,e^{-ax}\sin bx,$$

et par suite

$$\mathrm{P}'=e^{-ax}\cos bx,\quad \mathrm{P}''=-e^{-ax}\sin bx.$$

Cela posé, les équations (21) deviendront

$$(e)\qquad \left\{\begin{aligned} \int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\cos bx\,dx &= \frac{\cos nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx,\\ \int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\sin bx\,dx &= \frac{\sin nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx. \end{aligned}\right.$$

Ces formules ont été données par Euler.

Exemple II. — Soit

$$p = f(x) = e^{-(x+c)^2}.$$

On aura

$$f(ax \pm bx\sqrt{-1}) = e^{b^2x^2-(ax+c)^2}\left[\cos 2bx(ax+c) \mp \sqrt{-1}\sin 2bx(ax+c)\right],$$

d'où l'on conclut

$$P' = e^{b^2x^2-(ax+c)^2}\cos 2bx(ax+c), \quad P'' = -e^{b^2x^2-(ax+c)^2}\sin 2bx(ax+c).$$

Cela posé, les équations (21) deviendront

$$(f)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{b^2x^2-(ax+c)^2}\cos[2bx(ax+c)]\,x^{n-1}\,dx = \frac{\cos nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-(x+c)^2}x^{n-1}\,dx, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{b^2x^2-(ax+c)^2}\sin[2bx(ax+c)]\,x^{n-1}\,dx = \frac{\sin nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-(x+c)^2}x^{n-1}\,dx. \end{cases}$$

Les deux équations précédentes supposent nécessairement $b < a$, ou tout au plus $b = a$. Sans cette condition, $x^n P'$ et $x^n P''$ cesseraient de s'évanouir pour $x = \infty$.

Si, dans les équations (f), on suppose

$$b = a, \quad 2ac = 1, \quad 2a^2 = m,$$

on aura

$$k = \frac{\pi}{4}, \quad a^2 + b^2 = m, \quad 2c = \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et par suite

$$(g)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\cos x(1+mx)\,dx = \frac{\cos\frac{\pi n}{4}}{m^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-x^2-\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}x}x^{n-1}\,dx, \\ \displaystyle\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\sin x(1+mx)\,dx = \frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{m^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-x^2-\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}x}x^{n-1}\,dx. \end{cases}$$

Si, dans ces dernières équations, on suppose $m = 0$, on aura

$$e^{-x^2-\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}x} = e^{-\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}x},$$

et par suite

$$\frac{1}{m^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-x^2-\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}x}x^{n-1}\,dx=\frac{1}{m^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}x}x^{n-1}\,dx=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

Cela posé, les équations (f) deviendront

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\cos x\,dx=\frac{\cos\frac{\pi n}{4}}{2^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx,$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\sin x\,dx=\frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{2^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

Ces dernières peuvent aussi se déduire des équations (e) trouvées par Euler.

On peut observer que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}x}x^{n-1}\,dx$$

est égale à

$$e^{\frac{1}{2m}}\int_{\frac{1}{\sqrt{2m}}}^\infty e^{-x^2}\left(x-\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}}\right)^{n-1}dx.$$

Lorsque n est un nombre entier, cette dernière dépend uniquement de l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2m}}}e^{-x^2}\,dx$.

Exemple III. — Soit

$$p=f(x)=e^{-x^2-\frac{m^2}{x^2}}.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{m^2}{(a^2+b^2)^2}=c^2,$$

on trouvera

$$f(ax\pm bx\sqrt{-1})=e^{-(a^2-b^2)\left(x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)}\left\{\cos\left[2ab\left(x^2-\frac{c^2}{x^2}\right)\right]\mp\sqrt{-1}\sin\left[2ab\left(x^2-\frac{c^2}{x^2}\right)\right]\right\};$$

d'où l'on conclut

$$\mathrm{P}' = e^{-(a^2-b^2)\left(x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)} \cos\left[2ab\left(x^2-\frac{c^2}{x^2}\right)\right],$$

$$\mathrm{P}'' = e^{-(a^2-b^2)\left(x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)} \sin\left[2ab\left(x^2-\frac{c^2}{x^2}\right)\right].$$

Cela posé, les équations (21) deviendront

$$(h)\quad\left\{\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-(a^2-b^2)\left(x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)} \sin\left[2ab\left(x^2-\frac{c^2}{x^2}\right)\right] x^{n-1}\,dx = \frac{\cos nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{c^2(a^2+b^2)}{x^2}} x^{n-1}\,dx,\\
&\int_0^\infty e^{-(a^2-b^2)\left(x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)} \cos\left[2ab\left(x^2-\frac{c^2}{x^2}\right)\right] x^{n-1}\,dx = \frac{\sin nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{c^2(a^2+b^2)}{x^2}} x^{n-1}\,dx.
\end{aligned}\right.$$

Les équations précédentes supposent évidemment $a < b$. Dans ces mêmes équations, les intégrales des seconds membres sont connues, toutes les fois que n est un nombre entier, mais impair. Si donc on fait, pour abréger,

$$a^2 - b^2 = \mathrm{A}, \quad 2ab = \mathrm{B},$$

on aura, dans le même cas, les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty e^{-\mathrm{A}\left(x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)} \cos \mathrm{B}\left(x^2-\frac{c^2}{x^2}\right) x^{n-1}\,dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-\mathrm{A}\left(x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)} \sin \mathrm{B}\left(x^2-\frac{c^2}{x^2}\right) x^{n-1}\,dx.$$

Exemple IV. — Soit

$$p = f(x) = \frac{1}{1+x};$$

on aura

$$f(ax \pm bx\sqrt{-1}) = \frac{1}{1+ax\pm bx\sqrt{-1}} = \frac{1+ax\mp bx\sqrt{-1}}{(1+ax)^2+b^2x^2};$$

d'où l'on conclut

$$\mathrm{P}' = \frac{1+ax}{1+2ax+(a^2+b^2)x^2}, \quad \mathrm{P}'' = \frac{-bx}{1+2ax+(a^2+b^2)x^2}.$$

Cela posé, les équations (21) deviendront

$$(i)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+ax}{1+2ax+(a^2+b^2)x^2}x^{n-1}\,dx = \frac{\cos nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi\cos nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin n\pi},\\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty \frac{bx}{1+2ax+(a^2+b^2)x^2}x^{n-1}\,dx = \frac{\sin nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi\sin nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin n\pi}.\end{cases}$$

Ces deux équations coïncident avec des formules déjà connues. La première se déduit aisément de la seconde, et, si dans cette dernière on suppose $a^2+b^2=1$, on aura

$$a=\cos k,\quad b=\sin k,$$

et par suite

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{1+2x\cos k+x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sin n\pi}\,\frac{\sin nk}{\sin k}.$$

C'est la formule (f) de la page 101 de la quatrième Partie des *Exercices de Calcul intégral* de M. Legendre.

IV.

TROISIÈME APPLICATION.

Faisons

$$M=x\cos z,\quad N=x\sin z,$$

$$P'\pm P''\sqrt{-1}=f(x\cos z\pm\sqrt{-1}\,x\sin z);$$

on aura

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\cos z,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\sin z,\quad \frac{\partial M}{\partial z}=-x\sin z,\quad \frac{\partial N}{\partial z}=x\cos z,$$

$$S=P'\cos z-P''\sin z,\quad U=-xP'\sin z-xP''\cos z,$$

$$T=P'\sin z+P''\cos z,\quad V=xP'\cos z-xP''\sin z.$$

Si l'on fait de plus $f(x)=p$, on aura en général

$$s=p,\quad u=0,$$

$$t=0,\quad v=0.$$

Cela posé, les équations (5) deviendront

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^x (\mathrm{P}'\cos z - \mathrm{P}''\sin z)\,dx - \int_0^x p\,dx = -x\int_0^z (\mathrm{P}'\sin z + \mathrm{P}''\cos z)\,dz,\\ &\int_0^x (\mathrm{P}''\sin z + \mathrm{P}''\cos z)\,dx \qquad\qquad = x\int_0^z (\mathrm{P}'\cos z - \mathrm{P}''\sin z)\,dz. \end{aligned}\right.$$

Exemple. — Soit

$$f(x) = p = e^{-x};$$

on aura

$$\mathrm{P}' \pm \mathrm{P}''\sqrt{-1} = e^{-x\cos z}\left[\cos(x\sin z) \mp \sqrt{-1}\sin(x\sin z)\right],$$

et par suite

$$\begin{aligned} &(\mathrm{P}' \pm \mathrm{P}''\sqrt{-1})(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)\\ &\quad = e^{-x\cos z}\left[\cos(z - x\sin z) \pm \sqrt{-1}\sin(z - x\sin z)\right]: \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} \mathrm{P}'\cos z - \mathrm{P}''\sin z &= e^{-x\cos z}\cos(z - x\sin z),\\ \mathrm{P}'\sin z + \mathrm{P}''\cos z &= e^{-x\cos z}\sin(z - x\sin z). \end{aligned}$$

Cela posé, les équations (22) deviendront

$$(k)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^x e^{-x\cos z}\cos(z - x\sin z)\,dx - \int_0^x e^{-x}\,dx = -x\int_0^z e^{-x\cos z}\sin(z - x\sin z)\,dz,\\ &\int_0^x e^{-x\cos z}\sin(z - x\sin z)\,dx \qquad\qquad = x\int_0^z e^{-x\cos z}\cos(z - x\sin z)\,dz. \end{aligned}\right.$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^x e^{-x}\,dx = 1 - e^{-x},$$

$$\int_0^x e^{-x\cos z}\cos(z - x\sin z)\,dx = 1 - e^{-x\cos z}\cos(x\sin z),$$

$$\int_0^x e^{-x\cos z}\sin(z - x\sin z)\,dx = e^{-x\cos z}\sin(x\sin z).$$

On aura donc par suite

$$(l)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^z e^{-x\cos z}\sin(z - x\sin z)\,dz = \frac{1}{x}\left[e^{-x\cos z}\cos(x\sin z) - e^{-x}\right],\\[2ex] \displaystyle\int_0^z e^{-x\cos z}\cos(z - x\sin z)\,dz = \frac{1}{x}e^{-x\cos z}\sin(x\sin z).\end{cases}$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{1}{x}\left[e^{-x\cos z}\cos(x\sin z) - e^{-x}\right] = X_1,$$

$$\frac{1}{x}e^{-x\cos z}\sin(x\sin z) = X_2,$$

et que l'on différentie n fois par rapport à x les deux membres de chacune des équations (l), on trouvera

$$(m)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^z e^{-x\cos z}\sin(nz - x\sin z)\,dz = (-1)^n\frac{d^nX_1}{dx^n},\\[2ex] \displaystyle\int_0^z e^{-x\cos z}\cos(nz - x\sin z)\,dz = (-1)^n\frac{d^nX_2}{dx^n}.\end{cases}$$

On voit par cet exemple que le passage du réel à l'imaginaire peut servir à trouver de nouvelles intégrales, non seulement définies, mais encore indéfinies.

V.

QUATRIÈME APPLICATION.

Faisons

$$M = ax^2,\quad N = xz,$$

a étant une constante arbitraire,

$$P' \pm P''\sqrt{-1} = f(ax^2 \pm xz\sqrt{-1}).$$

On aura

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 2ax,\quad \frac{\partial N}{\partial x} = z,\quad \frac{\partial M}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial N}{\partial z} = x,$$

$$S = 2axP' - zP'',\quad U = -xP'',$$

$$T = zP' + 2anP'',\quad V = xP'.$$

Si l'on fait de plus $f(ax^2) = \mathrm{P}$, on aura en général

$$s = 2ax\mathrm{P}, \quad u = 0,$$
$$t = 0, \qquad v = 0.$$

Cela posé, les équations (5) deviendront

$$(23) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x (2ax\mathrm{P}' - z\mathrm{P}'')\,dx - \int_0^x 2ax\mathrm{P}\,dx = -x\int_0^z \mathrm{P}''\,dz, \\ \displaystyle\int_0^x (z\mathrm{P}' + 2ax\mathrm{P}'')\,dx = x\int_0^z \mathrm{P}'\,dz. \end{cases}$$

Corollaire I. — Si la valeur extrême de x est telle que $x\mathrm{P}'$ et $x\mathrm{P}''$ s'évanouissent, quel que soit z, les équations (23) se réduiront à

$$(24) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x (2ax\mathrm{P}' - z\mathrm{P}'')\,dx = \int_0^x 2ax\mathrm{P}\,dx, \\ \displaystyle\int_0^x (z\mathrm{P}' + 2ax\mathrm{P}'')\,dx = 0. \end{cases}$$

Dans un grand nombre de cas, P' et P'' s'évanouiront par la supposition $x = \infty$. Alors, si l'on désigne $f(x)$ par p, on aura

$$\int_0^\infty 2ax\mathrm{P}\,dx = \int_0^\infty 2axf(ax^2)\,dx = \int_0^\infty p\,dx.$$

Cela posé, si, dans les équations (24), on fait $z = b$, et que l'on remplace $\int 2ax\mathrm{P}\,dx$ par $\int p\,dx$, on obtiendra le théorème suivant.

Théorème V. — *Soit $f(x) = p$ une fonction de x telle, que, si l'on fait*

$$f(ax^2 \pm xz\sqrt{-1}) = \mathrm{P}' \pm \mathrm{P}''\sqrt{-1},$$

P' et P'' conservent une valeur déterminée pour toutes les valeurs de x et de z comprises entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, $z = 0$, $z = b$; et qu'en outre $x\mathrm{P}'$ et $x\mathrm{P}''$ s'évanouissent, 1° pour $x = 0$, 2° pour $x = \infty$, quelle que soit d'ailleurs la valeur de z. Si l'on suppose, dans P' et dans P'',

$z = b$, *on aura*

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty (2axP' - bP'')\,dx = \int_0^\infty p\,dx,\\ &\int_0^\infty (bP' + 2axP'')\,dx = 0.\end{aligned}\right.$$

Exemple. — Soit $f(x) = e^{-x^2}$; on aura

$$f(ax^2 \pm bx\sqrt{-1}) = e^{-a^2x^4+b^2x^2}(\cos 2abx^3 \mp \sin 2abx^3);$$

et par suite

$$P' = e^{-a^2x^4+b^2x^2}\cos 2abx^3, \quad P'' = -e^{-a^2x^4+b^2x^2}\sin 2abx^3.$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}.$$

Cela posé, les équations (25) deviendront

$$(n)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-a^2x^4+b^2x^2}(2ax\cos 2abx^3 + b\sin 2abx^3)\,dx = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}},\\ &\int_0^\infty e^{-a^2x^4+b^2x^2}(b\cos 2abx^3 - 2ax\sin 2abx^3)\,dx = 0,\end{aligned}\right.$$

a^2 étant > 0.

Il suit de ces dernières équations qu'on peut exprimer les deux intégrales définies

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^4+b^2x^2}\cos 2abx^3\,x\,dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^4+b^2x^2}\sin 2abx^3\,x\,dx,$$

au moyen des deux suivantes :

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^4+b^2x^2}\cos 2abx^3\,dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^4+b^2x^2}\sin 2abx^3\,dx.$$

Scolie. — On voit par les applications précédentes l'usage que l'on peut faire des équations trouvées dans le § I, lorsque les fonctions de x et de z, désignées par S, T, U, V, conservent toujours entre les limites de l'intégration une valeur déterminée. Nous examinerons bientôt les modifications que l'hypothèse contraire peut apporter aux divers théorèmes énoncés ci-dessus. Mais, avant d'aller plus loin, il ne sera pas inutile de faire voir comment, dans certains cas particuliers, chacune des équations (2) peut elle-même se décomposer en deux nouvelles équations de même forme. Tel est l'objet du paragraphe suivant.

VI.

DE LA SÉPARATION DES EXPONENTIELLES.

Soient q et r deux fonctions de x, et faisons

$$p = q \cos r.$$

Soient, de plus, M et N deux fonctions données de x et de z, et supposons que la substitution de $M \pm N\sqrt{-1}$ au lieu de x change

$$p \text{ en } P' \pm P''\sqrt{-1},$$
$$q \text{ en } Q' \pm Q''\sqrt{-1},$$
$$r \text{ en } R' \pm R''\sqrt{-1},$$

on aura

$$P' \pm P''\sqrt{-1} = (Q' \pm Q''\sqrt{-1})\cos(R' \pm R''\sqrt{-1});$$

et, par suite, on aura

$$(26) \quad \begin{cases} 2P' = e^{R''}(Q'\cos R' + Q''\sin R') + e^{-R''}(Q'\cos R' - Q''\sin R'), \\ 2P'' = e^{R''}(Q''\cos R' - Q'\sin R') + e^{-R''}(Q''\cos R' + Q'\sin R'). \end{cases}$$

Si l'on conserve d'ailleurs à S, T, U, V les mêmes significations que dans le § I, l'équation (2) sera toujours satisfaite. D'ailleurs, si dans S, T, U, V on substitue pour P' et P'' leurs valeurs tirées des équations (26), on trouvera

$$(27)\qquad \begin{cases} S = \frac{1}{2}S_1\, e^{R''} + \frac{1}{2}S_2\, e^{-R''}, & U = \frac{1}{2}U_1\, e^{R''} + \frac{1}{2}U_2\, e^{-R''}, \\ T = \frac{1}{2}T_1\, e^{R''} + \frac{1}{2}T_2\, e^{-R''}, & V = \frac{1}{2}V_1\, e^{R''} + \frac{1}{2}V_2\, e^{-R''}, \end{cases}$$

S_1, T_1, U_1, V_1 étant déterminées par les équations

$$(28)\qquad \begin{cases} S_1 = (Q' \cos R' + Q'' \sin R') \dfrac{\partial M}{\partial x} - (Q'' \cos R' - Q' \sin R') \dfrac{\partial N}{\partial x}, \\ T_1 = (Q' \cos R' + Q'' \sin R') \dfrac{\partial N}{\partial x} + (Q'' \cos R' - Q' \sin R') \dfrac{\partial M}{\partial x}, \\ U_1 = (Q' \cos R' + Q'' \sin R') \dfrac{\partial M}{\partial z} - (Q'' \cos R' - Q' \sin R') \dfrac{\partial N}{\partial z}, \\ V_1 = (Q' \cos R' - Q'' \sin R') \dfrac{\partial N}{\partial z} + (Q'' \cos R' + Q' \sin R') \dfrac{\partial M}{\partial z}, \end{cases}$$

et S_2, T_2, U_2, V_2 par les équations

$$(29)\qquad \begin{cases} S_2 = (Q' \cos R' - Q'' \sin R') \dfrac{\partial M}{\partial x} - (Q'' \cos R' + Q' \sin R') \dfrac{\partial N}{\partial x}, \\ T_2 = (Q' \cos R' - Q'' \sin R') \dfrac{\partial N}{\partial x} + (Q'' \cos R' + Q' \sin R') \dfrac{\partial M}{\partial x}, \\ U_2 = (Q' \cos R' - Q'' \sin R') \dfrac{\partial M}{\partial z} - (Q'' \cos R' + Q' \sin R') \dfrac{\partial N}{\partial z}, \\ V_2 = (Q' \cos R' - Q'' \sin R') \dfrac{\partial N}{\partial z} + (Q'' \cos R' + Q' \sin R') \dfrac{\partial M}{\partial z}. \end{cases}$$

Les valeurs de S, T, U, V déterminées par les équations (27) doivent satisfaire aux équations (2), quelles que soient d'ailleurs les valeurs de x et de z; mais, comme chacune des quantités S, T, U, V est composée de deux parties, dont la première seule renferme l'exponentielle $e^{R''}$, il faudra nécessairement, pour que chacune des équations (2) puisse être satisfaite, que la première partie de $\frac{\partial S}{\partial z}$ détruise la première partie de $\frac{\partial U}{\partial x}$, et que la première partie de $\frac{\partial T}{\partial z}$ détruise la première partie de $\frac{\partial V}{\partial x}$. De même les secondes parties de $\frac{\partial S}{\partial z}$ et $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial z}$ et $\frac{\partial U}{\partial x}$, c'est-à-dire, les parties qui renferment l'exponentielle $e^{-R''}$, devront se détruire mutuellement dans les équations (2). On aura donc

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(S_1 e^{R''})}{\partial z} &= \frac{\partial(U_1 e^{R''})}{\partial x}, \\ \frac{\partial(T_1 e^{R''})}{\partial z} &= \frac{\partial(V_1 e^{R''})}{\partial x}; \end{aligned} \right.$$

et

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(S_2 e^{-R''})}{\partial z} &= \frac{\partial(U_2 e^{-R''})}{\partial x}, \\ \frac{\partial(T_2 e^{-R''})}{\partial z} &= \frac{\partial(V_2 e^{-R''})}{\partial x}. \end{aligned} \right.$$

On voit ici comment la séparation des exponentielles $e^{R''}$, $e^{-R''}$, sert à diviser chacune des équations (2) en deux autres équations de même forme. On peut d'ailleurs vérifier directement par la seule différentiation chacune des équations (30) et (31). On serait encore arrivé à ces mêmes équations, si, au lieu de supposer d'abord

$$p = q \cos r,$$

on eût supposé

$$p = q \sin r.$$

On peut déduire facilement les équations (31) des équations (30), en changeant à la fois les signes de R′ et de R″. Il est évident *a priori* que ce changement est permis; car il revient à changer simplement le signe de la fonction r. Enfin, pour déduire les équations (30) et (31) des équations (2), il suffit de supprimer successivement, dans les valeurs de P′ et de P″, les parties qui renferment l'exponentielle $e^{-R''}$, et celles qui renferment l'exponentielle $e^{R''}$.

La méthode par laquelle nous avons obtenu les équations (30) et (31) pourrait encore servir, dans plusieurs cas, à partager chacune de celles-ci en deux autres de même forme. C'est ce qui arriverait, par exemple, si l'on supposait $q = k \cos l$, k et l étant deux nouvelles fonctions de x. Mais nous ne nous arrêterons pas plus longtemps sur la méthode dont il s'agit, et nous nous bornerons à déduire des équations déjà trouvées quelques conséquences dignes de remarque.

Supposons qu'après avoir multiplié les deux membres de chacune des équations (31) par $dx\,dz$, on se propose de les intégrer, par rapport à x et à z, entre les limites o et x, o et z de ces deux variables. Désignons par

$$s_2 \text{ et } t_2 \quad \text{ce que deviennent} \quad S_2 \text{ et } T_2 \quad \text{quand} \quad z = 0,$$

et par

$$u_2 \text{ et } v_2 \quad \text{ce que deviennent} \quad U_2 \text{ et } V_2 \quad \text{quand} \quad x = 0,$$

enfin par

$$r' \pm r'' \sqrt{-1} \quad \text{et} \quad r'_1 \pm r''_1 \sqrt{-1} \quad \text{ce que devient} \quad R' \pm R'' \sqrt{-1}$$
$$\text{quand} \quad x = 0, \quad \text{ou quand} \quad z = 0.$$

Si, entre les limites de l'intégration, les quatre quantités

$$S_2 e^{-R''}, \quad T_2 e^{-R''}, \quad U_2 e^{-R''}, \quad V_2 e^{-R''}$$

conservent toujours une valeur déterminée, on aura généralement

$$(32) \left\{ \begin{aligned} &\int_0^x S_2 e^{-R''} dx - \int_0^x s_2 e^{-r''_1} xd = \int_0^z U_2 e^{-R''} dz - \int_0^z u_2 e^{-r''} dz \quad \text{[1]}, \\ &\int_0^x T_2 e^{-R''} dx - \int_0^x t_2 e^{-r''_1} dx = \int_0^z V_2 e^{-R''} dz - \int_0^z v_2 e^{-r''} dz. \end{aligned} \right.$$

En partant des équations (30), on arriverait encore à des équations

(1) Les équations (32) peuvent être remplacées par la seule formule

$$(\text{O}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^x \left(S_2 + T_2 \sqrt{-1}\right) e^{-R''} dx - \int_0^x \left(s_2 + t_2 \sqrt{-1}\right) e^{-r''_1} dx \\ &= \int_0^z \left(U_2 + V_2 \sqrt{-1}\right) e^{-R''} dz - \int_0^z \left(u_2 + v_2 \sqrt{-1}\right) e^{-r''} dz. \end{aligned} \right.$$

Cette formule, dans laquelle on a

$$S_2 + T_2 \sqrt{-1} = \left(Q' + Q'' \sqrt{-1}\right) e^{(R' + R'' \sqrt{-1}) \sqrt{-1}} \frac{\partial\left(M + N \sqrt{-1}\right)}{\partial x},$$

$$U_2 + V_2 \sqrt{-1} = \left(Q' + Q'' \sqrt{-1}\right) e^{(R' + R'' \sqrt{-1}) \sqrt{-1}} \frac{\partial\left(M + N \sqrt{-1}\right)}{\partial z},$$

se déduira immédiatement de l'équation (A), si l'on substitue à la fonction $f(x) = p$, non semblables aux précédentes, mais que l'on peut déduire immédiatement de celles-ci, en changeant simplement les signes des quantités r, r', r'', R' et R''.

Corollaire I. — Pour appliquer les équations (32), il est nécessaire

pas le produit $q\cos r$, mais le suivant,

$$qe^{r\sqrt{-1}}.$$

En posant $M = x$, $N = z$, on tirera de l'équation (O)

$$(\mathrm{P})\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^x (\mathrm{Q}'+\mathrm{Q}''\sqrt{-1})e^{(\mathrm{R}'+\mathrm{R}''\sqrt{-1})\sqrt{-1}}\,dx - \int_0^x qe^{r\sqrt{-1}}\,dx \\ &= \sqrt{-1}\Big[\int_0^z (\mathrm{Q}'+\mathrm{Q}''\sqrt{-1})e^{(\mathrm{R}'+\mathrm{R}''\sqrt{-1})\sqrt{-1}}\,dz \\ &\qquad - \int_0^z (q'+q''\sqrt{-1})e^{(r'+r''\sqrt{-1})\sqrt{-1}}\,dz\Big]; \end{aligned}\right.$$

puis, en admettant que $e^{-\mathrm{R}''}$ s'évanouisse pour $z = \infty$, on trouvera

$$(\mathrm{Q})\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^\infty qe^{r\sqrt{-1}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{-1}}\Big[&\int_0^z (\mathrm{Q}'+\mathrm{Q}''\sqrt{-1})e^{(\mathrm{R}'+\mathrm{R}''\sqrt{-1})\sqrt{-1}}\,dz \\ &- \int_0^z (q'+q''\sqrt{-1})e^{(r'+r''\sqrt{-1})\sqrt{-1}}\,dz\Big]. \end{aligned}\right.$$

En remplaçant $e^{r\sqrt{-1}}$ par $e^{-r\sqrt{-1}}$, et supposant que $e^{\mathrm{R}''}$ s'évanouit pour $z = \infty$, on trouvera, au lieu de la formule (Q),

$$(\mathrm{R})\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^\infty qe^{-r\sqrt{-1}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{-1}}\Big[&\int_0^z (\mathrm{Q}'+\mathrm{Q}''\sqrt{-1})e^{-(\mathrm{R}'+\mathrm{R}''\sqrt{-1})\sqrt{-1}}\,dz \\ &- \int_0^z (q'+q''\sqrt{-1})e^{-(r'+r''\sqrt{-1})\sqrt{-1}}\,dz\Big]. \end{aligned}\right.$$

Les formules (P), (Q), (R) peuvent être substituées aux formules (33), (34) et (35).

On voit, par ce qui précède, que les formules déduites de la séparation des exponentielles sont précisément celles que l'on obtient, quand on remplace la fonction réelle $f(x) = p$ par la fonction imaginaire

$$qe^{r\sqrt{-1}} = q\cos r + \sqrt{-1}\,q\sin r.$$

De plus, il est évident que, les fonctions q et r étant l'une et l'autre entièrement arbitraires, on pourra en dire autant des fonctions $q\cos r$ et $q\sin r$.

de donner à M et à N des valeurs déterminées. Parmi les diverses hypothèses que l'on peut faire à cet égard, la plus simple est celle que nous avons admise dans le § II, et dans laquelle

$$M = x, \quad N = z.$$

On a, dans ce cas,

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = 1,$$

et, par suite, les équations (29) se réduisent à

$$S_2 = V_2 = Q' \cos R' - Q'' \sin R', \quad T_2 = -U_2 = Q'' \cos R' + Q' \sin R'.$$

Soit de plus

$$q = f(x), \quad r = F(x),$$

$$f(\pm z\sqrt{-1}) = q' \pm q''\sqrt{-1}, \quad F(\pm z\sqrt{-1}) = r' \pm r''\sqrt{-1},$$

on aura

$$s_2 = q\cos r, \quad u_2 = q' \cos r' - q'' \sin r',$$

$$t_2 = q \sin r, \quad v_2 = q'' \cos r' + q' \sin r'.$$

Cela posé, les équations (32) deviendront

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^x (Q' \cos R' - Q'' \sin R')e^{-R''}dx - \int_0^x q\cos r\,dx \\ &= -\int_0^z (Q'' \cos R' + Q' \sin R')e^{-R''}dz + \int_0^z (q'' \cos r' + q' \sin r')e^{-r''}dz, \\ &\int_0^x (Q'' \cos R'' + Q' \sin R')e^{-R''}dx - \int_0^x q\sin r\,dx \\ &= \int_0^z (Q' \cos R' - Q'' \sin R')e^{-R''}dz - \int_0^z (q' \cos r' - q'' \sin r')e^{-r''}dz. \end{aligned}\right.$$

Les mêmes équations subsisteront encore, si l'on échange à la fois les signes des cinq quantités r, r', r'', R', R''.

Dans un grand nombre de cas, si l'on suppose $z=\infty$, l'une des deux quantités $e^{R''}$, $e^{-R''}$, s'évanouira. Supposons, par exemple, que ce soit $e^{-R''}$. Dans cette hypothèse, les deux quantités

$$(Q' \cos R' - Q'' \sin R')\, e^{-R''},$$
$$(Q'' \cos R' + Q' \sin R')\, e^{-R''},$$

s'évanouiront en général, quelle que soit la valeur de x; et par suite les équations (33) se réduiront à

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^x q \cos r\, dx \\ &\quad = \int_0^\infty (Q'' \cos R' + Q' \sin R')\, e^{-R''} dz - \int_0^\infty (q'' \cos r' + q' \sin r')\, e^{-r''} dz, \\ &\int_0^x q \sin r\, dx \\ &\quad = \int_0^\infty (Q'' \sin R' - Q' \cos R')\, e^{-R''} dz - \int_0^\infty (q'' \sin r' - q' \cos r')\, e^{-r''} dz. \end{aligned}\right.$$

Si $e^{R''}$ s'évanouissait pour des valeurs infinies de z, il faudrait changer, dans les équations précédentes, les signes de r, r', r'', R', R'', et l'on aurait, par suite,

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^x q \cos r\, dx \\ &\quad = \int_0^\infty (Q'' \cos R' - Q' \sin R')\, e^{R''} dz - \int_0^\infty (q'' \cos r' - q' \sin r')\, e^{r''} dz, \\ &\int_0^x q \sin r\, dx \\ &\quad = \int_0^\infty (Q'' \cos R' + Q' \cos R')\, e^{R''} dz - \int_0^\infty (q'' \sin r' + q' \cos r')\, e^{r''} dz. \end{aligned}\right.$$

Les équations (34) et (35) sont à la fois comprises dans les deux formules suivantes :

$$(36)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^x q\cos r\,dx\\ \displaystyle\quad=\int_0^\infty (Q''\cos R'\pm Q'\sin R')e^{\mp R''}dz-\int_0^\infty (q''\cos r'\pm q'\sin r')e^{\mp r''}dz,\\ \displaystyle\int_0^x q\sin r\,dx\\ \displaystyle\quad=\int_0^\infty (Q''\sin R'\mp Q'\cos R')e^{\mp R''}dz-\int_0^\infty (q''\sin r'\mp q'\sin r')e^{\mp r''}dz,\end{cases}$$

où l'on doit admettre le signe supérieur, lorsque $e^{-R''}$ s'évanouit pour $z=\infty$, et le signe inférieur dans le cas contraire.

Si l'on suppose, dans les équations (36), $q=1$, on aura $Q'=q'=1$, $Q''=q''=0$, et, par suite,

$$(37)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \cos r\,dx=\pm\int_0^\infty e^{\mp R''}\sin R'\,dz\mp\int_0^\infty e^{\mp r''}\sin r'\,dz,\\ \displaystyle\int_0^x \sin r\,dx=\mp\int_0^\infty e^{\mp R''}\cos R'\,dz\pm\int_0^\infty e^{\mp r''}\cos r'\,dz,\end{cases}$$

le choix des signes devant toujours être fait de la même manière.

Les conditions nécessaires pour que les équations (36) et (37) puissent avoir lieu sont évidemment remplies toutes les fois que q et r sont des fonctions rationnelles et entières de x. Mais il est facile de s'assurer que les mêmes équations subsistent encore dans plusieurs autres hypothèses. Nous allons maintenant appliquer ces formules générales à quelques exemples.

Exemple I. — Soit $r=F(x)=x^2$, on aura

$$R'=x^2-z^2,\quad R''=2xz,$$
$$r'=-z^2,\qquad r''=0.$$

Cela posé, si la seconde limite de x est positive,

$$e^{-R''}=e^{-2xz}$$

deviendra nul pour $z=\infty$, et, par suite, on devra, dans les équations (37), choisir le signe supérieur. De plus, les intégrales

$$-\int_0^\infty e^{-r''}\sin r'\,dz,\quad +\int_0^\infty e^{-r''}\cos r'\,dz$$

se réduiront, dans le cas présent, à

$$\int_0^\infty \sin z^2\,dz=\frac{1}{2}\int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}}\sin z\,dz,\qquad \int_0^\infty \cos z^2\,dz=\frac{1}{2}\int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}}\cos z\,dz,$$

et, en vertu des équations (e) du § II, elles seront toutes deux égales à

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty z^{\frac{1}{2}}e^{-z}\,dz=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}}.$$

Cela posé, les équations (37) deviendront

$$\int_0^x \cos x^2\,dx=2^{-\frac{3}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}+\int_0^\infty e^{-2xz}\sin(x^2-z^2)\,dz,$$

$$\int_0^x \sin x^2\,dx=2^{-\frac{3}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}-\int_0^\infty e^{-2xz}\cos(x^2-z^2)\,dz.$$

En développant les seconds membres de ces équations, et changeant x en $x^{\frac{1}{2}}$, on aura

$$(o)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\cos x\,dx\\&\quad=2^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}+2\sin x\int_0^\infty e^{-2x^{\frac{1}{2}}z}\cos z^2\,dz-2\cos x\int_0^\infty e^{-2x^{\frac{1}{2}}z}\sin z^2\,dz,\\&\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\sin x\,dx\\&\quad=2^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}-2\sin x\int_0^\infty e^{-2x^{\frac{1}{2}}z}\sin z^2\,dz-2\cos x\int_0^\infty e^{-2x^{\frac{1}{2}}z}\cos z^2\,dz.\end{aligned}\right.$$

Exemple II. — Soit $r=\mathrm{F}(x)=ax$, on aura $\mathrm{R}'=ax$, $\mathrm{R}''=az$,

$r' = 0$, $r'' = az$, et, par suite, les équations (34) deviendront

$$(38)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x q \cos ax\, dx \\ \displaystyle\quad = \cos ax \int_0^\infty Q'' e^{-az} dz + \sin ax \int_0^\infty Q' e^{-az} dz - \int_0^\infty q'' e^{-az} dz, \\ \displaystyle\int_0^x q \sin ax\, dx \\ \displaystyle\quad = \sin ax \int_0^\infty Q'' e^{-az} dz - \cos ax \int_0^\infty Q' e^{-az} dz + \int_0^\infty q' e^{-az} dz. \end{cases}$$

Supposons maintenant $a = 1$, $q = f(x) = x^n$, n étant un nombre réel pris à volonté; on aura

$$Q' \pm Q'' \sqrt{-1} = (x \pm z\sqrt{-1})^n;$$

et si l'on désigne par $arc\, tang \frac{z}{x}$ le plus petit des arcs qui ont pour tangente $\frac{z}{x}$, on trouvera

$$Q' = (x^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} \cos\left(n\, arc\, tang \frac{z}{x}\right), \quad Q'' = (x^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} \sin\left(n\, arc\, tang \frac{z}{x}\right),$$

$$q' = z^n \cos\frac{n\pi}{2}, \quad q'' = z^n \sin\frac{n\pi}{2}.$$

(Il est nécessaire de choisir le plus petit des arcs qui ont pour tangente $\frac{z}{x}$, afin que la valeur de Q' se réduise à x^n, et celle de Q'' à zéro, quand $z = 0$.)

Cela posé, les équations (38) deviendront

$$(p)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x x^n \cos x\, dx \\ \displaystyle\quad = \cos x \int_0^\infty Q'' e^{-z} dz + \sin x \int_0^\infty Q' e^{-z} dz - \sin\frac{n\pi}{2} \int_0^\infty z^n e^{-z} dz, \\ \displaystyle\int_0^x x^n \sin x\, dx \\ \displaystyle\quad = \sin x \int_0^\infty Q'' e^{-z} dz - \cos x \int_0^\infty Q' e^{-z} dz + \cos\frac{n\pi}{2} \int_0^\infty z^n e^{-z} dz. \end{cases}$$

Si l'on développe en séries les valeurs de Q' et de Q'', on aura

$$Q' = x^n - \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} z^2 + \ldots,$$

$$Q'' = n x^{n-1} z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} z^3 + \ldots.$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^\infty z^k e^{-z} dz = 1.2.3\ldots k.$$

Par suite, on aura

$$\int_0^\infty Q' e^{-z} dz = x^n - n(n-1) x^{n-2} + \ldots,$$

$$\int_0^\infty Q'' e^{-z} dz = n x^{n-1} - n(n-1)(n-3) x^{n-3} + \ldots.$$

Si n est entier, ces deux dernières séries seront composées d'un nombre fini de termes, et les équations (p) donneront les formules connues

$$(q)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^x x^n \cos x\, dx = {} & [x^n - n(n-1)x^{n-2} + \ldots] \sin x \\ & + [n x^{n-1} - n(n-1)(n-2) x^{n-3} + \ldots] \cos x - 1.2.3\ldots n \sin \frac{\pi n}{2}, \\ \int_0^x x^n \sin x\, dx = {} & -[x^n - n(n-1)x^{n-2} + \ldots] \cos x \\ & + [n x^{n-1} - n(n-1)(n-2) x^{n-3} + \ldots] \sin x + 1.2.3\ldots n \cos \frac{\pi n}{2}. \end{aligned}\right.$$

Si, dans les équations (p), on suppose $n = -\frac{1}{2}$, on aura

$$-\sin \frac{n\pi}{2} \int_0^\infty z^n e^{-z} dz = \cos \frac{n\pi}{2} \int_0^\infty z^n e^{-z} dz = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}};$$

et, par suite,

$$(r)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^x x^{-\frac{1}{2}} \cos x\, dx &= 2^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} + \sin x \int_0^\infty Q' e^{-z} dz + \cos x \int_0^\infty Q'' e^{-z} dz, \\ \int_0^x x^{-\frac{1}{2}} \sin x\, dx &= 2^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} + \sin x \int_0^\infty Q'' e^{-z} dz - \cos x \int_0^\infty Q' e^{-z} dz, \end{aligned}\right.$$

Q' et Q'' étant déterminées par l'équation

$$(x \pm z\sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}} = Q' \pm Q''\sqrt{-1},$$

d'où l'on conclut

$$Q' = \left[\frac{\sqrt{x^2+z^2}+x}{2(x^2+z^2)}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad Q'' = -\left[\frac{\sqrt{x^2+z^2}-x}{2(x^2+z^2)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on compare maintenant les équations (r) aux équations (o), on trouvera

$$(s)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \left[\frac{\sqrt{x^2+z^2}+x}{2(x^2+z^2)}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-z}dz = 2\int_0^\infty e^{-2x^{\frac{1}{2}}z}\cos z^2\,dz,\\ &\int_0^\infty \left[\frac{\sqrt{x^2+z^2}-x}{2(x^2+z^2)}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-z}dz = 2\int_0^\infty e^{-2x^{\frac{1}{2}}z}\sin z^2\,dz.\end{aligned}\right.$$

En supposant, dans ces dernières équations, $x = 0$, on trouvera

$$\int_0^\infty \cos z^2\,dz = \int_0^\infty \sin z^2\,dz = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}}e^{-z}dz = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}},$$

ce qui s'accorde avec ce que l'on a déjà trouvé.

Exemple III. — Soit toujours $r = F(x) = ax$, et faisons de plus

$$q = f(x) = \frac{1}{1+x};$$

on aura

$$Q' + Q''\sqrt{-1} = \frac{1}{1+x+z\sqrt{-1}} = \frac{1+x-z\sqrt{-1}}{(1+x)^2+z^2},$$

et, par suite,

$$Q' = \frac{1+x}{(1+x)^2+z^2}, \quad Q'' = -\frac{z}{(1+x)^2+z^2},$$

$$q' = \frac{1}{1+z^2}, \qquad q'' = -\frac{z}{1+z^2}.$$

Cela posé, les équations (38) deviendront

$$(t)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{\cos ax}{1+x}\,dx \\ \displaystyle\quad = \int_0^\infty \frac{z}{1+z^2}\,e^{-az}dz + \sin ax \int_0^\infty \frac{1+x}{(1+x)^2+z^2}\,e^{-az}dz - \cos ax \int_0^\infty \frac{z}{(1+x)^2+z^2}\,e^{-az}dz, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{\sin ax}{1+x}\,dx \\ \displaystyle\quad = \int_0^\infty \frac{1}{1+z^2}\,e^{-az}dz - \sin ax \int_0^\infty \frac{z}{(1+x)^2+z^2}\,e^{-az}dz - \cos ax \int_0^\infty \frac{1+x}{(1+x)^2+z^2}\,e^{-az}dz. \end{cases}$$

Corollaire II. — On voit, par les exemples précédents, comment, au moyen des équations (36) et (37), on peut transformer des intégrales indéfinies de la forme

$$\int_0^x p \cos r\,dx, \quad \int_0^x p \sin r\,dx,$$

en des intégrales définies qui renferment des exponentielles dont la valeur décroisse à mesure que la variable augmente. Ces dernières intégrales sont relatives à une nouvelle variable z, et doivent être prises entre les limites 0 et ∞ de cette variable. Elles renferment en outre la valeur extrême de x, qui doit y être considérée comme constante. Elles se calculent, en général, plus facilement que les intégrales indéfinies qui leur correspondent, parce que les fonctions de z, placées sous le signe $\int$, deviennent insensibles pour de grandes valeurs de z. Il arrive souvent aussi que ces fonctions conservent le même signe entre les deux limites de l'intégrale, c'est-à-dire, pour toutes les valeurs réelles et positives de z; ce qui permet d'obtenir facilement des limites entre lesquelles la valeur de l'intégrale se trouve comprise. C'est ce qui a lieu dans le troisième exemple, où les fonctions

$$\frac{z}{1+z^2}\,e^{-az}, \quad \frac{z}{(1+x)^2+z^2}\,e^{-az}, \quad \frac{1}{(1+x)^2+z^2}\,e^{-az},$$

placées sous le signe $\int$ dans les intégrales relatives à z, satisfont évidemment à la condition énoncée. La même condition se trouve encore remplie dans l'exemple II, lorsqu'on suppose $\pm n < 1$. En effet, les intégrales relatives à z et comprises dans les seconds membres des équations (p), sont

$$\int_0^\infty Q' e^{-z} dz,\quad \int_0^\infty Q'' e^{-z} dz,\quad \int_0^\infty z^n e^{-z} dz,$$

Q' et Q'' étant déterminées par les équations

$$Q' = (x^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} \cos\left(n \; arc\,tang \frac{z}{x}\right),\quad Q'' = (x^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} \sin\left(n \; arc\,tang \frac{z}{x}\right),$$

où l'arc $arc\,tang \frac{z}{x}$ est le plus petit de ceux qui ont pour tangente $\frac{z}{x}$, et par conséquent moindre que $\frac{\pi}{2}$. Cela posé, si n est positif et < 1, l'arc désigné par $n \; arc\,tang \frac{z}{x}$ étant plus petit que $\frac{\pi}{2}$, son sinus et son cosinus seront toujours positifs, et, par suite, il en sera de même des trois fonctions

$$Q' e^{-z},\quad Q'' e^{-z},\quad z^n e^{-z}.$$

Mais si, n étant négatif, on a $-n < 1$, les deux fonctions $Q' e^{-z}$, $z^n e^{-z}$, seront positives, et la troisième, $Q'' e^{-z}$, sera toujours négative.

Les équations (36) et (37) et celles qui s'en déduisent peuvent servir principalement à déterminer les valeurs des intégrales indéfinies de la forme

$$\int_0^x p \cos r \, dx,\quad \int_0^x p \sin r \, dx,$$

lorsque la valeur de x devient très considérable. En effet, dans ces mêmes équations, les parties des intégrales relatives à z qui correspondent à de grandes valeurs de z, étant en général fort petites, si la valeur de x devient très considérable, on pourra, sans erreur sensible, négliger, avant l'intégration, z relativement à x. Cette circonstance permettra de simplifier les valeurs des intégrales définies relatives à z, et, par suite, d'obtenir les valeurs des intégrales indéfinies relatives à x. C'est ce qu'on va montrer plus clairement par quelques exemples.

Exemple I. — Si, dans les équations (p), on suppose la valeur de x

très considérable, et que l'on néglige les parties des intégrales du second membre qui correspondent à de grandes valeurs de z, on aura à très peu près

$$(x^2+z^2)^{\frac{n}{2}}=x^n,\quad arc\,tang\frac{z}{x}=\frac{z}{x},\quad \sin\left(n\ arc\,tang\frac{z}{x}\right)=\frac{nz}{x},$$

$$\cos\left(n\ arc\,tang\frac{z}{x}\right)=1,$$

$$Q'=x^n,\quad Q''=nzx^{n-1}.$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^\infty e^{-z}dz=1,\quad \int_0^\infty ze^{-z}dz=1.$$

Cela posé, on trouvera

$$\int_0^\infty Q'e^{-z}dz=x^n,\quad \int_0^\infty Q''e^{-z}dz=nx^{n-1};$$

et les équations (p) deviendront

$$(u)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^x x^n\cos x\,dx=x^n\left(\frac{n}{x}\cos x+\sin x\right)-\sin\frac{n\pi}{2}\int_0^\infty z^ne^{-z}dz+\ldots,\\ \displaystyle\int_0^x x^n\sin x\,dx=x^n\left(\frac{n}{x}\sin x-\cos x\right)+\cos\frac{n\pi}{2}\int_0^\infty z^ne^{-z}dz+\ldots,\end{cases}$$

la limite supérieure x étant supposée très considérable.

Si, dans les équations précédentes, on change n en $-n$, on trouvera, sous les mêmes conditions,

$$(v)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^x x^{-n}\cos x\,dx=\sin\frac{n\pi}{2}\int_0^\infty z^ne^{-z}dz-x^{-n}\left(\frac{n}{x}\cos x-\sin x\right)+\ldots,\\ \displaystyle\int_0^x x^{-n}\sin x\,dx=\cos\frac{n\pi}{2}\int_0^\infty z^ne^{-z}dz-x^{-n}\left(\frac{n}{x}\sin x+\cos x\right)+\ldots.\end{cases}$$

Enfin, si, dans ces dernières, on fait $n=\frac{1}{2}$, on aura

$$(x)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\cos x\,dx=2^{-\frac{3}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\cos x}{2x}-\sin x\right)+\ldots,\\ \displaystyle\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\sin x\,dx=2^{-\frac{3}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x}{2x}+\cos x\right)+\ldots.\end{cases}$$

Si, dans les équations (v), on supposait $n = \infty$, on obtiendrait un cas particulier des formules (e) du § III.

Exemple II. — Si, dans les équations (t), on suppose la valeur de x très considérable, en négligeant z relativement à x, et s'arrêtant aux termes de l'ordre $\frac{1}{x^2}$, on aura à très peu près

$$\frac{1}{(1+x)^2+z^2} = \frac{1}{x^2+z^2} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{1+x}{(1+x)^2+z^2} = \frac{x}{x^2+z^2} = \frac{1}{x};$$

et, par suite,

$$\int_0^\infty \frac{1+x}{(1+x)^2+z^2} e^{-az}\,dz = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-az}\,dz = \frac{1}{ax},$$
$$\int_0^\infty \frac{z}{(1+x)^2+z^2} e^{-az}\,dz = \frac{1}{x^2}\int_0^\infty e^{-az}\,dz = \frac{1}{ax^2}.$$

Cela posé, les équations (t) deviendront

$$(y)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{\cos ax}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{z}{1+z^2} e^{-az}\,dz + \frac{\sin ax}{ax} - \frac{\cos ax}{ax^2} + \ldots, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{\sin ax}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+z^2} e^{-az}\,dz - \frac{\sin ax}{ax^2} - \frac{\cos ax}{ax} + \ldots, \end{cases}$$

les intégrales définies relatives à x devant être prises depuis $x = 0$ jusqu'à une valeur de x très considérable.

Si, dans les équations (y), on suppose les intégrales relatives à x prises entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, on aura simplement

$$(z)\quad \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{z}{1+z^2} e^{-az}\,dz, \quad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+z^2} e^{-az}\,dz.$$

SECONDE PARTIE.

SUR LES DIFFICULTÉS QUE PEUT OFFRIR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I.

DES INTÉGRALES DOUBLES QUI SE PRÉSENTENT SOUS UNE FORME INDÉTERMINÉE.

Les équations différentielles auxquelles nous avons été conduits dans les §§ I et VI de la première Partie de ce Mémoire sont toutes de la même forme; et, dans chacune d'elles, une fonction de x et de z, différentiée par rapport à z et divisée par dz, se trouve égalée à une autre fonction de x et de z, différentiée par rapport à x et divisée par dx. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par $f(x)$ une fonction donnée de x, par M et N deux fonctions déterminées de x et de z, et que l'on fasse

$$f(\mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{-1})=\mathrm{P}'+\mathrm{P}''\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{P}'\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}-\mathrm{P}''\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}=\mathrm{S},\quad \mathrm{P}'\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}-\mathrm{P}''\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z}=\mathrm{U},$$

on aura, en vertu des équations (2) (Ire Partie),

(1) $$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z}=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}.$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation précédente par $dx\,dz$, et qu'on les intègre ensuite, par rapport à x et à z, entre les limites $x=0$, $x=a$, $z=0$, $z=b$, on aura

(2) $$\int_0^a\int_0^b \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z}\,dx\,dz=\int_0^a\int_0^b \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\,dx\,dz.$$

Chacune des intégrales doubles que présente l'équation précédente est la somme des éléments qui correspondent aux diverses valeurs de x et de z comprises entre les limites de l'intégration. Si donc tous ces éléments, ou, ce qui revient au même, les deux fonctions identiques

$$\frac{\partial S}{\partial z}, \quad \frac{\partial U}{\partial x}$$

conservent toujours, entre ces deux limites, une valeur déterminée, il en sera de même des intégrales doubles

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial S}{\partial z}\, dx\, dz, \quad \int_0^a \int_0^b \frac{\partial U}{\partial x}\, dx\, dz.$$

Dans ce cas, on pourra effectuer immédiatement, sur le premier membre de l'équation (2), l'intégration relative à z, et sur le second, l'intégration relative à x, et l'on obtiendra, par ce moyen, une équation entre quatre intégrales définies.

Soit

s ce que devient S, quand $z = 0$,

et

u ce que devient U, quand $x = 0$;

S, s, U, u, auront une valeur déterminée; et l'équation dont il s'agit sera, en général,

$$(3) \qquad \int_0^a S\, dx - \int_0^a s\, dx = \int_0^b U\, dz - \int_0^b u\, dz.$$

C'est celle que nous avons déjà obtenue dans le § I de la première Partie.

Supposons maintenant que, pour certaines valeurs de x et de z comprises entre les limites des intégrations, les deux fonctions $\frac{\partial S}{\partial z}$, $\frac{\partial U}{\partial x}$ deviennent indéterminées; et représentons par

$$x = X, \quad z = Z$$

un des systèmes de valeurs dont il s'agit, en sorte que X soit compris

48.

entre les limites o et a, et Z entre les limites o et b. Alors chacune des intégrales

$$\int_0^b \frac{\partial S}{\partial z}\,dz, \quad \int_0^a \frac{\partial U}{\partial x}\,dx,$$

et, par suite, chacune des fonctions S et U, deviendra nécessairement indéterminée, lorsqu'on y supposera $x = \mathrm{X}$, $z = \mathrm{Z}$. Dans le même cas, les deux intégrales doubles

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial S}{\partial x}\,dx\,dz, \quad \int_0^a \int_0^b \frac{\partial U}{\partial z}\,dx\,dz,$$

ont aussi une valeur indéterminée; en sorte que l'équation (2) semble devenir entièrement illusoire. Néanmoins, comme chaque élément de l'intégrale $\int_0^a \int_0^b \frac{\partial S}{\partial z}\,dx\,dz$ correspond à des valeurs déterminées de x et de z, et obtient lui-même une valeur déterminée, lorsqu'on y substitue d'abord la valeur de x, en regardant z comme constante, et ensuite la valeur de z, la somme des éléments, ou l'intégrale double que l'on considère, obtiendra aussi une valeur déterminée dans le cas dont il s'agit. On doit en dire autant de l'intégrale double $\int_0^a \int_0^b \frac{\partial U}{\partial x}\,dx\,dz$. Par suite, l'équation (2) cessera d'être indéterminée, si, dans chacun des éléments dont se composent les intégrales doubles qui forment les deux membres de cette équation, on suppose les valeurs de x substituées avant celles de z. Si, dans cette hypothèse, on effectue sur le second membre de l'équation (2) l'intégration relative à x, on aura, tout comme à l'ordinaire,

$$\int_0^a \frac{\partial U}{\partial x}\,dx = \mathrm{U} - u;$$

et, par suite,

$$\int_0^b \int_0^a \frac{\partial U}{\partial x}\,dz\,dx = \int_0^b \mathrm{U}\,dz - \int_0^b u\,dz.$$

De même, si, dans tous les éléments de l'intégrale

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial S}{\partial z}\,dx\,dz,$$

on voulait substituer les valeurs de z avant celles de x, on aurait encore

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial S}{\partial z}\,dx\,dz = \int_0^a S\,dx - \int_0^a s\,dx.$$

Mais comme, par hypothèse, on doit substituer les valeurs de x avant celles de z, la dernière équation ne sera plus vraie; et, pour la corriger, il sera nécessaire d'augmenter le second membre d'une certaine quantité. Soit A la quantité dont il s'agit; on aura, en supposant les valeurs de x substituées avant celles de z,

$$\int_0^b \int_0^a \frac{\partial S}{\partial z}\,dz\,dx = \int_0^a S\,dx - \int_0^a s\,dx + A.$$

On a déjà trouvé, dans la même hypothèse,

$$\int_0^b \int_0^a \frac{\partial U}{\partial x}\,dz\,dx = \int_0^b U\,dz - \int_0^b u\,dz.$$

Par suite, l'équation (2) deviendra

$$(4) \qquad \int_0^a S\,dx - \int_0^a s\,dx + A = \int_0^b U\,dz - \int_0^b u\,dz.$$

Nous indiquerons, dans le paragraphe suivant, le moyen d'obtenir la quantité A, c'est-à-dire l'accroissement que reçoit l'intégrale double

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial S}{\partial x}\,dx\,dz,$$

lorsqu'au lieu de substituer, dans chaque élément, les valeurs de z avant celles de x, on y substitue les valeurs de x avant celles de z. Cette quantité représente, comme on le voit, la correction qu'il faut apporter au premier membre de l'équation (3), lorsque les fonctions S et U prennent une forme indéterminée pour certaines valeurs de x et de z comprises entre les limites de l'intégration. Nous allons maintenant faire voir comment on peut déterminer pour x et z les différents systèmes de valeurs qui jouissent de cette singulière propriété.

Supposons, pour plus de simplicité, que les valeurs de $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial z}$, $\frac{\partial N}{\partial z}$, ne puissent devenir indéterminées ni infinies entre les limites des intégrations; alors les deux quantités S et U, déterminées par les deux équations

$$P'\frac{\partial M}{\partial x} - P''\frac{\partial N}{\partial x} = S, \quad P'\frac{\partial M}{\partial z} - P''\frac{\partial N}{\partial z} = U,$$

ne pourront se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$, à moins que P' et P'' ne soient des fractions qui aient zéro pour dénominateur. Il ne reste plus qu'à déterminer les conditions nécessaires pour que cette circonstance ait lieu.

Les valeurs de P' et de P'' sont déterminées, comme l'on sait, par l'équation

$$f(M \pm N\sqrt{-1}) = P' \pm P''\sqrt{-1},$$

$f(x)$ étant une fonction déterminée de x. Concevons maintenant que la fonction $f(x)$ soit une fraction qui ait $\mathfrak{F}(x)$ pour numérateur et $F(x)$ pour dénominateur, en sorte qu'on ait

$$f(x) = \frac{\mathfrak{F}(x)}{F(x)},$$

$\mathfrak{F}(x)$ et $F(x)$ étant deux nouvelles fonctions de x. Faisons, de plus,

$$\mathfrak{F}(M \pm N\sqrt{-1}) = Q' \pm Q''\sqrt{-1},$$

$$F(M \pm N\sqrt{-1}) = R' \pm R''\sqrt{-1}:$$

on aura

$$P' \pm P''\sqrt{-1} = \frac{Q' \pm Q''\sqrt{-1}}{R' \pm R''\sqrt{-1}} = \frac{(Q' \pm Q''\sqrt{-1})(R' \mp R''\sqrt{-1})}{R'^2 + R''^2},$$

et, par suite,

$$P' = \frac{Q'R' + Q''R''}{R'^2 + R''^2}, \quad P'' = \frac{Q''R' - Q'R''}{R'^2 + R''^2}.$$

Ainsi les fractions qui représentent P' et P'' ne peuvent avoir zéro pour dénominateur, à moins que R' et R'' ne soient séparément nulles; et, dans ce cas, les valeurs de P' et de P'' sont toujours indéterminées, jamais infinies; car le numérateur des fractions que l'on considère s'évanouit alors aussi bien que leur dénominateur. Il suit encore de cette proposition qu'en général les valeurs de S et T peuvent devenir indéterminées, mais non pas infinies; ce qui prévient quelques objections qu'on aurait pu faire contre la théorie précédente.

Les systèmes de valeurs de x et de z qui rendent les quantités P' et P'' indéterminées sont, par ce qui précède, ceux qui satisfont à la fois aux deux équations

$$R' = 0, \quad R'' = 0,$$

et qui sont en même temps compris entre les limites des intégrations relatives à x et à z. Soit $x = X$, $z = Z$, un quelconque de ces systèmes. On pourrait, à la rigueur, obtenir les diverses valeurs de X et de Z en éliminant z ou x entre les deux équations $R' = 0$, $R'' = 0$, et résolvant par rapport à x ou à z l'équation résultant de cette élimination. Mais on peut y parvenir bien plus facilement de la manière suivante.

L'équation $R'^2 + R''^2 = 0$ équivaut à celle-ci :

$$F(M + N\sqrt{-1})\,F(M - N\sqrt{-1}) = 0.$$

Les valeurs réelles de x et de z qui satisfont à cette dernière sont celles qui, substituées dans M et N, donnent à ces fonctions des valeurs telles, que les deux polynômes

$$M + N\sqrt{-1}, \quad M - N\sqrt{-1},$$

représentent un des couples de racines imaginaires de l'équation

$$F(x) = 0,$$

ou celles qui, déterminant pour N une valeur nulle, rendent la fonction M égale à l'une des racines réelles de la même équation

$$F(x) = 0.$$

Si donc on représente par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ une quelconque des racines de cette dernière équation, β devant être nul lorsque la racine est réelle, il suffira, pour déterminer les diverses valeurs de X et de Z, de résoudre, par rapport à x et z, les équations de la forme

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{M} = \alpha, \quad \mathrm{N} = \beta,$$

et de chercher, parmi les valeurs réelles des variables qui leur satisfont, celles qui sont en même temps comprises entre les limites des intégrations qu'il s'agit d'effectuer. Appliquons ces principes à quelques exemples.

Première application. — Soit, comme dans le § II de la première Partie, $\mathrm{M} = x$, $\mathrm{N} = z$, on aura simplement

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{X} = \alpha, \quad \mathrm{Z} = \beta.$$

Il suffira donc alors de calculer les diverses valeurs de α et de β.

Exemple I. — Soit $\mathrm{F}(x) = 1 + x^2$. L'équation

$$1 + x^2 = 0$$

ayant deux racines imaginaires, savoir, $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$, on obtiendra deux systèmes de valeurs de α et de β, savoir :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1,$$
$$\alpha = 0, \quad \beta = -1.$$

Exemple II. — Soit $\mathrm{F}(x) = 1 + x^4$. L'équation

$$1 + x^4 = 0$$

ayant quatre racines imaginaires, savoir,

$$\frac{1 + \sqrt{-1}}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{-1}}{2}, \quad \frac{-1 + \sqrt{-1}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{-1}}{2},$$

on obtiendra quatre systèmes des valeurs de α et de β, savoir :

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

$$\alpha = +\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = +\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\alpha = +\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = +\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Exemple III. — Soit $F(x) = 1 + x^{2n}$; les diverses racines de l'équation

$$1 + x^{2n} = 0$$

étant représentées par la formule

$$\cos(2k+1)\frac{\pi}{2n} + \sqrt{-1}\,\sin(2k+1)\frac{\pi}{2n},$$

où k désigne un nombre entier pris à volonté, les divers systèmes de valeurs de α et de β seront déterminés par les deux équations

$$\alpha = \cos(2k+1)\frac{\pi}{2n}, \quad \beta = \sin(2k+1)\frac{\pi}{2n}.$$

On choisira parmi ces systèmes ceux qui sont compris entre les limites des intégrations que l'on doit faire.

Exemple IV. — Soit $F(x) = x^{2n} - 1$, on trouvera

$$\alpha = \cos\frac{2k\pi}{2n}, \quad \beta = \sin\frac{2k\pi}{2n},$$

k étant un nombre entier pris à volonté.

Exemple V. — Soit $F(x) = e^x - 1$. Les diverses racines de l'équation $e^x - 1 = 0$, ou $x = l(1)$, se trouveront toutes comprises dans la formule

$$x = 2k\pi\sqrt{-1},$$

k étant un nombre entier quelconque positif ou négatif. Par suite, les divers systèmes de valeurs de α et de 6 seront déterminés par des équations de la forme

$$\alpha = 0, \quad 6 = 2k\pi.$$

Exemple VI. — Soit $F(x) = e^x + 1$, on trouvera

$$\alpha = 0, \quad 6 = (2k+1)\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque positif ou négatif.

Exemple VII. — Soit $F(x) = a - \cos 2x$, a étant une quantité positive; et cherchons le système de valeurs de α et de 6 dans lequel la valeur de α se trouve comprise entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}\cdot$

Supposons d'abord $a < 1$: les diverses racines de l'équation $\cos 2x - a = 0$ seront toutes réelles et comprises dans la formule $x = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\cos a$. Cela posé, si l'on désigne par $arc\cos a$ le plus petit des arcs qui ont a pour cosinus, le système cherché sera déterminé par les deux équations

$$\alpha = \tfrac{1}{2} arc\cos a, \quad 6 = 0.$$

Supposons en second lieu $a > 1$, l'équation

$$\cos 2x - a = 0$$

aura toutes ses racines imaginaires et comprises dans la formule

$$x = k\pi + \tfrac{1}{2} l(a + \sqrt{a^2 - 1}),$$

k étant un nombre entier quelconque positif ou négatif. Par suite, le système cherché sera déterminé par les deux équations

$$\alpha = 0, \quad 6 = \tfrac{1}{2} l(a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Exemple VIII. — Soit $F(x) = a + \cos 2x$, a étant une quantité positive, et cherchons toujours le système de valeurs de α et de 6 pour lequel α se trouve compris entre les limites o et $\frac{1}{2}\pi$.

Si l'on suppose d'abord $a < 1$, on trouvera

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\,arc\cos(-a), \quad 6 = 0,$$

$arc\cos(-a)$ désignant le plus petit des arcs qui ont $-a$ pour cosinus.

Si l'on suppose en second lieu $a > 1$, on trouvera

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi, \quad 6 = \tfrac{1}{2}l(a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Seconde application. — Soit, comme dans le § III de la première Partie, $M = ax$, $N = xz$, et désignons toujours par $\alpha + 6\sqrt{-1}$ une quelconque des racines de l'équation $F(x) = 0$, 6 devant être nul lorsque la racine est réelle; les équations (5) deviendront $ax = \alpha$, $xz = 6$, et l'on en conclura

$$X = \frac{\alpha}{a}, \quad Z = \frac{a6}{\alpha}. \tag{7}$$

Remarque. — Dans le cas que l'on considère, on a

$$\frac{\partial M}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = z, \quad S = aP' - zP'';$$

et, par suite, S peut devenir indéterminée, non seulement quand P′ et P″ le deviennent, mais encore lorsqu'on a en même temps $z = \infty$, $P'' = 0$. Il peut donc exister un ou plusieurs systèmes de valeurs de X et de Z dans lesquels on ait $Z = \infty$. Mais, si les intégrations relatives à z ne doivent pas s'étendre jusqu'à $z = \infty$, on devra rejeter ces derniers systèmes, et conserver seulement ceux qui donnent à P′ et à P″ une forme indéterminée.

Exemple I. — Soit $F(x) = 1 + x^2$, on trouvera deux systèmes de valeurs de X et de Z, savoir :

$$X = 0, \quad Z = \tfrac{1}{0},$$
$$X = 0, \quad Z = -\tfrac{1}{0}.$$

Exemple II. — Soit $F(x) = 1 + x^4$, on trouvera quatre systèmes compris dans les deux formules

$$X = \pm \frac{1}{a\sqrt{2}}, \quad Z = \pm a.$$

Exemple III. — Soit $F(x) = 1 + x^{2n}$; si l'on désigne par k un nombre entier positif ou négatif, on aura

$$X = \frac{\cos(2k+1)\frac{\pi}{2n}}{a}, \quad Z = a \operatorname{tang}(2k+1)\frac{\pi}{2n}.$$

Exemple IV. — Soit $F(x) = e^x - 1$; si l'on désigne toujours par k un nombre entier quelconque, on aura

$$X = 0, \quad Z = \frac{2k\pi}{0}.$$

Exemple V. — Soit $F(x) = e^x + 1$; si l'on désigne toujours par k un nombre entier quelconque, on aura encore

$$X = 0, \quad Z = \frac{(2k+1)\pi}{0}.$$

On pourrait multiplier à l'infini ces divers exemples; mais ceux qu'on vient de rapporter suffisent, comme on le verra bientôt, pour la détermination d'un grand nombre d'intégrales définies.

II.

SUR LA DIFFÉRENCE DES VALEURS QUE REÇOIT UNE INTÉGRALE DOUBLE INDÉTERMINÉE RELATIVE AUX DEUX VARIABLES x ET z, SUIVANT QU'ON Y SUBSTITUE, DANS TOUS LES ÉLÉMENTS A LA FOIS, LES VALEURS DE x AVANT CELLES DE z, OU LES VALEURS DE z AVANT CELLES DE x.

Dans toutes les intégrales doubles que nous avons considérées jusqu'ici, on peut effectuer immédiatement l'intégration relative à l'une des variables. Telle est, par exemple, l'intégrale $\int\int \frac{\partial S}{\partial z}\,dx\,dz$. Supposons, à l'ordinaire, que cette dernière intégrale doive être prise entre les limites $x = 0$, $x = a$, $z = 0$, $z = b$. Si l'on substitue, dans tous les éléments à la fois, les valeurs de z avant celles de x, on aura, en désignant par s ce que devient S quand $z = 0$, et supposant dans S, $z = b$,

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial S}{\partial z}\, dx\, dz = \int_0^a S\, dx - \int_0^a s\, dx.$$

Mais, si l'on suppose les valeurs de x substituées avant celles de z, l'équation précédente ne sera plus vraie ; et pour la corriger, il sera nécessaire, ainsi qu'on l'a déjà remarqué, d'ajouter au second membre une certaine quantité A. On aura donc, dans cette seconde hypothèse,

$$(8) \qquad \int_0^b \int_0^a \frac{\partial S}{\partial z}\, dz\, dx = \int_0^a S\, dx - \int_0^a s\, dx + A.$$

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de A. Il suffit, pour y parvenir, de résoudre le problème suivant.

PROBLÈME I. — *Soit* $K = \varphi(x, z)$ *une fonction de x et de z qui devienne indéterminée pour les valeurs* $x = X$, $z = Z$, *de ces deux variables. Concevons, de plus, que l'intégrale indéfinie*

$$\int\int \frac{\partial K}{\partial z}\, dx\, dz$$

doive être prise entre les limites $x = a'$, $x = a''$, $z = b'$, $z = b''$, *et que le système des valeurs* $x = X$, $z = Z$, *soit renfermé entre ces mêmes limites. On demande la valeur que reçoit l'intégrale dont il s'agit, lorsqu'on y substitue, dans tous les éléments à la fois, les valeurs de x avant celles de z.*

Solution. — Supposons qu'en ayant égard aux signes des quantités, c'est-à-dire, en considérant une quantité négative plus grande comme plus petite qu'une autre quantité négative moindre, on ait

$$a' < a'', \quad b' < b''.$$

On aura, en général,

$$a' < X < a'', \quad b' < Z < b''.$$

Mais il pourra se faire aussi que X soit égal à l'une des limites a', a'', et Z à l'une des limites b', b''. Je commencerai par admettre cette dernière hypothèse, qui se partage naturellement en quatre autres, savoir :

$$X = a', \quad Z = b',$$
$$X = a', \quad Z = b'',$$
$$X = a'', \quad Z = b',$$
$$X = a'', \quad Z = b'';$$

et, pour plus de facilité, je supposerai d'abord que la fonction $K = \varphi(x, z)$ ne peut jamais devenir infinie entre les limites que l'on considère, ni même indéterminée, si ce n'est pour le système de valeurs

$$x = X, \quad z = Z.$$

Cela posé, soit en premier lieu

$$X = a', \quad Z = b'.$$

Pour obtenir la valeur de l'intégrale double $\int\int \frac{\partial K}{\partial z} dx\, dz$ entre les limites $x = a'$, $x = a''$, $z = b'$, $z = b''$, il suffira évidemment de chercher la valeur de la même intégrale entre les limites

$$x = a', \qquad x = a'',$$
$$z = b' + \zeta, \quad z = b'',$$

ζ étant une quantité très petite, et de supposer ensuite $\zeta = 0$. Mais, suivant que l'on fera évanouir ζ avant ou après l'intégration relative à x, on obtiendra la valeur que reçoit l'intégrale double cherchée, lorsqu'on y substitue, dans tous les éléments à la fois, les valeurs de z avant celles de x, ou celle que reçoit la même intégrale, lorsqu'on effectue les substitutions en sens contraire. Entrons, à ce sujet, dans quelques détails.

L'intégrale indéfinie $\int \frac{\partial K}{\partial z} dz$ étant représentée par

$$K = \varphi(x, z) + \text{const.},$$

la même intégrale, prise entre les limites $z = b' + \zeta$, $z = b''$, sera

$$\int_{b'+\zeta}^{b''} \frac{\partial K}{\partial z} dz = \varphi(x, b'') - \varphi(x, b' + \zeta).$$

Si l'on multiplie cette dernière par dx, et qu'on intègre le résultat entre les limites $x = a'$, $x = a''$, on aura

$$(9) \qquad \int_{a'}^{a''} \varphi(x, b'')\, dx - \int_{a'}^{a''} \varphi(x, b' + \zeta)\, dx,$$

pour la valeur de l'intégrale $\int_{a'}^{a''} \int_{b'+\zeta}^{b''} \frac{\partial K}{\partial z} dx\, dz$. Si, dans l'expression précédente, on suppose, avant l'intégration relative à x, $\zeta = 0$, cette expression deviendra

$$(10) \qquad \int_{a'}^{a''} \varphi(x, b'')\, dx - \int_{a'}^{a''} \varphi(x, b')\, dx.$$

C'est la valeur de l'intégrale double cherchée, lorsqu'on y substitue les valeurs de z avant celles de x. Mais, si l'on veut obtenir la valeur de la même intégrale double dans le cas où l'on fait les substitutions en sens contraire, il faudra à l'expression (10) ajouter une certaine quantité A dont la valeur sera déterminée par l'équation

$$(11) \qquad A = \int_{a'}^{a''} [\varphi(x, b') - \varphi(x, b' + \zeta)]\, dx,$$

dans laquelle on ne doit supposer $\zeta = 0$ qu'après avoir fait l'intégration par rapport à x. En admettant cette valeur de A, on aura, pour la valeur de l'intégrale double cherchée dans le cas où l'on substitue les valeurs de x avant celles de z,

$$\int_{a'}^{a''} \varphi(x, b'')\, dx - \int_{a'}^{a''} \varphi(x, b')\, dx + A.$$

Si l'on supposait $K = \varphi(x, z) = S$, $b' = 0$, $b'' = b$, en désignant par s ce que devient S quand $z = 0$, et remplaçant z par b dans S, on trouverait que l'expression précédente se réduit à

$$\int_{a'}^{a''} S\, dx - \int_{a'}^{a''} s\, dx + A.$$

On était déjà parvenu à une semblable expression; mais la valeur de A était restée inconnue, et elle se trouve maintenant déterminée par le calcul qu'on vient de faire.

La valeur de A, déterminée par l'équation (11), peut se mettre sous une forme plus simple. En effet, si l'on désigne par ε une quantité très petite, on pourra décomposer l'intégrale

$$\int_{a'}^{a''} \varphi(x, b' + \zeta)\, dx,$$

en deux intégrales de même forme, prises, l'une entre les limites $x = a'$, $x = a' + \varepsilon$, et l'autre entre les limites $x = a' + \varepsilon$, $x = a''$. Pour obtenir la première partie, il suffira évidemment de faire $x = a' + \xi$, et d'intégrer, par rapport à ξ, entre les limites $\xi = 0$, $\xi = \varepsilon$. Cette première partie sera donc égale à

$$\int_{0}^{\varepsilon} \varphi(a' + \xi, b' + \zeta)\, d\xi.$$

De plus, comme la fonction $\varphi(x, b' + \zeta)$ conservera toujours une valeur déterminée pour les diverses valeurs de x comprises entre les limites $x = a' + \varepsilon$, $x = a''$, l'intégrale

$$\int_{a'+\varepsilon}^{a''} \varphi(x, b' + \zeta)\, dx$$

aura toujours la même valeur, soit que l'on y suppose $\zeta = 0$ avant ou après l'intégration. Par suite, la seconde partie de l'intégrale $\int_{a'}^{a''} \varphi(x, b' + \zeta)\, dx$, prise entre les limites $x = a' + \varepsilon$, $x = a''$, sera égale à l'intégrale

$$\int_{a'+\varepsilon}^{a''} \varphi(x, b')\,dx;$$

et comme on peut rendre ε aussi petit que l'on voudra, on pourra, sans erreur sensible, la supposer égale à l'intégrale $\int_{a'}^{a''} \varphi(x, b')\,dx$. Cela posé, on aura

$$\int_{a'}^{a''} \varphi(x, b'+\zeta)\,dx = \int_0^{\varepsilon} \varphi(a'+\xi, b'+\zeta)\,d\xi + \int_{a'}^{a''} \varphi(x, b')\,dx,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_{a'}^{a''} \varphi(x, b')\,dx - \int_{a'}^{a''} \varphi(x, b'+\zeta)\,dx = -\int_0^{\varepsilon} \varphi(a'+\xi, b'+\zeta)\,d\xi.$$

On aura donc, par suite,

$$\mathrm{A} = -\int_0^{\varepsilon} \varphi(a'+\xi, b'+\zeta)\,d\xi,$$

ε étant très petit, et ζ devant être supposé nul après l'intégration.

En résumant ce qu'on vient de dire, on obtiendra la proposition suivante.

Soit $\int\int \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial z}\,dx\,dz$ une intégrale double qui doive être prise entre les limites $x = a'$, $x = a''$, $z = b'$, $z = b''$, et dans laquelle la fonction sous le signe $\int$, savoir, $\mathrm{K} = \varphi(x, z)$, devienne indéterminée pour le système de valeurs des variables

$$x = \mathrm{X} = a', \quad z = \mathrm{Z} = b'.$$

Si de l'hypothèse où l'on substitue, dans tous les éléments à la fois, les valeurs de z avant celles de x, on veut passer à celle où l'on fait les substitutions en sens contraire, la valeur de l'intégrale double se trouvera augmentée de la quantité

$$\mathrm{A} = -\int_0^{\varepsilon} \varphi(\mathrm{X}+\xi, \mathrm{Z}+\zeta)\,d\xi,$$

ζ devant être supposé nul après l'intégration.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, $X = a'$, $Z = b'$; mais on pourrait supposer à volonté

$$X = a' \quad \text{ou} \quad a'',$$
$$Z = b' \quad \text{ou} \quad b'',$$

ce qui fournit quatre hypothèses différentes. Par des raisonnements semblables à ceux que nous venons de faire, on trouvera les valeurs suivantes de A, correspondantes aux quatre hypothèses dont il s'agit :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Pour } X = a',\ Z = b' \ldots\ldots & A = -\int_0^\varepsilon \varphi(X + \xi, Z + \zeta)\, d\xi, \\ \text{Pour } X = a',\ Z = b'' \ldots\ldots & A = +\int_0^\varepsilon \varphi(X + \xi, Z - \zeta)\, d\xi, \\ \text{Pour } X = a'',\ Z = b' \ldots\ldots & A = -\int_0^\varepsilon \varphi(X - \xi, Z + \zeta)\, d\xi, \\ \text{Pour } X = a'',\ Z = b'' \ldots\ldots & A = +\int_0^\varepsilon \varphi(X - \xi, Z - \zeta)\, d\xi. \end{array} \right.$$

Les quatre valeurs précédentes de A sont exprimées chacune par une intégrale relative à la variable ξ, et prise entre des limites infiniment rapprochées de cette même variable. Mais, comme on ne doit y supposer $\zeta = 0$ qu'après l'intégration, ces intégrales peuvent n'être pas nulles. Je désignerai les intégrales de cette espèce sous le nom d'*intégrales singulières*. Nous allons faire voir, par un exemple, comment on peut en déterminer la valeur.

Exemple. — Soit $K = \varphi(x, z) = \dfrac{z}{x^2 + z^2}$, et concevons que l'intégrale

$$\int\int \frac{\partial K}{\partial z}\, dx\, dz$$

doive être prise entre les limites $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$, $x = 1$. Si l'on suppose les valeurs de z substituées avant celles de x, on aura

$$\int_0^1 \frac{\partial K}{\partial z}\, dz = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial K}{\partial z}\, dx\, dz = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Mais, si l'on veut renverser l'ordre des substitutions, l'intégrale changera de valeur; car la fonction $\frac{z}{x^2+z^2}$ devient indéterminée, lorsqu'on suppose à la fois $x = 0$, $z = 0$. On a donc, dans le cas présent,

$$X = a' = 0, \quad Z = b' = 0.$$

Par suite, la quantité qu'il faut ajouter à la première valeur de l'intégrale double pour obtenir la seconde sera

$$A = -\int_0^\varepsilon \varphi(\xi, \zeta)\,d\xi = -\int_0^\varepsilon \frac{\zeta}{\xi^2+\zeta^2}\,d\xi,$$

ζ devant être supposé nul après l'intégration relative à ξ. On a d'ailleurs, en général,

$$\int \frac{\zeta}{\xi^2+\zeta^2}\,d\xi = arc\,tang\frac{\xi}{\zeta} + \text{const.},$$

$arc\,tang\frac{\xi}{\zeta}$ désignant le plus petit des arcs qui ont $\frac{\xi}{\zeta}$ pour tangente. On aura donc

$$\int_0^\varepsilon \frac{\zeta}{\xi^2+\zeta^2}\,d\xi = arc\,tang\frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

Si, dans cette dernière expression, on fait $\zeta = 0$, elle deviendra égale à $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$A = -\int_0^\varepsilon \frac{\zeta}{\xi^2+\zeta^2}\,d\xi = -\frac{\pi}{2};$$

et, par suite,

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial K}{\partial z}\,dx\,dz = \frac{\pi}{4} + A = -\frac{\pi}{4},$$

lorsqu'on substitue les valeurs de x avant celles de z. Ce dernier résultat peut être aisément vérifié de la manière suivante.

$$K \text{ étant égal à } \frac{z}{a^2+z^2}, \quad \text{on a} \quad \frac{\partial K}{\partial z} = \frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2};$$

et, par suite,

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial K}{\partial z}\,dz\,dx = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2}\,dz\,dx.$$

On a d'ailleurs, en général,

$$\int \frac{x^2 - z^2}{(x^2+z^2)^2}\,dx = -\frac{x}{x^2+z^2} + \text{const.}$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{x^2 - z^2}{(x^2+z^2)^2}\,dx = -\frac{1}{1+z^2};$$

et, par suite,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial z}\,dz\,dx = -\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{\pi}{4},$$

comme ci-dessus.

La valeur de A resterait encore la même au signe près, si, la première limite de x étant négative, la seconde était égale à zéro, ou enfin si ces deux hypothèses avaient lieu toutes deux en même temps.

Je passe maintenant à l'hypothèse générale dans laquelle, X étant compris entre les limites a' et a'', sans être égal à aucune d'elles, Z est aussi compris entre les limites b' et b'', sans égaler aucune de ces dernières. Dans ce cas, la valeur de l'intégrale double $\int_{a'}^{a''} \int_{b'}^{b''} \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial z}\,dx\,dz$, lorsqu'on substitue, dans tous les éléments à la fois, les valeurs de z avant celles de x, est encore égale à

$$\int_{a'}^{a''} \varphi(x, b'')\,dx - \int_{a'}^{a''} \varphi(x, b')\,dx.$$

Mais, si l'on renverse l'ordre des substitutions, et que l'on suppose les valeurs de x substituées avant celles de z, la valeur de l'intégrale double se trouvera augmentée d'une certaine quantité A que l'on déterminera comme il suit.

Concevons que l'on partage l'intégrale donnée en quatre autres de même forme, prises, savoir,

La première, entre les limites

$$x = a', \quad x = \mathrm{X}, \quad z = b', \quad z = \mathrm{Z};$$

la deuxième, entre les limites

$$x = a', \quad x = \mathrm{X}, \quad z = \mathrm{Z}, \quad z = b'';$$

la troisième, entre les limites

$$x = X,\quad x = a'',\quad z = b',\quad z = Z;$$

la quatrième, entre les limites

$$x = X,\quad x = a'',\quad z = Z,\quad z = b''.$$

Comme, dans chacune de ces intégrales, l'une des limites relatives à x est égale à X, et l'une des limites relatives à z égale à Z, on obtiendra facilement, par ce qui précède, les quatre valeurs de A correspondantes aux quatre intégrales dont il s'agit. Ces quatre valeurs seront précisément celles que nous avons réunies sous le n° (12). Leur somme sera la valeur de A correspondante à l'intégrale $\int_{b'}^{b''}\int_{a'}^{a''}\frac{\partial K}{\partial z}\,dz\,dx$, prise entre les limites $x = a'$, $x = a''$, $z = b'$, $z = b''$. On aura donc

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Pour } a' < X < a'',\quad b' < Z < b'', \\ A = \displaystyle\int_0^{\varepsilon}\left[\begin{array}{l} \varphi(X-\xi, Z-\zeta) + \varphi(X+\xi, Z-\zeta) \\ -\,\varphi(X-\xi, Z+\zeta) - \varphi(X+\xi, Z+\zeta) \end{array}\right] d\xi. \end{array}\right.$$

Exemple I. — Soit

$$K = \varphi(x, z) = \frac{1 + x^2 - z^2}{(1 + x^2 - z^2)^2 + 4x^2z^2},$$

et supposons que l'intégrale

$$\int\int \frac{\partial K}{\partial z}\,dx\,dz$$

doive être prise entre les limites $x = -a$, $x = +a$, $z = 0$, $z = b$, b étant plus grand que l'unité. La fonction K se présentant sous une forme indéterminée lorsqu'on suppose $x = 0$, $z = 1$, on aura, dans le cas présent,

$$X = 0,\quad Z = 1;$$

et, par suite,

$$\varphi(X + \xi, Z + \zeta) = \frac{\xi^2 - 2\zeta - \zeta^2}{(\xi^2 - 2\zeta - \zeta^2)^2 + 4\xi^2(1 + \zeta)^2}.$$

Comme, dans la valeur de A, ζ doit être supposé nul après l'intégration relative à ξ, on peut, sans inconvénient, négliger, dans le second membre de l'équation précédente, ζ^2 relativement à ζ, et ζ relativement à l'unité : ce qui réduit ce second membre à $\frac{\xi^2 - 2\zeta}{(\xi^2 - 2\zeta)^2 + 4\xi^2}$, et même à $\frac{\xi^2 - 2\zeta}{\xi^4 + 4(\xi^2 + \zeta^2)}$. De plus, comme la variable ξ doit rester très petite dans toute l'étendue de l'intégration, on pourra négliger encore ξ^4 relativement à ξ^2, et supposer, par suite,

$$\varphi(X + \xi, Z + \zeta) = \frac{\xi^2 - 2\zeta}{4(\xi^2 + \zeta^2)}.$$

On ne peut plus rien négliger dans le second membre de cette équation, ni mettre la fraction $\frac{\xi^2 - 2\zeta}{4(\xi^2 + \zeta^2)}$ sous une forme plus simple. En effet, quoique chacune des quantités ξ, ζ, conserve toujours une très petite valeur, cependant le rapport de ces deux quantités varie depuis zéro jusqu'à l'infini; car, les intégrales relatives à ξ devant être prises entre les limites $\xi = 0$, $\xi = \varepsilon$, et ζ ne devant être supposé nul qu'après l'intégration, on aura, à la première limite,

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{0}{\zeta} = 0,$$

et, à la seconde limite,

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\varepsilon}{0} = \infty.$$

Si, dans l'équation trouvée plus haut, on donne successivement à ξ et à ζ les signes $+$ et $-$, on aura

$$\varphi(X \pm \xi, Z + \zeta) = \frac{\xi^2 - 2\zeta}{4(\xi^2 + \zeta^2)},$$

$$\varphi(X \pm \xi, Z - \zeta) = \frac{\xi^2 + 2\zeta}{4(\xi^2 + \zeta^2)}.$$

Cela posé, l'équation (13) donnera la valeur suivante de A :

$$A = \int_0^\varepsilon \frac{2\zeta}{\xi^2 + \zeta^2}\, d\xi = \pi.$$

Exemple II. — Supposons que l'intégrale $\int\int \frac{\partial K}{\partial z} dx\,dz$ doive être prise entre les limites $x = -a$, $x = a$, $z = 0$, $z = b$, b étant un nombre positif plus grand que l'unité, et faisons

$$K = \varphi(x, z) = \frac{1 + x^2 - z^2}{(1 + x^2 - z^2)^2 + 4x^2z^2} \psi(x, z),$$

$\psi(x, z)$ étant une fonction de x et de z qui ne puisse devenir indéterminée entre les limites dont il s'agit.

On aura, comme dans l'exemple précédent,

$$X = 0, \quad Z = 1;$$

et, par suite, si l'on néglige les quantités ξ, ζ, vis-à-vis d'autres quantités finies, et les puissances supérieures de chacune d'elles vis-à-vis des puissances inférieures, on trouvera

$$\varphi(X + \xi, Z + \zeta) = \frac{\xi^2 - 2\zeta}{4(\xi^2 + \zeta^2)} \psi(0, 1);$$

d'où l'on conclura

$$A = \pi \psi(0, 1).$$

On voit, par cet exemple, qu'il est souvent possible d'obtenir la valeur de A en termes finis, quoique, dans les intégrales doubles que l'on considère, on ne puisse effectuer les intégrations relatives aux deux variables. Les paragraphes suivants fourniront de nouvelles preuves de cette assertion.

Des quatre parties qui composent la valeur générale de A donnée ci-dessus (13),

La première disparaît quand on a.....	$X = a'$	ou	$Z = b'$;
La deuxième, quand on a.......... ..	$X = a''$	ou	$Z = b'$;
La troisième, quand on a	$X = a'$	ou	$Z = b''$;
La quatrième, quand on a............	$X = a''$	ou	$Z = b''$.

Par suite, si, l'une des quantités X et Z étant comprise entre les limites de l'intégration, l'autre égale une de ces limites, la valeur de A se trouvera réduite à deux termes. On trouvera de cette manière,

$$(14)\quad \begin{cases} \text{Pour } X = a', \quad b' < Z < b'', \\ \quad A = \displaystyle\int_0^{\varepsilon} [\ \varphi(X+\xi, Z-\zeta) - \varphi(X+\xi, Z+\zeta)]\, d\xi; \\ \text{Pour } X = a'', \quad b' < Z < b'', \\ \quad A = \displaystyle\int_0^{\varepsilon} [\ \varphi(X-\xi, Z-\zeta) - \varphi(X-\xi, Z+\zeta)]\, d\xi; \\ \text{Pour } a' < X < a'', \quad Z = b', \\ \quad A = \displaystyle\int_0^{\varepsilon} [-\varphi(X-\xi, Z+\zeta) - \varphi(X+\xi, Z+\zeta)]\, d\xi; \\ \text{Pour } a' < X < a'', \quad Z = b'', \\ \quad A = \displaystyle\int_0^{\varepsilon} [\ \varphi(X-\xi, Z-\zeta) + \varphi(X+\xi, Z-\zeta)]\, d\xi. \end{cases}$$

Exemple. — Supposons que l'intégrale

$$\int\int \frac{\partial K}{\partial z}\, dx\, dz$$

doive être prise entre les limites $x = 0$, $x = a$, $z = 0$, $z = b$, a et b étant deux nombres positifs dont le second surpasse l'unité; soit, de plus,

$$\varphi(x, z) = K = \frac{1 + x^2 - z^2}{(1 + x^2 - z^2)^2 + 4x^2z^2}\, \psi(x, z),$$

$\psi(x, z)$ étant une fonction qui ne devienne pas indéterminée entre les limites dont il s'agit. On aura

$$\varphi(X+\xi, Z\pm\zeta) = \frac{\xi^2 \mp 2\zeta}{4(\xi^2+\zeta^2)}\, \psi(0, 1);$$

et, par suite, la première des équations (14) donnera

$$A = \frac{\pi}{2}\, \psi(0, 1).$$

Les formules (12), (13) et (14) font connaître, dans tous les cas possibles, la valeur de A relative au système des valeurs

$$x = X, \quad z = Z,$$

pour lequel la fonction K se présente sous une forme indéterminée. S'il existait plusieurs systèmes semblables compris entre les limites de l'intégrale double $\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial K}{\partial z}\,dx\,dz$, il faudrait déterminer, pour chacun d'eux séparément, la valeur de A au moyen des formules précédentes; et la somme des valeurs obtenues serait la valeur complète de A relative à l'intégrale double que l'on considère. Quant aux systèmes de valeurs qui pourraient rendre la fonction K infinie, nous ne nous en occuperons pas, parce que cette circonstance ne se présente pas d'ordinaire dans la théorie des intégrales doubles que nous avons à considérer.

Il suit des principes établis ci-dessus que la valeur de l'intégrale double définie

$$\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial K}{\partial z}\,dx\,dz,$$

dans le cas où l'on y substitue, dans tous les éléments à la fois, la valeur de x avant celle de z, est composée de deux parties. La première partie est la valeur que reçoit cette intégrale lorsqu'on y substitue immédiatement les valeurs de z après la première intégration relative à z. La seconde partie, que nous avons désignée par A, est la somme de plusieurs intégrales singulières. La première partie peut être obtenue en termes finis, toutes les fois qu'après avoir effectué la première intégration relativement à z, on peut encore effectuer la seconde relativement à x; et les difficultés que cette détermination présente sont uniquement celles que peut offrir la conversion des intégrales indéfinies en intégrales définies. Nous ferons voir, dans le paragraphe suivant, que ces difficultés peuvent toujours être facilement surmontées. Quant à la valeur de A, nous avons déjà prouvé, par des exemples, qu'on pouvait quelquefois l'obtenir en termes finis, quoique les intégrations doubles ne pussent être complètement effectuées par rapport aux deux variables

x et z. Nous ferons voir, dans le § IV, que cette circonstance remarquable a toujours lieu relativement aux intégrales doubles que nous avons considérées dans la première Partie de ce Mémoire.

III.

SUR LA CONVERSION DES INTÉGRALES INDÉFINIES EN INTÉGRALES DÉFINIES [1].

L'opération que l'on considère ici est l'objet du problème suivant.

Problème II. — *La valeur générale de l'intégrale indéfinie*

$$\int \varphi'(z)\, dz$$

étant représentée par la fonction de z

$$\varphi(z)$$

augmentée d'une constante arbitraire, trouver la valeur de l'intégrale définie $\int_{b'}^{b''} \varphi'(z)\, dz$.

Solution. — Si la fonction $\varphi(z)$ croît ou décroît d'une manière continue entre les limites $z = b'$, $z = b''$, la valeur de l'intégrale sera re-

[1] La valeur que l'on détermine pour l'intégrale

$$\int_{b'}^{b''} \varphi'(z)\, dz,$$

en suivant la méthode indiquée dans ce paragraphe, n'est pas la valeur générale de cette même intégrale, mais celle que j'ai nommée *valeur principale* (*voir* le *Résumé des Leçons données à l'École royale polytechnique, sur le Calcul infinitésimal*). On pourrait, au reste, en raisonnant comme on le fait ici, obtenir la valeur générale, qui serait toujours représentée par une expression de la forme

$$\varphi(b'') - \varphi(b') - \Delta - \Delta' - \Delta'' - \ldots.$$

Seulement, au lieu de supposer $\Delta = \varphi(Z + \zeta) - \varphi(Z - \zeta)$, il faudrait prendre

$$\Delta = \varphi(Z + \zeta'') - \varphi(Z - \zeta'),$$

présentée, à l'ordinaire, par

$$\varphi(b'') - \varphi(b').$$

Mais, si, pour une certaine valeur de z représentée par Z et comprise entre les limites de l'intégration, la fonction $\varphi(z)$ passe subitement d'une valeur déterminée à une autre valeur sensiblement différente de la première, en sorte qu'en désignant par ζ une quantité très petite, on ait

$$\varphi(Z+\zeta) - \varphi(Z-\zeta) = \Delta,$$

alors la valeur ordinaire de l'intégrale définie, savoir,

$$\varphi(b'') - \varphi(b'),$$

devra être diminuée de la quantité Δ, comme on peut aisément s'en assurer.

En effet, dans le cas dont il s'agit, on peut diviser l'intégrale définie $\int \varphi'(z)\,dz$, prise entre les limites $z = b'$, $z = b''$, en deux autres intégrales de même forme, prises, l'une entre les limites

$$z = b', \quad z = Z - \zeta,$$

et l'autre entre les limites

$$z = Z + \zeta, \quad z = b'',$$

ζ', ζ'' désignant deux quantités positives infiniment petites, dont le rapport pourrait converger vers une limite finie quelconque k. En réduisant cette limite à l'unité, on reproduirait la valeur principale calculée dans ce paragraphe.

Si l'on considère en particulier l'intégrale

$$\int_{-2}^{+4} \frac{dz}{z},$$

alors, en opérant comme on vient de le dire, on trouvera, pour sa valeur générale, $l(4) - l(2) + \Delta$, la quantité Δ étant donnée par la formule

$$\Delta = l\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right) = l(k),$$

dans laquelle k désigne une constante arbitraire. En réduisant cette constante à l'unité, on obtiendra la valeur principale $l(4) - l(2)$.

pourvu que, dans la somme de ces deux dernières intégrales, on suppose $\zeta = 0$. D'ailleurs celles-ci, déterminées par la méthode ordinaire, sont évidemment égales, la première à

$$\varphi(Z-\zeta) - \varphi(b'),$$

et la seconde à

$$\varphi(b'') - \varphi(Z+\zeta).$$

Leur somme sera donc

$$\varphi(b'') - \varphi(Z+\zeta) + \varphi(Z-\zeta) - \varphi(b'),$$

ou

$$\varphi(b'') - \varphi(b') - \Delta,$$

ainsi que nous l'avons annoncé.

Si la fonction $\varphi(z)$ changeait plusieurs fois de valeur d'une manière brusque entre les limites a et b, pour diverses valeurs de z représentées par Z, Z', Z'', ..., en désignant par Δ, Δ', Δ'', ... les variations subites dont il s'agit, on trouverait, par des raisonnements semblables à ceux qu'on vient de faire,

$$\varphi(b'') - \varphi(b') - \Delta - \Delta' - \Delta'' - \ldots$$

pour l'intégrale définie cherchée.

Exemple I. — Soit

$$\varphi'(z) = \frac{1}{z}, \quad b' = -2, \quad b'' = +4 :$$

on aura

$$\varphi(z) = l(z).$$

De plus, si l'on désigne par ζ une quantité très petite, on aura, en général,

$$l(z+\zeta) - l(z-\zeta) = 0 :$$

on doit toutefois excepter le cas où z serait nul; car on a, dans cette hypothèse,

$$l(\zeta) - l(-\zeta) = -l(-1).$$

On aura donc, par suite,

$$\Delta = -l(-1);$$

et comme la valeur o de z est ici comprise entre les limites -2, $+4$, on aura

$$\int_{-2}^{4} \frac{dz}{z} = l(4) - l(-2) - \Delta = l(4) - l(2).$$

Ainsi l'intégrale $\int_{-2}^{4} \frac{dz}{z}$ a la même valeur que si elle était prise entre les limites $+2$, $+4$; et, par suite, la même intégrale s'évanouit entre les limites $z = -2$, $z = +2$; ce qui d'ailleurs est évident, puisque entre ces dernières limites tous les éléments sont deux à deux égaux et de signes contraires.

Exemple II. — Soit

$$\varphi'(z) = \frac{\sin z}{1 + (\cos z)^2}, \quad b' = 0, \quad b'' = \frac{3\pi}{4}.$$

Si l'on désigne par $arc\,tang \frac{1}{\cos z}$ le plus petit des arcs positifs ou négatifs qui ont $\frac{1}{\cos z}$ pour tangente, on aura

$$\varphi(z) = arc\,tang \frac{1}{\cos z}.$$

Cette fonction de z sera égale à $\frac{\pi}{4}$ pour $z = 0$; elle croîtra ensuite d'une manière continue depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{\pi}{2} - \zeta$, ζ étant une quantité très petite; passera brusquement de la valeur $\frac{\pi}{2}$, qui correspond à $z = \frac{\pi}{2} - \zeta$, à la valeur $-\frac{\pi}{2}$, qui correspond à $z = \frac{\pi}{2} + \zeta$; sera négative et décroissante depuis $z = \frac{\pi}{2} + \zeta$ jusqu'à $z = \frac{3\pi}{4}$, et deviendra, pour cette dernière limite, égale à

$$-\,arc\,tang \sqrt{2}.$$

On aura donc, dans le cas présent,

$$\varphi(b') = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi(b'') = -\, arc\ tang \sqrt{2},$$

$$\Delta = \varphi\left(\frac{\pi}{2} + \zeta\right) - \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi;$$

et par suite

$$\varphi(b') - \varphi(b'') - \Delta = \frac{3\pi}{4} - arc\ tang \sqrt{2}.$$

Ce sera la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin z\, dz}{1 + (\cos z)^2}.$$

Cette valeur est toujours positive, car on a

$$arc\ tang \sqrt{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4}.$$

Dans le cas que l'on vient de considérer, l'intégrale

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin z}{1 + (\cos z)^2}\, dz,$$

prise à la manière ordinaire, serait simplement

$$\varphi(b'') - \varphi(b') = -\frac{\pi}{4} - arc\ tang \sqrt{2}.$$

Ainsi, en négligeant Δ, on trouverait, pour l'intégrale, une valeur négative; ce qui est absurde, puisque tous les éléments sont évidemment positifs.

IV.

SUR LA VALEUR, EN TERMES FINIS, DE LA QUANTITÉ REPRÉSENTÉE PAR Δ.

Soit $\int\int \frac{\partial K}{\partial z}\, dx\, dz$ une intégrale double qui doive être prise entre les limites $x = a'$, $x = a''$, $z = b'$, $z = b''$; et supposons que la fonction

$$K = \varphi(x, z)$$

devienne indéterminée pour le système de valeurs

$$x = X, \quad z = Z,$$

compris entre les limites de l'intégration. La valeur de A correspondante à ce système sera, en vertu de la formule (13),

$$A = \int_0^\varepsilon \begin{bmatrix} \varphi(X - \xi, Z - \zeta) + \varphi(X + \xi, Z + \zeta) \\ - \varphi(X - \xi, Z + \zeta) - \varphi(X + \xi, Z - \zeta) \end{bmatrix} d\xi.$$

Cette valeur est donc, en général, la somme de quatre intégrales singulières comprises dans la formule

$$\pm \int_0^\varepsilon \varphi(X \pm \xi, Z \pm \zeta)\, d\xi.$$

Mais, si X devient égal à l'une des limites de x, ou Z à l'une des limites de z, on ne devra conserver dans A qu'une ou deux de ces intégrales. Ainsi, par exemple, on devra supprimer,

Pour $X = a'$..... les deux intégrales qui renferment $X - \xi$;
Pour $X = a''$.... les deux intégrales qui renferment $X + \xi$;
Pour $Z = b'$..... les deux intégrales qui renferment $Z - \zeta$;
Pour $Z = b''$.... les deux intégrales qui renferment $Z + \zeta$.

Cette seule remarque conduit aux équations (12) et (14) trouvées dans le § II.

S'il existait, entre les limites de l'intégration, plusieurs systèmes de valeurs de x et de z qui rendissent la fonction K indéterminée, il faudrait calculer, pour chacun d'eux séparément, la valeur de A; et la valeur complète de cette quantité serait la somme des valeurs partielles relatives à chaque système.

Il ne reste plus maintenant qu'à déterminer les valeurs des intégrales singulières de la forme $\int_0^\varepsilon \varphi(X \pm \xi, Z \pm \zeta)\, d\xi$, et relatives aux diverses valeurs de K que nous avons considérées dans la première Partie de ce Mémoire.

On y parvient facilement à l'aide de cette seule considération, que, ξ et ζ devant toujours rester très petites, on peut négliger, sans inconvénient, chacune de ces quantités relativement à d'autres quantités finies, et les puissances supérieures de chacune d'elles relativement aux puissances inférieures. Entrons, à ce sujet, dans quelques détails.

Les deux premiers membres des équations (3) (§ I, Ire Partie) expriment les valeurs des intégrales doubles

$$\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial S}{\partial z}\,dx\,dz,\quad \int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial T}{\partial z}\,dx\,dz,$$

prises entre des limites réelles. Dans ces intégrales, les valeurs de S et de T sont déterminées par les équations

$$S = P'\frac{\partial M}{\partial x} - P''\frac{\partial N}{\partial x},$$

$$T = P'\frac{\partial N}{\partial x} + P''\frac{\partial M}{\partial x},$$

$$f(M \pm N\sqrt{-1}) = P' \pm P''\sqrt{-1},$$

$f(x)$ désignant une fonction quelconque de x, et M, N, deux fonctions quelconques de x et de z. Supposons maintenant

$$f(x) = \frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)}.$$

On aura

$$P' = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathcal{F}(M+N\sqrt{-1})}{F(M+N\sqrt{-1})} + \frac{\mathcal{F}(M-N\sqrt{-1})}{F(M-N\sqrt{-1})}\right],$$

$$P'' = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{\mathcal{F}(M+N\sqrt{-1})}{F(M+N\sqrt{-1})} - \frac{\mathcal{F}(M-N\sqrt{-1})}{F(M-N\sqrt{-1})}\right].$$

Soit, de plus, $\alpha + 6\sqrt{-1}$ une des racines de l'équation $F(x) = 0$, et désignons par $x = X$, $z = Z$, un des systèmes de valeurs de x et de z qui satisfont à la fois aux deux équations

$$M = \alpha,\quad N = 6.$$

Ce système sera un de ceux qui rendent indéterminées les fonctions P′, P″, S et T. Si donc il se trouve compris entre les limites des intégrations, il existera, pour chacune des intégrales

$$\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial S}{\partial z}\,dx\,dz,\quad \int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial T}{\partial z}\,dx\,dz,$$

une valeur de A correspondante au système dont il s'agit. Voyons quelle est cette valeur.

Désignons par

$$\frac{\partial M}{\partial X},\quad \frac{\partial N}{\partial X},\quad \frac{\partial M}{\partial Z},\quad \frac{\partial N}{\partial Z},$$

ce que deviennent les fonctions

$$\frac{\partial M}{\partial x},\quad \frac{\partial N}{\partial x},\quad \frac{\partial M}{\partial z},\quad \frac{\partial N}{\partial z},$$

quand on y suppose $x = X$, $z = Z$. Soient, de plus,

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial M}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial X}\right)^2 = B, \qquad \frac{\partial M}{\partial X}\frac{\partial M}{\partial Z} + \frac{\partial N}{\partial X}\frac{\partial N}{\partial Z} = C,\\ &\left(\frac{\partial M}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial Z}\right)^2 = D, \qquad \frac{\partial M}{\partial X}\frac{\partial N}{\partial Z} - \frac{\partial M}{\partial Z}\frac{\partial N}{\partial X} = E. \end{aligned}\right.$$

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\frac{\mathcal{F}(\alpha-6\sqrt{-1})}{F'(\alpha-6\sqrt{-1})} + \frac{\mathcal{F}(\alpha+6\sqrt{-1})}{F'(\alpha+6\sqrt{-1})}\right] = \lambda,\\ &\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{\mathcal{F}(\alpha-6\sqrt{-1})}{F'(\alpha-6\sqrt{-1})} - \frac{\mathcal{F}(\alpha+6\sqrt{-1})}{F'(\alpha+6\sqrt{-1})}\right] = \mu \quad (^1). \end{aligned}\right.$$

(1) Les équations (16) sont renfermées l'une et l'autre dans la formule

$$(A)\qquad \frac{\mathcal{F}(\alpha+6\sqrt{-1})}{F'(\alpha+6\sqrt{-1})} = \lambda - \mu\sqrt{-1},$$

qui suffit pour déterminer les quantités λ et μ supposées réelles. Cette dernière formule peut encore s'écrire comme il suit :

$$(B)\qquad \varepsilon f(\alpha+6\sqrt{-1}+\varepsilon) = \lambda - \mu\sqrt{-1},$$

ε désignant une quantité infiniment petite.

Si, dans les fonctions M, N, P′, P″, S, T, on fait

$$x = X + \xi, \quad z = Z + \zeta,$$

on trouvera, en négligeant les puissances supérieures de ξ ou de ζ vis-à-vis des puissances inférieures, et ces quantités elles-mêmes vis-à-vis d'autres quantités finies,

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} & M = \alpha + \frac{\partial M}{\partial X}\xi + \frac{\partial M}{\partial Z}\zeta, \quad N = \beta + \frac{\partial N}{\partial X}\xi + \frac{\partial N}{\partial Z}\zeta, \\ & F(M \pm N\sqrt{-1}) = \left[\left(\frac{\partial M}{\partial X}\xi + \frac{\partial M}{\partial Z}\zeta\right) \right. \\ & \qquad \left. \pm \left(\frac{\partial N}{\partial X}\xi + \frac{\partial N}{\partial Z}\zeta\right)\sqrt{-1}\right] F'(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}), \\ & \mathcal{F}(M \pm N\sqrt{-1}) = \mathcal{F}(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}), \\ & P' = \frac{\left(\lambda\frac{\partial M}{\partial X} - \mu\frac{\partial N}{\partial X}\right)\xi + \left(\lambda\frac{\partial M}{\partial Z} - \mu\frac{\partial N}{\partial Z}\right)\zeta}{B\xi^2 + 2C\xi\zeta + D\zeta^2}, \\ & P'' = -\frac{\left(\lambda\frac{\partial N}{\partial X} + \mu\frac{\partial M}{\partial X}\right)\xi + \left(\lambda\frac{\partial N}{\partial Z} + \mu\frac{\partial M}{\partial Z}\right)\zeta}{B\xi^2 + 2C\xi\zeta + D\zeta^2}, \\ & S = \frac{\lambda(B\xi + C\zeta) - \mu E\zeta}{B\xi^2 + 2C\xi\zeta + D\zeta^2}, \\ & T = \frac{-\mu(B\xi + C\zeta) - \lambda E\zeta}{B\xi^2 + 2C\xi\zeta + D\zeta^2}. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, si l'on fait d'abord

$$S = \varphi(x, z),$$

on aura

$$(18)\quad \varphi(X + \xi, Z + \zeta) = \frac{\lambda(B\xi + C\zeta) - \mu E\zeta}{B\xi^2 + 2C\xi\zeta + D\zeta^2}.$$

Si, après avoir multiplié par $d\xi$ les deux membres de l'équation précédente, on les intègre entre les limites $\xi = 0$, $\xi = \varepsilon$, en ayant égard à l'équation $E=\sqrt{BD-C^2}$, puis, que l'on change successivement ξ en $-\xi$ et ζ en $-\zeta$, on trouvera

$$(19)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\varepsilon \varphi(X+\xi, Z+\zeta)\,d\xi \\ \displaystyle\quad = \frac{\lambda}{2} l\left(\frac{B\varepsilon^2+2C\varepsilon\zeta+D\zeta^2}{D\zeta^2}\right) - \mu\left(arc\,tang\frac{B\varepsilon+C\zeta}{E\zeta} - arc\,tang\frac{C}{E}\right), \\ \displaystyle\int_0^\varepsilon \varphi(X-\xi, Z+\zeta)\,d\xi \\ \displaystyle\quad = -\frac{\lambda}{2} l\left(\frac{B\varepsilon^2-2C\varepsilon\zeta+D\zeta^2}{D\zeta^2}\right) - \mu\left(arc\,tang\frac{B\varepsilon-C\zeta}{E\zeta} + arc\,tang\frac{C}{E}\right), \\ \displaystyle\int_0^\varepsilon \varphi(X+\xi, Z-\zeta)\,d\xi \\ \displaystyle\quad = \frac{\lambda}{2} l\left(\frac{B\varepsilon^2-2C\varepsilon\zeta+D\zeta^2}{D\zeta^2}\right) + \mu\left(arc\,tang\frac{B\varepsilon-C\zeta}{E\zeta} + arc\,tang\frac{C}{E}\right), \\ \displaystyle\int_0^\varepsilon \varphi(X-\xi, Z-\zeta)\,d\xi \\ \displaystyle\quad = -\frac{\lambda}{2} l\left(\frac{B\varepsilon^2+2C\varepsilon\zeta+D\zeta^2}{D\zeta^2}\right) + \mu\left(arc\,tang\frac{B\varepsilon+C\zeta}{E\zeta} - arc\,tang\frac{C}{E}\right), \end{cases}$$

$arc\,tang\frac{C}{E}$ désignant, à l'ordinaire, le plus petit arc positif ou négatif dont la tangente soit égale à $\frac{C}{E}$, et ainsi du reste.

Après que l'on aura réuni, en leur donnant un signe convenable, celles des intégrales précédentes qui doivent concourir à former la valeur de A, il faudra supposer, dans le résultat, $\zeta=0$. En vertu de cette supposition, la partie logarithmique deviendra toujours nulle ou infinie; et si, comme nous l'admettrons dorénavant, le rapport $\frac{B}{E}$ est positif, chacun des arcs

$$arc\,tang\frac{B\varepsilon+C\zeta}{E\zeta},\quad arc\,tang\frac{B\varepsilon-C\zeta}{E\zeta},$$

se trouvera réduit à $\frac{\pi}{2}$.

Cela posé, si l'on parcourt successivement les diverses hypothèses qui nous ont conduit aux formules (12), (13) et (14) du § II, on trouvera

$$(20)\left\{\begin{array}{llll} \text{Pour } a' < X < a'', & b' < Z < b'' \ldots\ldots & & A = 2\mu\pi, \\ \text{Pour } X = a' \text{ ou } a'', & b' < Z < b'' & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} & A = \mu\pi, \\ \text{Pour } a' < X < a'', & Z = b' \text{ ou } b'' & & \\ \text{Pour } X = a' \text{ ou } a'', & Z = b' \text{ ou } b'' \ldots & & A = \mu\left(\frac{\pi}{2} \pm \mathit{arc\,tang}\,\frac{C}{E}\right) \pm \infty\,\lambda. \end{array}\right.$$

Telles sont les équations qui déterminent, suivant les différents cas qui se présentent, les valeurs de A relatives à l'intégrale double $\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial S}{\partial z}\,dx\,dz$. Pour avoir celles qui sont relatives à l'intégrale double $\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial T}{\partial z}\,dx\,dz$, il faudra faire

$$T = \varphi(x, z).$$

On aura, dans cette hypothèse,

$$\varphi(X + \xi, Z + \zeta) = \frac{-\mu(B\xi + C\zeta) - \lambda E\zeta}{B\xi^2 + 2C\xi\zeta + D\zeta^2}.$$

Pour obtenir cette dernière équation, il suffit de changer, dans l'équation (18), μ en λ, et λ en $-\mu$. Par suite, si l'on effectue le même changement dans les équations (20), on obtiendra immédiatement les valeurs de A relatives à la double intégrale $\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial T}{\partial z}\,dx\,dz$.

Il suit des calculs précédents que les valeurs de A relatives aux deux intégrales

$$\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial S}{\partial z}\,dx\,dz,\quad \int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial T}{\partial z}\,dx\,dz \quad [1],$$

[1] Si, à la place des intégrales dont il est ici question, l'on considère la somme

$$\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial S}{\partial z}\,dx\,dz + \sqrt{-1}\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial T}{\partial z}\,dx\,dz$$

équivalente au premier membre de l'équation (A) (Ire Partie), on trouvera, au lieu des formules (21),

$$\text{(C)}\qquad A = 2\pi\sqrt{-1}\,(\lambda - \mu\sqrt{-1}),$$

restent finies, toutes les fois qu'on n'a pas en même temps X égal à l'une des limites de x, et Z égal à l'une des limites de z. Si aucune de ces égalités n'a lieu, les valeurs de A seront respectivement

REESE LIBRARY UNIVERSITY OF THE CALIFORNIA

$$(21)\quad \begin{cases} A = 2\mu\pi \quad \text{pour l'intégrale} \quad \int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''} \frac{\partial S}{\partial z}\,dx\,dz, \\ A = 2\lambda\pi \quad \text{pour l'intégrale} \quad \int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''} \frac{\partial T}{\partial z}\,dx\,dz. \end{cases}$$

Si une seule de ces égalités a lieu, on devra prendre seulement la moitié des valeurs précédentes, et l'on aura, en conséquence,

$$(22)\quad \begin{cases} A = \mu\pi \quad \text{pour l'intégrale} \quad \int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''} \frac{\partial S}{\partial z}\,dx\,dz, \\ A = \lambda\pi \quad \text{pour l'intégrale} \quad \int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''} \frac{\partial T}{\partial z}\,dx\,dz. \end{cases}$$

Les valeurs de λ et de μ sont toujours déterminées par les équations (16).

Les équations (21) et (22) deviendraient illusoires, si les valeurs de λ et de μ se présentaient sous une forme indéterminée; ce qui arriverait nécessairement, si $F'(\alpha + 6\sqrt{-1})$ devenait nul ou infini. On sait d'ailleurs que cette circonstance a lieu toutes les fois que $\alpha + 6\sqrt{-1}$ n'est pas une racine simple de l'équation

$$F(x) = 0.$$

C'est donc seulement dans le cas où cette racine est simple, qu'on peut employer les formules trouvées ci-dessus. Nous examinerons plus tard le cas où l'équation $F(x) = 0$ a des racines égales.

et au lieu des formules (22),

$$(D)\qquad A = \pi\sqrt{-1}\,(\lambda - \mu\sqrt{-1}).$$

Ajoutons que, dans tous les cas où il devient nécessaire d'employer la formule (D), l'équation (A) (Ire Partie) renferme des intégrales indéterminées qui doivent être réduites à leurs valeurs principales.

Il est fort remarquable que les valeurs de A, déterminées par les équations (21) et (22), dépendent uniquement de la forme de la fonction

$$p = f(x) = \frac{\mathfrak{F}(x)}{\mathrm{F}(x)},$$

et des racines de l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$. On trouvera donc les mêmes valeurs de A, quelles que soient les valeurs de M et de N. C'est ce dont il est facile de s'assurer directement. Supposons, par exemple,

$$\mathrm{M} = x, \quad \mathrm{N} = z :$$

on aura (§ II, I[re] Partie)

$$\mathrm{S} = \mathrm{P}', \quad \mathrm{T} = \mathrm{P}''.$$

Si maintenant on fait $x = \mathrm{X} + \xi$, $z = \mathrm{Z} + \zeta$; en s'arrêtant aux premières puissances de ξ et de ζ, on aura

$$\mathrm{S} = \frac{\lambda\xi - \mu\zeta}{\xi^2 + \zeta^2}, \quad \mathrm{T} = \frac{-\mu\xi - \lambda\zeta}{\xi^2 + \zeta^2}.$$

Par suite, si l'on suppose $a' < \mathrm{X} < a''$, $b' < \mathrm{Z} < b''$, la valeur de A relative à l'intégrale $\int_{a'}^{a''} \int_{b'}^{b''} \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z}\, dx\, dz$ sera

$$\mathrm{A} = 4 \int_0^{\varepsilon} \frac{\mu\zeta}{\xi^2 + \zeta^2}\, d\xi = 2\mu\pi;$$

et la valeur de A, relative à l'intégrale $\int_{a'}^{a''} \int_{b}^{b''} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\, dx\, dz$, sera

$$\mathrm{A} = 4 \int_0^{\varepsilon} \frac{\lambda\zeta}{\xi^2 + \zeta^2}\, d\xi = 2\lambda\pi;$$

ce qui s'accorde avec les formules (21).

Lorsqu'on a, en même temps,

$$\mathrm{X} = a' \text{ ou } a'', \quad \mathrm{Z} = b' \text{ ou } b'',$$

la valeur de A est, en général, infinie, ainsi que nous l'avons déjà remarqué. Néanmoins celle qui correspond à l'intégrale

$$\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial S}{\partial z}\,dx\,dz.$$

deviendrait finie, si λ était nul. En effet, dans ce cas, la partie logarithmique de chacune des intégrales (19) disparaît d'elle-même; et si, dans la partie restante, on suppose $\zeta = 0$, on trouvera

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\text{Pour } X = a',\ Z = b' \\ \text{Pour } X = a'',\ Z = b''\end{array}\right\}\ldots\ldots\quad A = \mu\left(\dfrac{\pi}{2} - arc\,tang\dfrac{C}{E}\right), \\ \left.\begin{array}{l}\text{Pour } X = a',\ Z = b'' \\ \text{Pour } X = a'',\ Z = b'\end{array}\right\}\ldots\ldots\quad A = \mu\left(\dfrac{\pi}{2} + arc\,tang\dfrac{C}{E}\right). \end{array}\right.$$

De même, si μ était nul, la valeur de A, correspondante à l'intégrale

$$\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial T}{\partial z}\,dx\,dz,$$

serait toujours finie, et l'on aurait,

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\text{Pour } X = a',\ Z = b' \\ \text{Pour } X = a'',\ Z = b''\end{array}\right\}\ldots\ldots\quad A = \lambda\left(\dfrac{\pi}{2} - arc\,tang\dfrac{C}{E}\right), \\ \left.\begin{array}{l}\text{Pour } X = a',\ Z = b'' \\ \text{Pour } X = a'',\ Z = b'\end{array}\right\}\ldots\ldots\quad A = \lambda\left(\dfrac{\pi}{2} + arc\,tang\dfrac{C}{E}\right). \end{array}\right.$$

Je passe maintenant aux équations (32) du § VI (I^re Partie). Les premiers membres de ces équations expriment les valeurs des intégrales doubles

$$\iint\frac{\partial(S_2 e^{-R''})}{\partial z}\,dx\,dz,\quad \iint\frac{\partial(T_2 e^{-R''})}{\partial z}\,dx\,dz$$

prises entre les limites o et x, o et z; limites que je désignerai, pour plus de généralité, par $x = a'$, $x = a''$, $z = b'$, $z = b''$. De plus, les valeurs des fonctions S_2, T_2, R'', qui entrent dans la composition de ces intégrales, sont déterminées par les équations

$$S_2 = \left(Q' \frac{\partial M}{\partial x} - Q'' \frac{\partial N}{\partial x}\right) \cos R' - \left(Q' \frac{\partial N}{\partial x} + Q'' \frac{\partial M}{\partial x}\right) \sin R',$$

$$T_2 = \left(Q' \frac{\partial N}{\partial x} + Q'' \frac{\partial M}{\partial x}\right) \cos R' + \left(Q' \frac{\partial M}{\partial x} - Q'' \frac{\partial N}{\partial x}\right) \sin R',$$

$$f(M \pm N\sqrt{-1}) = Q' \pm Q''\sqrt{-1},$$

$$\int (M \pm N\sqrt{-1}) = R' \pm R''\sqrt{-1},$$

$f(x)$, $\int(x)$ désignant deux fonctions quelconques de x, et M, N deux fonctions quelconques de x et de z.

Supposons maintenant, comme on l'a déjà fait,

$$f(x) = \frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)}.$$

Soit encore $\alpha + 6\sqrt{-1}$ une des racines de l'équation $F(x) = 0$; et désignons toujours par $x = X$, $z = Z$ un des systèmes de valeurs de x et de z qui satisfont à la fois aux deux équations

$$M = \alpha, \quad N = 6.$$

Ce système sera un de ceux qui rendent indéterminées les fonctions Q', Q'', S_2 et T_2. Si donc il se trouve compris entre les limites des intégrations, il existera, pour chacune des intégrales

$$\int_{a'}^{a''} \int_{b'}^{b''} \frac{\partial (S_2 e^{-R''})}{\partial z} \, dx\, dz, \quad \int_{a'}^{a''} \int_{b'}^{b''} \frac{\partial (T_2 e^{-R''})}{\partial z} \, dx\, dz,$$

une valeur de A correspondante au système dont il s'agit. On déterminera facilement cette valeur de la manière suivante.

Si l'on conserve la notation des n^{os} (15) et (16), et que l'on suppose toujours

$$x = X + \xi, \quad z = Z + \zeta,$$

ξ et ζ étant des quantités très petites, on obtiendra évidemment pour

$$Q', \; Q'', \; Q'\frac{\partial M}{\partial x} - Q''\frac{\partial N}{\partial x}, \; Q'\frac{\partial N}{\partial x} + Q''\frac{\partial M}{\partial x},$$

des valeurs égales à celles que nous avons trouvées ci-dessus n° (17) pour

$$P', \; P'', \; S \text{ et } T.$$

On aura donc

$$(25) \quad \begin{cases} Q'\dfrac{\partial M}{\partial x} - Q''\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\lambda(B\xi + C\zeta) - \mu E\zeta}{B\xi^2 + 2C\xi\zeta + D\zeta^2}, \\[2ex] Q'\dfrac{\partial N}{\partial x} + Q''\dfrac{\partial M}{\partial x} = \dfrac{-\mu(B\xi + C\zeta) - \lambda E\zeta}{B\xi^2 + 2C\xi\zeta + D\zeta^2}. \end{cases}$$

Concevons, de plus, qu'en vertu de la supposition

$$M = \alpha, \quad N = \varepsilon,$$

les deux fonctions $e^{-R''}\cos R'$, $e^{-R''}\sin R'$ reçoivent des valeurs déterminées γ et δ, en sorte qu'on ait, dans ce cas,

$$(26) \qquad e^{-R''}\cos R' = \gamma, \quad e^{-R''}\sin R' = \delta.$$

Les équations (26) subsisteront encore, si l'on suppose $x = X + \xi$, $z = Z + \zeta$. Par suite, on aura, dans cette dernière hypothèse,

$$(27) \quad \begin{cases} S_2 e^{-R''} = \dfrac{(\gamma\lambda + \delta\mu)(B\xi + C\zeta) - (\gamma\mu - \delta\lambda)E\zeta}{B\xi^2 + 2C\xi\zeta + D\zeta^2}, \\[2ex] T_2 e^{-R''} = \dfrac{-(\gamma\mu - \delta\lambda)(B\xi + C\zeta) - (\gamma\lambda + \delta\mu)E\zeta}{B\xi^2 + 2C\xi\zeta + D\zeta^2}. \end{cases}$$

Ces dernières équations sont entièrement semblables à celles qui déterminent les valeurs de S et T dans le n° (17); et, pour les en déduire, il suffit de remplacer

λ par................ $\gamma\lambda + \delta\mu$,

et μ par............... $\gamma\mu - \delta\lambda$.

Il suit de cette remarque, qu'en partant des formules (27), on doit arriver à des résultats semblables à ceux que présentent les nos (21), (22), (23) et (24). Ainsi, par exemple, les valeurs de A, relatives aux deux intégrales

$$\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial(S_2 e^{-R''})}{\partial z}\,dx\,dz,\quad \int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial(T_2 e^{-R''})}{\partial z}\,dx\,dz \quad (^1),$$

resteront finies, toutes les fois qu'on n'aura pas en même temps X égal à l'une des limites de x, et Z égal à l'une des limites de z. Si aucune de ces deux égalités n'a lieu, les valeurs de A seront respectivement

$$(28)\quad\left\{\begin{array}{ll} A = 2(\gamma\mu - \delta\lambda)\pi & \text{pour l'intégrale } \displaystyle\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial(S_2 e^{-R''})}{\partial z}\,dx\,dz, \\ A = 2(\gamma\lambda + \delta\mu)\pi & \text{pour l'intégrale } \displaystyle\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial(T_2 e^{-R''})}{\partial z}\,dx\,dz. \end{array}\right.$$

Si une seule de ces égalités a lieu, on devra prendre la moitié des

(1) Si, à la place des deux intégrales dont il est ici question, l'on considère la somme

$$\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial(S_2 e^{-R''})}{\partial z}\,dx\,dz + \sqrt{-1}\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''}\frac{\partial(T_2 e^{-R''})}{\partial z}\,dx\,dz$$

équivalente au premier membre de l'équation (O) (Ire Partie), on trouvera, au lieu des formules (28),

$$(\mathrm{E})\qquad A = 2\pi\sqrt{-1}\,(\lambda - \mu\sqrt{-1})(\gamma + \delta\sqrt{-1}),$$

et, au lieu des formules (29),

$$(\mathrm{F})\qquad A = \pi\sqrt{-1}\,(\lambda - \mu\sqrt{-1})(\gamma + \delta\sqrt{-1}).$$

Il importe d'observer que, pour déduire les équations (E), (F) des équations (C), (D), il suffit de remplacer la fonction réelle $\frac{\mathfrak{F}(x)}{F(x)}$ par la fonction imaginaire

$$\frac{\mathfrak{F}(x)}{F(x)}e^{r\sqrt{-1}}.$$

Ajoutons que, dans tous les cas où il devient nécessaire d'employer l'équation (F), la formule (O) (Ire Partie) renferme des intégrales indéterminées, qui doivent être réduites à leurs valeurs principales.

valeurs précédentes, et l'on aura, en conséquence,

$$(29)\quad \begin{cases} A = (\gamma\mu - \delta\lambda)\pi \quad \text{pour l'intégrale} \displaystyle\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''} \frac{\partial(S_2 e^{-R''})}{\partial z}\,dx\,dz, \\ A = (\gamma\lambda + \delta\mu)\pi \quad \text{pour l'intégrale} \displaystyle\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''} \frac{\partial(T_2 e^{-R''})}{\partial z}\,dx\,dz. \end{cases}$$

Enfin, si l'on suppose

$$\gamma\lambda + \delta\mu = 0,$$

la valeur de A, relative à l'intégrale $\displaystyle\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''} \frac{\partial(S_2 e^{-R''})}{\partial z}\,dx\,dz$, sera déterminée comme il suit :

$$(30)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \text{Pour } X = a', \quad Z = b' \\ \text{Pour } X = a'', \quad Z = b'' \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad A = (\gamma\mu - \delta\lambda)\left(\frac{\pi}{2} - arc\,tang\,\frac{C}{E}\right), \\ \left.\begin{array}{l} \text{Pour } X = a', \quad Z = b'' \\ \text{Pour } X = a'', \quad Z = b' \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad A = (\gamma\mu - \delta\lambda)\left(\frac{\pi}{2} + arc\,tang\,\frac{C}{E}\right); \end{cases}$$

et si l'on a

$$\gamma\mu - \delta\lambda = 0,$$

la valeur de A, relative à l'intégrale $\displaystyle\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''} \frac{\partial(T_2 e^{-R''})}{\partial z}\,dx\,dz$, sera déterminée par les formules suivantes :

$$(31)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \text{Pour } X = a', \quad Z = b' \\ \text{Pour } X = a'', \quad Z = b'' \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad A = (\gamma\lambda + \delta\mu)\left(\frac{\pi}{2} - arc\,tang\,\frac{C}{E}\right), \\ \left.\begin{array}{l} \text{Pour } X = a', \quad Z = b'' \\ \text{Pour } X = a'', \quad Z = b' \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad A = (\gamma\lambda + \delta\mu)\left(\frac{\pi}{2} + arc\,tang\,\frac{C}{E}\right). \end{cases}$$

Si l'on supposait $\int(x) = 0$, on aurait $R' = 0$, $R'' = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$; et, par suite, les formules (28), (29), (30) et (31) rentreraient dans les formules (21), (22), (23) et (24). Les valeurs de A, déterminées par ces diverses formules, indiquent les corrections que l'on peut être obligé de faire aux équations trouvées dans la première Partie de ce Mémoire. C'est ce que nous allons montrer plus clairement par quelques applications.

V.

PREMIÈRE APPLICATION, POUR FAIRE SUITE AU § II DE LA PREMIÈRE PARTIE DE CE MÉMOIRE.

Supposons, comme dans le § II de la première Partie,

$$M = x, \quad N = z.$$

Les équations (15) du paragraphe précédent donneront

$$B = 1, \quad C = 0, \quad D = 1, \quad E = 1.$$

Par suite, si l'on suppose

$$f(x) = \frac{\mathfrak{F}(x)}{F(x)},$$

et que l'on désigne à l'ordinaire par $\alpha + 6\sqrt{-1}$ une des racines de l'équation $F(x) = 0$, la valeur de A, qui correspond à la racine dont il s'agit, et qui se rapporte à l'intégrale $\int_0^a \int_0^b \frac{\partial S}{\partial z}\, dx\, dz$, sera, en vertu des équations (20), égale à

$$(32) \quad \begin{cases} 2\mu\pi & \text{si } \alpha \gtrless 0 \text{ et } a, \quad 6 \gtrless 0 \text{ et } b; \\ \mu\pi & \text{si } \begin{cases} \alpha \gtrless 0 \text{ et } a, \quad 6 = 0 \text{ ou } b; \\ \alpha = 0 \text{ ou } a, \quad 6 \gtrless 0 \text{ et } b; \end{cases} \\ \frac{1}{2}\mu\pi \pm \infty\lambda & \text{si } \alpha = 0 \text{ ou } a, \quad 6 = 0 \text{ ou } b. \end{cases}$$

Nous indiquons ici, par la notation

$$\alpha \gtrless 0 \text{ et } a,$$

que α est compris entre les deux limites 0 et a; c'est-à-dire, $>$ l'une et $<$ l'autre, sans égaler aucune d'elles.

Les formules (32) supposent que l'on a $0 < a$, $0 < b$, c'est-à-dire, que les quantités a et b sont positives. La valeur de A, déterminée par les mêmes formules, devrait être prise en signe contraire, si l'une des deux quantités a et b était positive, et l'autre négative. Mais ce changement de signe ne devrait plus avoir lieu si toutes deux étaient négatives en même temps.

Si l'équation $F(x) = 0$ a plusieurs racines comprises entre les limites de l'intégration, il faudra calculer la valeur de A séparément pour chacune d'elles, et la somme des résultats obtenus donnera la valeur complète de cette même quantité.

Concevons, pour plus de facilité, que a ne soit égal à aucune des valeurs de α, ni b à aucune des valeurs de β. Alors les formules (30) présenteront seulement quatre hypothèses différentes, savoir, celle où l'on aura en même temps $\alpha = 0$, $\beta = 0$, celle où α sera nul, celle où β sera nul, et celle où aucune des quantités α, β ne sera égale à zéro. Dans la première hypothèse, on aura, si $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $A = 0$; et, si λ n'est pas nul, $A = \infty$. On aura, dans la seconde, $A = \mu\pi$; dans la troisième, $\mu = 0$, et, par suite, $A = 0$; dans la quatrième, $A = 2\mu\pi$. La première hypothèse fournit le cas où l'équation $F(x) = 0$ a une racine nulle; et la troisième hypothèse, dans laquelle $\beta = 0$, celui où la racine $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ devient réelle sans être nulle. Comme on a, dans ce cas, $A = 0$, il faut en conclure qu'on pourra se dispenser d'avoir égard aux racines réelles de l'équation $F(x) = 0$, à moins qu'une de ces racines ne soit égale à zéro.

Supposons maintenant que l'équation $F(x) = 0$ n'ait pas de racines nulles, ou, ce qui revient au même, que $f(x) = \dfrac{\mathcal{F}(x)}{F(x)}$ ne devienne pas infinie par des valeurs nulles de x. Désignons par

$$S(\mu_{\alpha,\beta})$$

la somme des valeurs de μ qui correspondent à des valeurs de α comprises entre 0 et a, et à des valeurs de β comprises entre 0 et b. Soit encore

$$S(\mu_{0,\beta})$$

la somme des valeurs de μ qui correspondent à des valeurs nulles de α et à des valeurs de β comprises entre 0 et b. Enfin désignons par A′ la valeur complète de A relative à l'intégrale

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial S}{\partial z}\, dx\, dz.$$

On aura, en vertu de ce qui précède,

$$(33)\qquad A' = [2S(\mu_{\alpha,6}) + S(\mu_{0,6})]\pi \quad (^1).$$

(1) Les formules (33) et (34) sont renfermées l'une et l'autre dans la suivante :

$$(G)\qquad A' + A''\sqrt{-1} = 2\pi\sqrt{-1}\,S(\lambda - \mu\sqrt{-1}),$$

le signe S étant placé devant le terme $\lambda - \mu\sqrt{-1}$, pour indiquer une somme de termes semblables correspondants aux valeurs de $\alpha + 6\sqrt{-1}$, dans lesquelles α demeure compris entre les limites 0, a, et 6 entre les limites 0, b. Si, pour quelque terme, la valeur de α se réduisait à l'une des quantités 0, a, ou la valeur de 6 à l'une des limites 0, b, il faudrait avoir soin de réduire ce terme à sa moitié. Cela posé, les équations (36) pourront être remplacées par la seule formule imaginaire

$$(H)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^a f(x + b\sqrt{-1}) - \int^a f(x)\,dx \\ &= \sqrt{-1}\left[\int_0^b f(a + z\sqrt{-1})\,dz - \int_0^b f(z\sqrt{-1})\,dz\right] - 2\pi\sqrt{-1}\,S(\lambda - \mu\sqrt{-1}),\end{aligned}\right.$$

dans laquelle toute intégrale qui aura une valeur générale indéterminée devra être réduite à sa valeur principale.

Si maintenant on pose $a = \pm\infty$, $b = \infty$, et si l'on admet que $f(x + z\sqrt{-1})$ s'évanouisse, 1° pour $x = \pm\infty$, quel que soit z, 2° pour $z = \infty$, quel que soit x, on déduira de l'équation (H) deux autres équations de la forme

$$(I)\qquad \int_0^\infty f(x)\,dx = \sqrt{-1}\int_0^\infty f(z\sqrt{-1})\,dz + 2\pi\sqrt{-1}\,S(\lambda - \mu\sqrt{-1}),$$

$$(K)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx = -\int_0^{-\infty} f(x)\,dx \\ &= -\sqrt{-1}\int_0^\infty f(z\sqrt{-1})\,dz + 2\pi\sqrt{-1}\,S(\lambda - \mu\sqrt{-1}),\end{aligned}\right.$$

le signe S indiquant, dans l'équation (I), une somme de termes correspondants à des valeurs positives de α, et, dans l'équation (K), une somme de termes correspondants à des valeurs négatives de α. En ajoutant les formules (I) et (K), on obtiendra la suivante,

$$(L)\qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = 2\pi\sqrt{-1}\,S(\lambda - \mu\sqrt{-1}),$$

De même, si l'on désigne par

$$S(\lambda_{\alpha,\beta}) \quad \text{et} \quad S(\lambda_{\alpha,0})$$

la somme des valeurs de λ qui correspondent à des valeurs de α com-

dans laquelle le signe S indiquera une somme de termes relatifs à des valeurs positives ou négatives de α, mais à des valeurs positives de β. Il est essentiel d'observer qu'on devra encore réduire à moitié chaque terme auquel correspondrait une valeur nulle de β, et réduire, dans le même cas, l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ à sa valeur principale.

Les équations (H) et (L) s'accordent avec celles que j'ai données dans le *Résumé des Leçons de Calcul infinitésimal* [*voir* les formules (6) et (14) de la XXXIV^e Leçon].

Tant que la fonction $p = f(x)$ reste réelle, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ est pareillement réelle, et, par suite, le coefficient de $2\pi\sqrt{-1}$, dans le second membre de l'équation (L), doit s'évanouir. On a donc alors

$$\text{(M)} \qquad S(\lambda) = 0.$$

Alors aussi, en écrivant p au lieu de $f(x)$ dans l'équation (L), on obtient la suivante,

$$\text{(N)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p\,dx = 2\pi\,S(\mu),$$

qui ne diffère pas de la formule (39).

Si, dans l'équation (M), on substitue à λ sa valeur tirée des formules (16), on trouvera

$$\text{(O)} \qquad S\frac{\mathcal{F}(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})} + S\frac{\mathcal{F}(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha-\beta\sqrt{-1})} = 0,$$

le signe S devant être étendu, dans chacune des expressions

$$S\frac{\mathcal{F}(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})}, \quad S\frac{\mathcal{F}(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha-\beta\sqrt{-1})},$$

à toutes les valeurs positives ou négatives de α, et à toutes les valeurs positives de β. De plus, comme la fonction $p = \frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)}$ est réelle par hypothèse, il en résulte que les racines de l'équation $\frac{1}{p} = 0$ sont deux à deux de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$. En conséquence, l'équation (O) peut s'écrire comme il suit :

$$\text{(P)} \qquad S\frac{\mathcal{F}(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = 0,$$

le signe S embrassant toutes les valeurs réelles possibles des deux quantités α, β.

prises entre o et a, et à des valeurs de β comprises entre o et b, ou nulles; par

$$S(\lambda_{0,\beta})$$

la somme des valeurs de λ qui correspondent à des valeurs nulles de α et à des valeurs de β comprises entre o et b; et par A'' la valeur complète de A relative à l'intégrale

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial T}{\partial z}\, dx\, dz :$$

on aura

$$(34)\qquad A'' = [2S(\lambda_{\alpha,\beta}) + S(\lambda_{\alpha,0}) + S(\lambda_{0,\beta})]\pi.$$

Si l'équation $F(x) = 0$ avait une racine nulle, la valeur correspondante de μ serait toujours nulle, mais la valeur de λ pourrait être finie. Soit $\lambda_{0,0}$ cette valeur de λ. La valeur correspondante de A, relativement à l'intégrale $\int_0^a \int_0^b \frac{\partial T}{\partial z}\, dx\, dz$, serait $A = \frac{1}{2}\lambda_{0,0}\pi$. On aura donc, en admettant l'hypothèse d'une racine nulle,

$$(35)\qquad A'' = [2S(\lambda_{\alpha,\beta}) + S(\lambda_{\alpha,0}) + S(\lambda_{0,\beta}) + \tfrac{1}{2}\lambda_{0,0}]\pi.$$

Revenons au § II de la première Partie. Dans ce paragraphe, les premiers membres des équations (5) expriment les valeurs des intégrales

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial S}{\partial z}\, dx\, dz,\quad \int_0^a \int_0^b \frac{\partial T}{\partial z}\, dx\, dz.$$

Mais ces équations ne sont vraies qu'autant que les fonctions

$$S = P',\quad T = P''$$

ne peuvent devenir indéterminées entre les limites des intégrations. Si, entre ces limites, les valeurs de P' et de P'' deviennent indéterminées, alors, pour corriger les équations que l'on considère, il suffira d'ajouter aux premiers membres les valeurs de A qui correspondent aux intégrales dont il s'agit. On aura donc, en général,

$$(36)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^a P'\,dx - \int_0^a p\,dx + A' = \int_0^b p''\,dz - \int_0^b P''\,dz, \\ \displaystyle\int_0^a P''\,dx + A'' \qquad\qquad = \int_0^b P'\,dz - \int_0^b p'\,dz, \end{cases}$$

la valeur de A' étant déterminée par l'équation (33), et la valeur de A'' par l'équation (34) ou (35).

Dans les équations (36),

$$\int_0^a P'\,dx - \int_0^a p\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^a P''\,dx$$

désignent respectivement les valeurs des intégrales

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial P'}{\partial z}\,dx\,dz, \quad \int_0^a \int_0^b \frac{\partial P''}{\partial z}\,dx\,dz,$$

prises, par rapport à z, entre les limites o et b; ce qui suppose que les deux fonctions P', P'' croissent ou décroissent d'une manière continue depuis $z = 0$ jusqu'à $z = b$. Si le contraire avait lieu, les équations (36) ne seraient plus vraies; mais il serait facile de les rectifier à l'aide des principes établis dans le § III.

Corollaire I. — Supposons que P' et P'' s'évanouissent pour des valeurs infinies positives ou négatives de la variable x, et pour des valeurs infinies positives de la variable z. Si, dans ce cas, on suppose

$$a = \infty, \quad b = \infty,$$

la première des équations (36) deviendra

$$(37)\qquad \int_0^\infty p\,dx = \pi[2\mathrm{S}(\mu_{\alpha,6}) + \mathrm{S}(\mu_{0,6})] - \int_0^\infty p''\,dz,$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs positives de α et de 6.

Si, dans le même cas, on suppose

$$a = -\infty, \quad b = \infty,$$

et qu'au lieu de prendre les intégrales relatives à x entre les limites $x = 0$, $x = -\infty$, on veuille qu'elles soient prises entre les limites $x = -\infty$, $x = 0$, on devra changer les signes des premiers membres des équations (36); et, par suite, si l'on désigne par

$$\mathrm{S}(\mu_{-\alpha,6})$$

la somme des valeurs de μ correspondantes à des valeurs négatives de α, mais à des valeurs positives de 6, on trouvera

$$(38) \qquad \int_{-\infty}^{0} p\,dx = \pi[2\,\mathrm{S}(\mu_{-\alpha,6}) + \mathrm{S}(\mu_{0,6})] + \int_{0}^{\infty} p''\,dz.$$

Si maintenant on ajoute entre elles les équations (37) et (38), et que l'on désigne par

$$\mathrm{S}(\mu_{\pm\alpha,6})$$

la somme des valeurs de μ qui correspondent à des valeurs positives, nulles ou négatives de α, mais à des valeurs positives de 6, on aura simplement

$$(39) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p\,dx = 2\pi\,\mathrm{S}(\mu_{\pm\alpha,6}) \quad (^1).$$

(1) Nous avons obtenu la formule (39) en supposant que $f(x)$ se réduisait à une fonction réelle désignée par p ou par $\frac{\mathcal{F}(x)}{\mathrm{F}(x)}$. Mais rien n'empêche d'appliquer la méthode que nous avons suivie pour établir cette formule à une fonction imaginaire, et de supposer, par exemple,

$$f(x) = q(\cos r + \sqrt{-1}\sin r),$$

q et r désignant deux fonctions réelles de x. Alors la formule (39) subsistera encore, pourvu que l'on fasse, comme dans le § VI (Ire Partie),

$$p = q\cos r,$$

et que l'on détermine toujours la quantité μ par le moyen de l'équation (B), c'est-à-dire, pourvu que l'on représente par p la partie réelle de la fonction $f(x)$, et par $-\mu$ le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le produit

$$\varepsilon\, f(\alpha + 6\sqrt{-1} + \varepsilon),$$

ε étant une quantité infiniment petite. L'équation (39), ainsi généralisée, fournit les valeurs de presque toutes les intégrales définies connues, et d'un grand nombre d'autres. On pour-

On pourra donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Soit*

$$\frac{\mathfrak{F}(x)}{\mathrm{F}(x)} = p$$

une fonction de x telle, que chacune des racines de l'équation $\frac{1}{p} = 0$ *corresponde à un facteur du premier degré dans la fonction* $\frac{1}{p}\cdot$ *Suppo-*

rait la remplacer par la formule (L), qui conduit précisément aux mêmes résultats. On peut aussi présenter l'équation (39) sous d'autres formes que nous allons indiquer.

Soit $\varphi(x) + \sqrt{-1}\,\chi(x)$ une fonction imaginaire qui ne devienne jamais infinie pour des valeurs réelles et finies de x, ni pour des valeurs imaginaires, dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ reste positif, et supposons

$$f(x) = \left[\varphi(x) + \sqrt{-1}\,\chi(x)\right]\frac{\mathfrak{F}(x)}{\mathrm{F}(x)},$$

les fonctions $\mathfrak{F}(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ étant réelles, ainsi que $\varphi(x)$ et $\chi(x)$. Admettons, en outre, que le produit

$$\left[\varphi(x + z\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}\,\chi(x + z\sqrt{-1})\right]\frac{\mathfrak{F}(x + z\sqrt{-1})}{\mathrm{F}(x + z\sqrt{-1})}$$

s'évanouisse, 1° pour $x = \pm\infty$, quel que soit z, 2° pour $z = \infty$, quel que soit x. Enfin concevons que, les valeurs des quantités λ, μ, étant données par la formule (A) (p. 409), on désigne par γ et δ deux autres quantités réelles propres à vérifier l'équation

$$\text{(Q)} \qquad \varphi(\alpha + 6\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}\,\chi(\alpha + 6\sqrt{-1}) = \gamma + \delta\sqrt{-1}.$$

On aura, dans cette hypothèse,

$$\text{(R)} \quad \varepsilon f(\alpha + 6\sqrt{-1} + \varepsilon) = (\lambda - \mu\sqrt{-1})(\gamma + \delta\sqrt{-1}) = \gamma\lambda + \delta\mu - (\gamma\mu - \delta\lambda)\sqrt{-1};$$

et, par suite, le coefficient de $\sqrt{-1}$, au lieu d'être représenté par $-\mu$, sera équivalent à $-(\gamma\mu - \delta\lambda)$. Donc, si, dans la formule (39) ou (N), on remplace p par la partie réelle du produit

$$\left[\varphi(x) + \sqrt{-1}\,\chi(x)\right]\frac{\mathfrak{F}(x)}{\mathrm{F}(x)},$$

on devra y remplacer en même temps la quantité μ par $\gamma\mu - \delta\lambda$. On obtiendra ainsi l'équation

$$\text{(S)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\frac{\mathfrak{F}(x)}{\mathrm{F}(x)}\,dx = 2\pi\,\mathrm{S}(\gamma\mu - \delta\lambda).$$

Si l'on suppose, pour plus de simplicité,

$$\frac{\mathfrak{F}(x)}{\mathrm{F}(x)} = q, \quad \varphi(x) = \cos r, \quad \chi(x) = \sin r,$$

sons, de plus, que chacune des parties réelle et imaginaire de l'expression

$$\frac{\mathfrak{F}(x+z\sqrt{-1})}{F(x+z\sqrt{-1})}$$

soit une fonction continue de z qui s'évanouisse pour des valeurs infinies, positives ou négatives, de x, et pour des valeurs infinies, positives, de z;

l'équation (S) deviendra

$$\text{(T)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} q\cos r\,dx = 2\pi\,S(\gamma\mu-\delta\lambda).$$

Cette dernière se déduit immédiatement des principes établis dans le § IV. Car, en vertu de ces principes, il suffira, pour déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} q\cos r\,dx,$$

de substituer, dans l'équation (39), à la quantité $2\mu\pi$, c'est-à-dire au second membre de la première des formules (21), la quantité $2(\gamma\mu-\delta\lambda)\pi$, c'est-à-dire le second membre de la première des formules (28).

L'équation (S) entraîne évidemment la suivante :

$$\text{(U)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\chi(x)\frac{\mathfrak{F}(x)}{F(x)}dx = 2\pi(\gamma\lambda+\delta\mu).$$

Car on tire de l'équation (Q), multipliée par $-\sqrt{-1}$,

$$\chi(\alpha+6\sqrt{-1})-\sqrt{-1}\,\varphi(\alpha+6\sqrt{-1}) = \delta-\gamma\sqrt{-1};$$

et il en résulte que, si l'on remplace $\varphi(x)$ par $\chi(x)$, on devra remplacer en même temps $\gamma+\delta\sqrt{-1}$ par $\delta-\gamma\sqrt{-1}$, c'est-à-dire γ par δ, et δ par $-\gamma$. Ajoutons que les équations (S) et (U) sont renfermées l'une et l'autre dans la formule

$$\text{(V)} \quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(x)+\sqrt{-1}\,\chi(x)\right]\frac{\mathfrak{F}(x)}{F(x)}dx \\ &\quad = 2\pi\sqrt{-1}\,S\left[(\lambda-\mu\sqrt{-1})(\gamma+\delta\sqrt{-1})\right] \\ &\quad = 2\pi\sqrt{-1}\,S\left\{\left[\varphi(\alpha+6\sqrt{-1})+\sqrt{-1}\,\chi(\alpha+6\sqrt{-1})\right]\frac{\mathfrak{F}(\alpha+6\sqrt{-1})}{F'(\alpha+6\sqrt{-1})}\right\}, \end{aligned}\right.$$

qui est précisément ce que devient l'équation (L), quand on attribue à la fonction $f(x)$ une valeur imaginaire.

Il est essentiel d'observer qu'on ne diminuera pas la généralité de la formule (S), si l'on suppose que $\frac{\mathfrak{F}(x)}{F(x)}$ désigne une fraction rationnelle, et que la fonction $\varphi(x)+\sqrt{-1}\,\chi(x)$ continue de remplir les conditions ci-dessus énoncées. En effet, si, la fonction $f(x)$ étant *enfin soit* $\alpha + 6\sqrt{-1}$ *une des racines imaginaires de l'équation* $\frac{1}{p} = 0$; *et*

$$\mu = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{\mathcal{F}(\alpha - 6\sqrt{-1})}{F'(\alpha - 6\sqrt{-1})} - \frac{\mathcal{F}(\alpha + 6\sqrt{-1})}{F'(\alpha + 6\sqrt{-1})}\right].$$

La valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} p\,dx$ *sera le produit de la circonférence,*

imaginaire, on désigne par

$$x = a, \quad x = a', \quad \ldots$$

les racines réelles et finies de l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$, et par

$$x = \alpha + 6\sqrt{-1}, \quad x = \alpha' + 6'\sqrt{-1}, \quad \ldots$$

celles des racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif; si d'ailleurs on considère, pour plus de simplicité, le cas où toutes les racines sont inégales, il suffira de prendre

$$\frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)} = \frac{1}{(x-a)(x-a')\ldots(x-\alpha-6\sqrt{-1})(x-\alpha+6\sqrt{-1})(x-\alpha'-6'\sqrt{-1})(x-\alpha'+6'\sqrt{-1})\ldots}$$
$$= \frac{1}{(x-a)(x-a')\ldots[(x-\alpha)^2+6^2][(x-\alpha')^2+6'^2]\ldots},$$

pour que l'équation

$$\varphi(x) + \sqrt{-1}\,\chi(x) = \pm\infty$$

n'ait pas de racines réelles et finies, ni de racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ soit positif.

La formule (S) est du nombre de celles que j'avais établies dans des Leçons données, en 1817, au Collège de France. Dans l'une de ces Leçons, j'avais appliqué la même formule aux cas où l'on prend pour $\varphi(x) + \sqrt{-1}\,\chi(x)$ l'une des fonctions

$$e^{rx\sqrt{-1}}, \quad \frac{e^{rx\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}, \quad l(1 - rx\sqrt{-1}), \quad \frac{l(1 - rx\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},$$

r étant une quantité positive, et j'avais ainsi obtenu les équations

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)} \cos rx\,dx = 2\pi\,\mathrm{S}[e^{-6r}(\mu\cos\alpha r - \lambda\sin\alpha r)],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)} \sin rx\,dx = 2\pi\,\mathrm{S}[e^{-6r}(\mu\sin\alpha r + \lambda\cos\alpha r)],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)} \frac{l(1+r^2x^2)}{2}\,dx = 2\pi\,\mathrm{S}\left\{\mu\frac{l[(1+6r)^2+\alpha^2r^2]}{2} + \lambda\,\mathrm{arc\,tang}\frac{\alpha r}{1+6r}\right\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)} \mathrm{arc\,tang}\,rx\,dx = 2\pi\,\mathrm{S}\left\{\mu\,\mathrm{arc\,tang}\frac{\alpha r}{1+6r} - \lambda\frac{l[(1+6r)^2+\alpha^2r^2]}{2}\right\},$$

qui a pour rayon l'unité, par la somme des valeurs de μ qui correspondent à des valeurs positives ou négatives de α, mais à des valeurs positives de $\mathcal{C}$.

Lorsque p est une fonction paire de x, la moitié du produit qu'on vient de citer est la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty p\,dx$.

Exemple I. — Soit

$$p = \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}},$$

dont les deux premières sont renfermées dans l'équation (Z) (*voir*, ci-après, § VII), et dont la dernière comprend la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arc\,tang} x \frac{dx}{x(1+x^2)} = 2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tang} x \frac{dx}{x(1+x^2)} = \pi\, l(2),$$

que l'intégration par parties réduit à

$$\int_0^\infty \operatorname{arc\,tang} x \frac{dx}{x^2} = \int_0^\infty (\operatorname{arc\,cos} x)^2\, dx = \frac{\pi}{2}\, l(2).$$

On déduirait avec la même facilité, de la formule (S) ou de la formule (L), les valeurs des intégrales définies

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(r^2 - 2rx\cos\theta + x^2)\frac{\mathfrak{F}(x)}{F(x)}\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arc\,tang}\frac{r\cos\theta - x}{r\sin\theta}\,\frac{\mathfrak{F}(x)}{F(x)}\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{a\cos bx}\cos(a\sin bx)\frac{\mathfrak{F}(x)}{F(x)}\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{a\cos bx}\sin(a\sin bx)\frac{\mathfrak{F}(x)}{F(x)}\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(1 + 2r\cos bx + r^2)\frac{\mathfrak{F}(x)}{F(x)}\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arc\,tang}\frac{r\sin bx}{1 + r\cos bx}\,\frac{\mathfrak{F}(x)}{F(x)}\,dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

a, b, r étant des constantes positives, et θ un arc renfermé entre les limites 0, π; et, en général, les valeurs de toutes les intégrales que j'ai citées dans le XIX[e] Cahier du *Journal de l'École royale Polytechnique,* et dans l'Addition au *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.*

m et n étant deux nombres entiers positifs, et m étant $< n$. On aura

$$\mathcal{F}(x) = x^{2m}, \quad F(x) = 1 + x^{2n}, \quad \frac{\mathcal{F}(x)}{F'(x)} = \frac{1}{2n} x^{2m+1-2n}.$$

De plus, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ désignant une racine quelconque de l'équation $1 + x^{2n} = 0$, on aura

$$\alpha = \cos(2k+1)\frac{\pi}{2n}, \quad \beta = \sin(2k+1)\frac{\pi}{2n},$$

k étant un nombre entier pris à volonté. Cela posé, on trouvera

$$\mu = \frac{1}{2n}\sin\left[(2k+1)\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right],$$

$$S(\mu_{\pm\alpha,\beta}) = \frac{1}{2n}\left\{\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n} + \sin\left[3\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right] + \ldots + \sin\left[(2n-1)\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{2n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

On aura donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

Si l'on prend l'intégrale précédente entre les limites

$$x = 0, \quad x = \infty,$$

sa valeur sera de moitié moindre. On aura donc, entre ces dernières limites,

$$(a) \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{2n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

Cette équation étant vraie, quelles que soient les valeurs entières de m et de n, sera encore vraie, si l'on donne à m et à n des valeurs quelconques rationnelles ou irrationnelles. Si donc on fait

$$2m+1 = a, \quad 2n = b,$$

on aura, en général,

$$(b)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x^b} = \frac{\pi}{b\sin\frac{a\pi}{b}}.$$

Euler a, le premier, donné cette formule (*voir* le *Calcul intégral d'Euler*, p. 254). Il l'a démontrée de deux manières. La première est fort compliquée. La seconde est plus simple; mais l'auteur lui-même la regarde comme peu naturelle : *Ne hanc quidem viam pro maxime naturali haberi velim.* On voit, par ce qui précède, que la formule dont il s'agit n'est qu'un cas particulier d'une autre beaucoup plus générale, relative aux intégrales qui doivent être prises entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ de la variable.

Exemple II. — Soit

$$p = \frac{x^{2m}}{1-x^{2n}},$$

m et n étant des nombres entiers positifs, et m étant $< n$. On trouvera

$$S_{(\mu\pm\alpha,\,6)} = \frac{1}{2n}\left\{\sin\left[2\,\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right] + \sin\left[4\,\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right] + \ldots + \sin\left[(2n-2)\,\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2n\,\mathrm{tang}\,\frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

On aura donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1-x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{n\,\mathrm{tang}\,\frac{(2m+1)\pi}{2n}};$$

et, par suite,

$$(c)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1-x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{2n\,\mathrm{tang}\,\frac{(2m+1)\pi}{2n}}\ \ (^1).$$

Cette dernière équation étant vraie, quels que soient les nombres

(1) Les équations (c) et (d) fournissent seulement les valeurs en termes finis des intégrales qu'elles renferment. Ajoutons que les équations (b) et (d), quand on y remplace x

entiers m et n, sera encore vraie si m et n deviennent irrationnels. Si donc on fait

$$2m + 1 = a, \quad 2n = b,$$

on aura, en général,

$$(d) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1 - x^b} = \frac{\pi}{b \operatorname{tang} \frac{a\pi}{b}}.$$

L'équation précédente semble absurde au premier abord, attendu que la fonction sous le signe $\int$ passe par l'infini entre les limites de

par $x^{\frac{1}{b}}$, et a par ba, prennent les formes

$$(W) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1 + x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1 - x} = \frac{\pi}{\operatorname{tang} a\pi}.$$

Or, pour déduire immédiatement ces deux dernières de la formule (L), il suffit de poser

$$f(x) = \frac{(-x\sqrt{-1})^{a-1}}{1 + x}:$$

on trouve alors

$$(-\sqrt{-1})^{a-1}\int_0^\infty x^{a-1}\frac{dx}{1 + x} + (\sqrt{-1})^{a-1}\int_0^\infty x^{a-1}\frac{dx}{1 - x} = \pi(\sqrt{-1})^a;$$

puis, en multipliant les deux membres par $(-\sqrt{-1})^a$, et ayant égard à l'équation

$$(-\sqrt{-1})^{2a-1} = \left(\cos\frac{\pi}{2} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right)^{2a-1} = \sin a\pi + \sqrt{-1}\cos a\pi,$$

on obtient la formule

$$(\sin a\pi + \sqrt{-1}\cos a\pi)\int_0^\infty x^{a-1}\frac{dx}{1 + x} - \sqrt{-1}\int_0^\infty x^{a-1}\frac{dx}{1 - x} = \pi,$$

qui comprend les deux équations (W).

Il est facile de transformer les valeurs principales des intégrales indéterminées en intégrales définies dans lesquelles les fonctions sous le signe $\int$ cessent de devenir infiniment grandes pour des valeurs particulières de la variable. C'est par une transformation de ce genre que l'on déduit de l'équation (c) la formule (e) dont le premier membre est une intégrale complètement déterminée.

l'intégration. Néanmoins on peut vérifier, dans plusieurs cas particuliers, le résultat qu'on vient de trouver. Ainsi, par exemple, si l'on fait $a = 1$, $b = 2$, l'équation (d) donnera

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 - x^2} = 0:$$

ce qu'on peut vérifier de la manière suivante.

L'intégrale $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1 - x^2}$, ε étant une quantité très petite, est

$$\tfrac{1}{2} l\left(\frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

La même intégrale, prise entre les limites $x = 1 + \varepsilon$, $x = \infty$, a pour valeur

$$\tfrac{1}{2} l\left(\frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon}\right).$$

La somme de ces deux résultats étant

$$\tfrac{1}{2} l\left(\frac{2 - \varepsilon}{2 + \varepsilon}\right),$$

si, dans cette somme, on fait $\varepsilon = 0$, on aura évidemment la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dx}{1 - x^2}$. Cette valeur sera donc

$$\tfrac{1}{2} l\left(\tfrac{2}{2}\right) = 0;$$

ce qui s'accorde avec l'équation (d).

Ce qui achève de prouver qu'on ne doit pas rejeter les intégrales dans lesquelles les fonctions sous le signe $\int$ passent par l'infini, c'est qu'étant donnée une intégrale de cette nature, on peut toujours la transformer en une autre qui n'offre plus le même inconvénient. Ainsi, par exemple, si dans l'équation (c) on fait

$$n - 2m = p + 1,$$

on aura

$$\int_0^\infty \frac{x^{-p}}{x^n - x^{-n}} \frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2n} \operatorname{tang} \frac{p\pi}{2n};$$

et, si l'on applique à cette dernière intégrale la transformation indiquée par M. Legendre (IV[e] Partie des *Exercices de Calcul intégral*, p. 126), on trouvera qu'elle est égale à la suivante

$$\int_0^1 \frac{x^{-p} - x^p}{x^n - x^{-n}} dx.$$

On aura donc, entre ces limites,

$$(e) \qquad \int_0^1 \frac{x^p - x^{-p}}{x^n - x^{-n}} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2n} \operatorname{tang}\left(\frac{p\pi}{2n}\right),$$

ce qui s'accorde avec une formule trouvée par Euler. Il est aisé de voir que, dans cette dernière formule, la quantité sous le signe $\int$ ne devient plus infinie entre les limites de l'intégration.

Exemple III. — Soit

$$p = \frac{x^{2m}}{(1 + x^{2n})(1 + x^{2r})},$$

m, n, r étant des nombres entiers positifs; et supposons en outre, 1° que les deux équations $1 + x^{2n} = 0$, $1 + x^{2r} = 0$, n'aient pas de racines communes; 2° que m soit plus petit que $n + r$. Si l'on désigne d'abord par $\alpha + 6\sqrt{-1}$ une des racines imaginaires de l'équation

$$1 + x^{2n} = 0,$$

on pourra faire

$$\mathcal{F}(x) = \frac{x^{2m}}{1 + x^{2r}}, \quad F(x) = 1 + x^{2n}, \quad F'(x) = 2nx^{2n-1},$$

et l'on aura par suite

$$\frac{\mathcal{F}(x)}{F'(x)} = \frac{1}{2n} \frac{1}{x^{2n-2m-1} + x^{2n+2r-2m-1}};$$

d'où l'on conclut

$$\mu = \frac{1}{4n}\left\{\frac{\sin\left[(2k+1)\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right]+\sin\left[(2k+1)\frac{(2m-2r+1)\pi}{2n}\right]}{1+\cos\left[(2k+1)\frac{r\pi}{n}\right]}\right\},$$

k étant un nombre entier pris à volonté. De même, si l'on désigne par $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ une racine imaginaire de l'équation

$$1+x^{2r}=0,$$

on trouvera

$$\mu = \frac{1}{4r}\left\{\frac{\sin\left[(2k'+1)\frac{(2m+1)\pi}{2r}\right]+\sin\left[(2k'+1)\frac{(2m-2n+1)\pi}{2r}\right]}{1+\cos\left[(2k'+1)\frac{n\pi}{r}\right]}\right\},$$

k' étant encore un nombre entier.

Cela posé, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}\,dx}{(1+x^{2n})(1+x^{2r})} = \frac{4n}{\pi}\,\mathrm{S}\left\{\frac{\sin\left[(2k+1)\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right]+\sin\left[(2k+1)\frac{(2m-2r+1)\pi}{2n}\right]}{1+\cos\left[(2k+1)\frac{r\pi}{n}\right]}\right\}$$
$$+\frac{4r}{\pi}\,\mathrm{S}\left\{\frac{\sin\left[(2k'+1)\frac{(2m+1)\pi}{2r}\right]+\sin\left[(2k'+1)\frac{(2m-2n+1)\pi}{2r}\right]}{1+\cos\left[(2k'+1)\frac{n\pi}{r}\right]}\right\},$$

le premier signe S étant relatif à toutes les valeurs de k plus petites que $\frac{2n-1}{2}$, et le second à toutes les valeurs de k' plus petites que $\frac{2r-1}{2}$.

La valeur de l'intégrale précédente serait de moitié moindre si elle était prise entre les limites $x=0$, $x=\infty$. Ainsi, par exemple, si, n étant un nombre pair, on suppose $2r=3n$, on trouvera que l'intégrale

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{2m}\,dx}{(1+x^{2n})(1+x^{3n})}$$

a pour valeur la demi-somme des quatre séries (¹)

$$\frac{\pi}{2n}\left\{\begin{array}{l}(\sin\theta+\cos\theta)\\ +(\sin 3\theta+\cos 3\theta)+\ldots\\ +[\sin(2n-1)\theta+\cos(2n-1)\theta]\end{array}\right\}=\frac{\pi}{2n}\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right),$$

$$\frac{1}{1+\cos\frac{2}{3}\pi}\,\frac{\pi}{3n}\left\{\begin{array}{l}\left[\sin\theta'+\sin\left(\theta'-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\\ +\left[\sin 7\theta'+\sin 7\left(\theta'-\frac{2\pi}{3}\right)\right]+\ldots\\ +\left[\sin(3n-5)\theta'+\sin(3n-5)\left(\theta'-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\end{array}\right\}=\frac{2\pi}{3n}\left[\frac{\cos 2\theta'+\cos\left(2\theta'-\frac{4\pi}{3}\right)}{\sin 3\theta'}\right].$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{3n}\left\{\begin{array}{l}\left[\sin 3\theta'+\sin 3\left(\theta'-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\\ +\left[\sin 9\theta'+\sin 9\left(\theta'-\frac{2\pi}{3}\right)\right]+\ldots\\ +\left[\sin(3n-3)\theta'+\sin(3n-3)\left(\theta'-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\end{array}\right\}=\frac{\pi}{3n}\,\frac{1}{\sin 3\theta'},$$

$$\frac{1}{1+\cos\frac{2}{3}\pi}\,\frac{\pi}{3n}\left\{\begin{array}{l}\left[\sin 5\theta'+\sin 5\left(\theta'-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\\ +\left[\sin 11\theta'+\sin 11\left(\theta'-\frac{2\pi}{3}\right)\right]+\ldots\\ +\left[\sin(3n-1)\theta'+\sin(3n-1)\left(\theta'-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\end{array}\right\}=\frac{2\pi}{3n}\left[\frac{\cos 2\theta'+\cos\left(2\theta'-\frac{4\pi}{3}\right)}{\sin 3\theta'}\right].$$

On aura donc

$$\int_0^\infty\frac{x^{2m}\,dx}{(1+x^{2n})(1+x^{3n})}=\frac{\pi}{4n}\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)$$
$$+\frac{\pi}{6n}\left[\frac{1+4\cos 2\theta'+4\cos\left(2\theta'-\frac{4\pi}{3}\right)}{\sin 3\theta'}\right].$$

Cette équation devant subsister, quels que soient les nombres en-

(¹) On suppose ici

$$\frac{2m+1}{2n}\pi=\theta,\quad\frac{2m+1}{3n}\pi=\theta'.$$

tiers m et $\frac{n}{2}$, aura encore lieu si ces deux nombres deviennent irrationnels.

Si, dans la même équation, on suppose $m=0$, $n=2$, on trouvera $\theta=\frac{\pi}{4}$, $\theta'=\frac{\pi}{6}$, et par suite

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^4)(1+x^6)}=\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right).$$

En général, si l'on désigne par a et b deux nombres entiers quelconques, tels que les deux équations

$$1+x^a=0,\quad 1+x^b=0$$

n'aient pas de racines communes; si de plus n et $2m$ représentent deux nombres pairs, et que l'on fasse, pour abréger,

$$\frac{2m+1}{an}\pi=\theta,\quad \frac{2m+1}{bn}\pi=\theta',$$

on trouvera

$$\begin{aligned}\int_0^\infty & \frac{x^{2m}\,dx}{(1+x^{an})(1+x^{bn})}\\ &=\frac{\pi}{2an\sin a\theta}\left[\frac{\cos(1-a)\theta+\cos(1-a)\left(\theta-\frac{b}{a}\pi\right)}{1+\cos\left(\frac{b}{a}\pi\right)}+\frac{\cos(3-a)\theta+\cos(3-a)\left(\theta-\frac{b}{a}\pi\right)}{1+\cos\left(\frac{3b}{a}\pi\right)}+\ldots\right]\\ &+\frac{\pi}{2bn\sin b\theta'}\left[\frac{\cos(1-b)\theta'+\cos(1-b)\left(\theta'-\frac{a}{b}\pi\right)}{1+\cos\left(\frac{a}{b}\pi\right)}+\frac{\cos(3-b)\theta'+\cos(3-b)\left(\theta'-\frac{a}{b}\pi\right)}{1+\cos\left(\frac{3a}{b}\pi\right)}+\ldots\right],\end{aligned}$$

la première série devant être continuée jusqu'au terme qui a pour dénominateur

$$1+\cos(2a-1)\frac{b}{a}\pi,$$

et la seconde jusqu'au terme qui a pour dénominateur

$$1+\cos(2b-1)\frac{a}{b}\pi.$$

L'équation précédente suppose $2m+1<(a+b)n$. Cette même équation, ayant lieu pour des valeurs entières quelconques de m et de $\frac{n}{2}$, sera encore vraie si ces deux nombres deviennent irrationnels. Si l'on fait, pour plus de simplicité, $n=1$, $2m+1=r$, la même équation deviendra

$$(f)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{r-1}\,dx}{(1+x^a)(1+x^b)} \\[2ex] \displaystyle = \frac{\pi}{2a\sin\pi r}\left[\frac{\cos\left(\frac{1-a}{a}\right)\pi r+\cos\left(\frac{1-a}{a}\right)\pi(r-b)}{1+\cos\left(\frac{b}{a}\pi\right)}+\frac{\cos\left(\frac{3-a}{a}\right)\pi r+\cos\left(\frac{3-a}{a}\right)\pi(r-b)}{1+\cos\left(\frac{3b}{a}\pi\right)}+\ldots\right] \\[2ex] \displaystyle + \frac{\pi}{2b\sin\pi r}\left[\frac{\cos\left(\frac{1-b}{b}\right)\pi r+\cos\left(\frac{1-b}{b}\right)\pi(r-a)}{1+\cos\left(\frac{a}{b}\pi\right)}+\frac{\cos\left(\frac{3-b}{b}\right)\pi r+\cos\left(\frac{3-b}{b}\right)\pi(r-b)}{1+\cos\left(\frac{3a}{b}\pi\right)}+\ldots\right]. \end{cases}$$

Dans cette dernière formule, a et b sont deux nombres entiers quelconques, mais tels que les équations $1+x^a=0$, $1+x^b=0$, n'aient pas de racines communes; r est un nombre positif quelconque, rationnel ou irrationnel, mais plus petit que $a+b$: enfin, la première des deux séries qui entrent dans le second membre de l'équation doit être continuée jusqu'au terme qui a pour dénominateur

$$1+\cos(2a-1)\frac{b}{a}\pi,$$

et la seconde jusqu'au terme qui a pour dénominateur

$$1+\cos(2b-1)\frac{a}{b}\pi.$$

Si, dans l'équation (f), on supposait $b=0$, la seconde série devrait être supprimée, et la première se trouverait réduite à

$$\cos\left(\frac{1-a}{a}\right)\pi r+\cos\left(\frac{3-a}{a}\right)\pi r+\ldots+\cos\left(\frac{2a-1-a}{a}\right)\pi r=\frac{\sin\pi r}{\sin\frac{\pi r}{a}}.$$

On aurait, par suite,

$$\int_0^\infty \frac{x^{r-1}\,dx}{2(1+x^a)} = \frac{\pi}{2a\sin\frac{r\pi}{a}};$$

ce qui est l'équation d'Euler.

Exemple IV. — Soit, en général, $\frac{P}{Q}$ une fonction rationnelle quelconque de x; la méthode précédente fournira toujours la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P}{Q}\,dx,$$

pourvu que l'équation $Q=0$ n'ait pas de racines égales. Cette méthode exige seulement que l'on détermine les racines imaginaires de l'équation $Q=0$; mais elle évite la détermination des racines réelles et la décomposition de la fraction $\frac{P}{Q}$ en fractions simples, décomposition à laquelle on est obligé d'avoir recours lorsqu'on veut obtenir la valeur de l'intégrale indéfinie $\int \frac{P}{Q}\,dx$ par les méthodes connues.

Corollaire II. — Les mêmes choses étant admises que dans le corollaire I, si l'on fait

$$F(x) = 1 + x^2,$$

en sorte qu'on ait

$$p = \frac{\mathcal{F}(x)}{1+x^2},$$

et si, de plus, l'équation

$$\frac{1}{\mathcal{F}(x)} = 0$$

n'a pas de racines imaginaires, μ n'aura qu'une seule valeur correspondante à la racine

$$x = +\sqrt{-1}$$

de l'équation $1+x^2=0$: et comme on a, dans cette hypothèse, $\alpha=0$, $6=1$, la valeur dont il s'agit sera

$$\mu = \tfrac{1}{4}[\mathcal{F}(\sqrt{-1}) + \mathcal{F}(-\sqrt{-1})].$$

On aura, par suite,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\mathcal{F}(\sqrt{-1}) + \mathcal{F}(-\sqrt{-1})\right].$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — *Soit $\mathcal{F}(x)$ une fonction de x telle, que chaque racine de l'équation $\frac{1}{\mathcal{F}(x)} = 0$ soit réelle et corresponde à un facteur simple de la fonction $\frac{1}{\mathcal{F}(x)}$. Supposons, de plus, que chacune des parties réelle et imaginaire de l'expression*

$$\frac{\mathcal{F}(x+z\sqrt{-1})}{1+(x+z\sqrt{-1})^2}$$

soit une fonction continue de z qui s'évanouisse pour des valeurs infinies positives de x, et pour des valeurs infinies positives de z. La valeur de l'intégrale

$$\int \frac{\mathcal{F}(x)}{1+x^2}\,dx,$$

prise entre les limites $x = -\infty$, $x = +\infty$, sera le produit de la moitié de la circonférence, qui a pour rayon l'unité, par

$$\tfrac{1}{2}\left[\mathcal{F}(\sqrt{-1}) + \mathcal{F}(-\sqrt{-1})\right].$$

Si $\mathcal{F}(x)$ est une fonction paire de x, on aura

$$\mathcal{F}(\sqrt{-1}) = \mathcal{F}(-\sqrt{-1});$$

et, par suite,

$$(41)\qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{F}(x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\mathcal{F}(\sqrt{-1}).$$

Exemples [1]. — Si, dans l'équation (41), on remplace successive-

[1] Les formules (g), (h), (k), fournissent seulement les valeurs principales des intégrales qu'elles renferment.

ment $\mathfrak{F}(x)$ par les fonctions

$$\frac{\sin ax}{\sin bx}, \quad \frac{\cos ax}{\cos bx}, \quad \frac{\sin ax}{x\cos bx}, \quad \frac{x\cos ax}{\sin bx},$$

a étant $< b$, on trouvera

$$(g) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^a - e^{-a}}{e^b - e^{-b}}, \\ &\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\cos bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^a + e^{-a}}{e^b + e^{-b}}, \\ &\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x\cos bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^a - e^{-a}}{e^b + e^{-b}}, \\ &\int_0^\infty \frac{x\cos ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^a + e^{-a}}{e^b - e^{-b}}. \end{aligned} \right.$$

Si, dans ces formules, on fait $a = 0$, on obtiendra les suivantes :

$$(h) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{x}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{e^b - e^{-b}}, \\ &\int_0^\infty \frac{1}{\cos bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{e^b + e^{-b}}. \end{aligned} \right.$$

La première de celles-ci était déjà connue (*voir* les *Exercices de Calcul intégral,* IV^e Partie, p. 125).

Nous ferons voir, dans le § VII, comment on peut obtenir les valeurs des intégrales (g), dans le cas où l'on suppose $b < a$, et, par suite, dans le cas où l'on suppose $b = 0$.

Dans les diverses intégrales qu'on vient de considérer, les fonctions sous le signe $\int$ passent par l'infini entre les limites de l'intégration. Mais on ne doit pas pour cela les rejeter : car elles ont effectivement une valeur finie. C'est ce qu'il est facile de prouver par une simple transformation. Ainsi, par exemple, si l'on applique à l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$$

la méthode de transformation indiquée par M. Legendre (p. 129, IV^e Partie des *Exercices*), et que l'on représente par R la série

$$\frac{1}{(1+x^2)[1+(\pi-x)^2]}-\frac{3}{[1+(\pi+x)^2][1+(2\pi-x)^2]}+\frac{5}{[1+(2\pi+x)^2][1+(3\pi-x)^2]}\cdots,$$

on trouvera que cette intégrale équivaut à la suivante

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}\mathrm{R}\,dx.$$

D'ailleurs, entre ces dernières limites, le rapport $\frac{\pi-2x}{\cos x}$ ne surpasse jamais le nombre 2, et la fonction de x, représentée par R, conserve toujours une valeur finie qu'il est facile de calculer. Par suite, l'intégrale

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}\mathrm{R}\,dx$$

aura une valeur finie, ainsi que l'intégrale

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\cos x}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Cette dernière étant, par ce qui précède, égale à

$$\frac{\pi}{e+\frac{1}{e}},$$

on aura

$$(i)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}\mathrm{R}\,dx=\frac{\pi}{e+\frac{1}{e}}.$$

Corollaire III. — Les mêmes choses étant admises que dans le corollaire I, si l'on fait

$$\mathrm{F}(x)=1+x^4,$$

en sorte qu'on ait

$$p=\frac{\mathcal{F}(x)}{1+x^4},$$

et si, de plus, l'équation $\dfrac{1}{\mathcal{F}(x)} = 0$ n'a pas de racines imaginaires, μ n'obtiendra que deux valeurs différentes, correspondantes aux deux racines imaginaires

$$x = +\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1},$$

qui appartiennent à l'équation $1 + x^4 = 0$. On aura, d'ailleurs, en prenant pour x une de ces racines,

$$\frac{\mathcal{F}(x)}{F'(x)} = \frac{\mathcal{F}(x)}{4x^3} = -\tfrac{1}{4}x\,\mathcal{F}(x).$$

Cela posé, la première valeur de μ sera

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\frac{\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}}\right]$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\frac{\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right) + \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)}{2}\right].$$

Si $\mathcal{F}(x)$ est une fonction paire de x, la seconde valeur de μ sera égale à la première, et l'on aura, par suite,

$$(42)\qquad \int_0^\infty \frac{\mathcal{F}(x)}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{(1-\sqrt{-1})\,\mathcal{F}\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right) + (1+\sqrt{-1})\,\mathcal{F}\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)}{2}\right].$$

Exemples. — Si l'on remplace successivement la fonction $\mathcal{F}(x)$ par $\dfrac{x}{\sin ax}$ et par $\dfrac{1}{\cos ax}$, on trouvera

$$(k)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sin ax}\,\frac{dx}{1+x^4} = \pi \sin\frac{a}{\sqrt{2}}\,\frac{e^{\frac{a}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}}{e^{a\sqrt{2}} + e^{-a\sqrt{2}} - 2\cos(a\sqrt{2})}, \\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\cos ax}\,\frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,\frac{\left(e^{\frac{a}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\right)\cos\frac{a}{\sqrt{2}} + \left(e^{\frac{a}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\right)\sin\frac{a}{\sqrt{2}}}{e^{a\sqrt{2}} + e^{-a\sqrt{2}} + 2\cos(a\sqrt{2})}. \end{cases}$$

Lorsque, dans la dernière équation, on fait $a = 0$, on trouve, comme cela doit être,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

ce qui vérifie l'exactitude de nos calculs.

On obtiendra de même, en général, les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{P}{Q} \frac{\cos ax}{\cos bx} dx, \quad \int_0^\infty \frac{P}{Q} \frac{\sin ax}{\sin bx} dx,$$

$\frac{P}{Q}$ étant une fonction rationnelle et paire de x, et a étant $< b$, ainsi que les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{P}{Q} \frac{\sin ax}{\cos bx} dx, \quad \int_0^\infty \frac{P}{Q} \frac{\cos ax}{\sin bx} dx,$$

$\frac{P}{Q}$ étant une fonction rationnelle et impaire de x, et a étant $< b$. Mais nous n'insisterons pas davantage sur cet objet.

Corollaire IV. — Si les valeurs de P' et de P'' s'évanouissent, quelle que soit z, pour $x = \infty$, on aura, en supposant $a = \infty$ dans les équations (36), $\int P'dz = 0$, $\int P''dz = 0$; et, par suite, en prenant les intégrales relatives à x, entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, on trouvera

$$(43) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty P'\,dx - \int_0^\infty p\,dx = \int_0^b p''\,dz - A', \\ &\int_0^\infty P''dx \qquad\qquad\;\; = -\int_0^b p'\,dz - A''. \end{aligned} \right.$$

Si, dans une de ces dernières équations, on parvient à obtenir l'intégrale relative à z, quelle que soit la valeur de z, on pourra en déduire les valeurs de plusieurs intégrales définies relatives à x.

Exemple I. — Soit

$$p = \frac{x^m}{e^x - 1},$$

m étant un nombre entier positif, on aura

$$p' + p''\sqrt{-1} = \frac{(z\sqrt{-1})^m}{e^{z\sqrt{-1}} - 1} = (\sqrt{-1})^m z^m \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2} \frac{\sin z}{1 - \cos z} \right).$$

Par suite, l'une des deux quantités p', p'' sera toujours de la forme $\pm z^m$, savoir, p' si m est un nombre pair, et p'' dans le cas contraire. On pourra donc obtenir, dans la première hypothèse, la valeur de $\int p'dz$, et dans la seconde, celle de $\int p''dz$.

Si l'on suppose d'abord m pair et égal à $2n$, on trouvera

$$-\int p'dz = (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2(2n+1)}.$$

Par suite, si l'on suppose les intégrations relatives à z faites entre les limites

$$z = 0, \quad z = 2k\pi + b,$$

b étant positif et $< 2\pi$, on aura

$$-\int_0^{2k\pi+b} p'dz = (-1)^n \frac{(2k\pi + b)^{2n+1}}{2(2n+1)}.$$

De plus, si l'on désigne par $\alpha + 6\sqrt{-1}$ une quelconque des racines imaginaires de l'équation $e^r - 1 = 0$, on aura constamment $\alpha = 0$; et si l'on cherche les diverses valeurs de 6 comprises entre 0 et $2k\pi + b$, on trouvera successivement

$$6 = 2\pi, \quad 6 = 4\pi, \quad \ldots, \quad 6 = 2k\pi.$$

Cela posé, la valeur de A″, déterminée par l'équation (34), sera

$$\begin{aligned} A'' = \pi\, S(\lambda_{0,6}) &= (-1)^n 2^{2n} \pi^{2n+1} (1 + 2^{2n} + 3^{2n} + \ldots + k^{2n}) \\ &= (-1)^n 2^{2n} \pi^{2n+1}\, S(k^{2n}). \end{aligned}$$

Enfin, comme les valeurs de P′ et de P″ sont déterminées par l'équation

$$P' \pm P''\sqrt{-1} = \frac{(x+z\sqrt{-1})^{2n}}{e^{x+z\sqrt{-1}}-1}$$

$$= (x+z\sqrt{-1})^{2n}\left(\frac{e^x\cos z - 1 - \sqrt{-1}\,e^x\sin z}{e^{2x}-2e^x\cos z+1}\right),$$

si l'on suppose, dans cette dernière équation, $z = 2k\pi + b$, et que l'on fasse, pour abréger,

$$\frac{e^x\cos b - 1}{e^{2x}-2e^x\cos b+1} = R_1, \quad \frac{e^x\sin b}{e^{2x}-2e^x\cos b+1} = R_2,$$

on trouvera

$$P'' = -R_2\left[x^{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1.2}x^{2n-2}(2k\pi+b)^2 + \ldots\right]$$
$$+ R_1\left[2nx^{2n-1}(2k\pi+b) - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}x^{2n-3}(2k\pi+b)^3 + \ldots\right].$$

Par suite, la seconde des équations (43) deviendra

$$(l)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty x^{2n}R_2\,dx - 2n(2k\pi+b)\int_0^\infty x^{2n-1}R_1\,dx - \frac{2n(2n-1)}{1.2}(2k\pi+b)^2\int_0^\infty x^{2n-2}R_2\,dx + \ldots \\ \displaystyle\quad = (-1)^{n+1}\left[\frac{(2k\pi+b)^{2n+1}}{2(2n+1)} - 2^{2n}\pi^{2n+1}\,S(k^{2n})\right]. \end{cases}$$

De même, si l'on suppose m impair et égal à $2n+1$, la première des équations (43) donnera

$$(m)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty x^{2n+1}R_1\,dx + (2n+1)(2k\pi+b)\int_0^\infty x^{2n}R_2\,dx - \frac{(2n+1)2n}{1.2}(2k\pi+b)^2\int_0^\infty x^{2n-1}R_1\,dx - \ldots \\ \displaystyle\quad = (-1)^{n+1}\left[\frac{(2k\pi+b)^{2n+2}}{2(2n+2)} - 2^{2n+1}\pi^{2n+2}\,S(k^{2n+1})\right]. \end{cases}$$

On peut déduire des équations (l) et (m) plusieurs conséquences remarquables.

Supposons d'abord, dans l'équation (l), $b = 0$, on aura

$$R_2 = 0, \quad R_1 = \frac{1}{e^x - 1};$$

et, par suite, si l'on divise les deux membres de l'équation par $2n(2k\pi)$, on trouvera

$$(n)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty x^{2n-1}\frac{dx}{e^x-1}-\frac{(2n-1)(2n-2)}{2.3}(2k\pi)^2\int_0^\infty x^{2n-3}\frac{dx}{e^x-1}+\ldots \\ &=(-1)^{n+1}\left[\frac{2^{2n-2}\pi^{2n}}{n}\,\frac{S(k^{2n})}{k}-\frac{(2k\pi)^{2n}}{4n(2n+1)}\right].\end{aligned}\right.$$

Si, dans cette dernière équation, on fait $k=0$, en désignant par θ ce que devient alors

$$(-1)^{n+1}\frac{S(k^{2n})}{k},$$

on aura

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}\,dx}{e^x-1}=\frac{2^{2n-2}\pi^{2n}}{n}\theta.$$

D'ailleurs, si l'on fait successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, ..., on trouvera, pour les diverses valeurs de θ, les nombres de Bernoulli, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, ... Cela posé, l'équation précédente deviendra successivement

$$(o)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty x\,\frac{dx}{e^x-1}=\frac{2^0}{1}\,\frac{1}{6}\,\pi^2,\\ &\int_0^\infty x^3\frac{dx}{e^x-1}=\frac{2^2}{2}\,\frac{1}{30}\pi^4,\\ &\int_0^\infty x^5\frac{dx}{e^x-1}=\frac{2^4}{3}\,\frac{1}{42}\pi^6,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Ces formules étaient déjà connues, et l'on sait qu'elles servent à déterminer les sommes des puissances paires réciproques des nombres naturels.

Les valeurs des intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}\,dx}{e^x-1}$$

étant données par les équations (o), si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (n), et que l'on fasse $2n = m$, on obtiendra la formule bien connue

$$\begin{aligned}S(k^m) = {} & \frac{1}{m+1}k^{m+1} + \frac{1}{2}k^m + \frac{m}{2}\,\frac{1}{6}\,k^{m-1} \\ & - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.4}\,\frac{1}{30}\,k^{m-3} \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5.6}\,\frac{1}{42}\,k^{m-5} - \ldots.\end{aligned}$$

On arriverait encore à la même formule en faisant, dans l'équation (m), $b = 0$, $2n+1 = m$, et substituant, dans le premier membre, les valeurs des intégrales relatives à x. Cette formule a donc également lieu lorsque m est un nombre pair et lorsque m est un nombre impair.

Supposons maintenant que, dans l'équation (l), on donne à b une valeur quelconque. Les coefficients des puissances semblables de k, dans les deux membres de cette équation, devront être respectivement égaux; et, si on les compare entre eux, on déduira de cette comparaison les valeurs des intégrales

$$\int x R_1\,dx, \quad \int x^3 R_1\,dx, \quad \ldots, \quad \int x^{2n+1} R_1\,dx,$$

prises entre les limites $x = 0$, $x = \infty$; et celles des intégrales

$$\int R_2\,dx, \quad \int x^2 R_2\,dx, \quad \ldots, \quad \int x^{2n} R_2\,dx,$$

prises entre les mêmes limites. On pourrait aussi déduire les valeurs dont il s'agit de la comparaison des coefficients des diverses puissances de k dans l'équation (m). On aura donc, en général, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty x^m \frac{e^x \cos b - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos b + 1}\,dx,$$

dans le cas où m est un nombre impair, et celle de l'intégrale

$$\int_0^\infty x^m \frac{e^x \sin b}{e^{2x} - 2e^x \cos b + 1}\,dx,$$

dans le cas où m est un nombre pair. La seconde, qu'on peut aussi mettre sous la forme

$$\int_1^\infty \frac{dx(lx)^m}{1+2x\cos\theta+x^2},$$

en faisant $b=\pi-\theta$, et changeant x en $l(x)$, était déjà connue (*voir* les *Exercices de Calcul intégral*, IV^e Partie, p. 102). Quant à la première, si on la divise par le produit $1.2.3\ldots m$, elle deviendra équivalente aux séries de la page 104, dans lesquelles entrent les cosinus de l'angle θ et de ses multiples. On peut, en effet, la déduire de l'analyse qui conduit à la sommation de ces séries.

Remarque. — Nous avons dit ci-dessus que, dans le cas où, m étant un nombre pair, on suppose

$$p=\frac{x^m}{e^x-1},$$

la valeur de A'' est déterminée par l'équation (34), en sorte qu'on a

$$A''=\pi\,S(\lambda_{0,\beta})=(-1)^n 2^{2n}\pi^{2n+1}\,S(k^{2n}).$$

Cette détermination suppose qu'on n'a aucun égard à la racine nulle de l'équation

$$e^x-1=0;$$

et, tant que m est un nombre entier positif différent de zéro, il est effectivement permis de négliger cette racine, attendu que le facteur x, qui lui correspond dans le dénominateur de p, se trouve détruit par un facteur égal du numérateur. D'ailleurs il est facile de s'assurer que, dans ce cas, les équations (34) et (35) donnent la même valeur de A'', attendu que $\lambda_{0,0}$, ou la valeur de λ qui correspond à la racine nulle, se réduit alors à zéro. Il n'en serait pas de même si l'on supposait $m=0$; car, dans ce cas, on a $\lambda_{0,0}=1$. Dans cette dernière hypothèse, il faut nécessairement déterminer la valeur de A'' par l'équation (35); on trouve ainsi

$$A''=(k+\tfrac{1}{2})\pi.$$

Par suite, la seconde des équations (43) se réduit à

$$\int_0^\infty \frac{e^x\sin b}{e^{2x}-2e^x\cos b+1}\,dx=\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}b.$$

On peut aisément vérifier ce dernier résultat par les méthodes ordinaires d'intégration.

Exemple II. — Soit

$$p = \frac{x^m}{e^x + 1},$$

on obtiendra, par la méthode précédente, les valeurs des intégrales de la forme

$$\int_0^\infty x^{2n+1} \frac{dx}{e^x + 1},$$

et plus généralement celles des intégrales

$$\int_0^\infty x^{2n+1} \frac{e^x \cos b + 1}{e^{2x} + 2e^x \cos b + 1} dx, \quad \int_0^\infty x^{2n} \frac{e^x \sin b}{e^{2x} + 2e^x \cos b + 1} dx,$$

n étant un nombre entier quelconque. Mais il est facile de voir que ces dernières intégrales rentrent dans la classe de celles que nous avons considérées ci-dessus.

Remarque. — Jusqu'ici nous n'avons fait usage des équations (43) que dans le cas où l'on pouvait obtenir en termes finis les valeurs des intégrales relatives à z que renferment les seconds membres de ces équations. Mais ces équations conduisent quelquefois à des résultats dignes de remarque lors même que les intégrations relatives à z ne peuvent être effectuées. C'est ce que nous allons prouver par l'exemple suivant.

Exemple III. — Supposons, comme dans les deux exemples précédents,

$$p = \frac{x^m}{e^x \pm 1}.$$

Désignons, pour abréger, par

$$p_k, \; q_k, \; r_k \text{ et } s_k$$

les quatre intégrales

$$\int_0^\infty \frac{x^{k-1}\,dx}{e^x + 1}, \quad \int_0^\infty \frac{x^{k-1}\,dx}{e^x - 1}, \quad \int_0^\infty \frac{x^{k-1}\,dx}{e^{2x} + 1}, \quad \int_0^\infty \frac{x^{k-1} e^x\,dx}{e^{2x} + 1}.$$

Si l'on fait successivement $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, ...; que l'on emploie la première des équations (43) dans le cas où m est un nombre pair, et la seconde dans le cas où m est un nombre impair; enfin que l'on prenne les intégrales relatives à z entre les limites $z = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$, on aura, en adoptant le signe supérieur dans la valeur de p,

$$(p)\left\{\begin{aligned}
-r_1+p_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{2(1+\cos z)}\,dz,\\
s_2-\left(\frac{\pi}{2}\right) r_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{2(1+\cos z)}\,z\,dz,\\
r_3+2\left(\frac{\pi}{2}\right) s_2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 r_1-p_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{2(1+\cos z)}\,z^2\,dz,\\
-s_4+3\left(\frac{\pi}{2}\right) r_3+3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 s_2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 r_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{2(1+\cos z)}\,z^3\,dz,\\
-r_5-4\left(\frac{\pi}{2}\right)s_4+6\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 r_3+4\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 s_2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 r_1+p_5 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{2(1+\cos z)}\,z^4\,dz,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

On aura, au contraire, en adoptant le signe inférieur,

$$(q)\left\{\begin{aligned}
r_1-q_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{2(1-\cos z)}\,dz,\\
s_2+\left(\frac{\pi}{2}\right) r_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{2(1-\cos z)}\,z\,dz,\\
-r_3+2\left(\frac{\pi}{2}\right) s_2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 r_1+q_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{2(1-\cos z)}\,z^2\,dz,\\
-s_4-3\left(\frac{\pi}{2}\right) r_3+3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 s_2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 r_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{2(1-\cos z)}\,z^3\,dz,\\
r_5-4\left(\frac{\pi}{2}\right)s_4-6\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 r_3+4\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 s_2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 r_1-q_5 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{2(1-\cos z)}\,z^4\,dz,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

On a d'ailleurs, en général,

$$(r)\quad\left\{\begin{aligned}
p_k &= 1.2.3\ldots(k-1)\left(1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}-\frac{1}{4^k}+\ldots\right),\\
q_k &= \frac{2^{k-1}}{2^{k-1}-1}\,p_k,\\
r_k &= \frac{1}{2^k}\,p_k,\\
s_k &= 1.2.3\ldots(k-1)\left(1-\frac{1}{3^k}+\frac{1}{5^k}-\frac{1}{7^k}+\ldots\right).
\end{aligned}\right.$$

Ainsi les valeurs des intégrales de la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{2(1\pm\cos z)}\, z^m\, dz$$

dépendent uniquement de la sommation des séries des puissances réciproques des nombres naturels et des nombres impairs prises alternativement avec les signes $+$ et $-$. Comme on obtient facilement des valeurs très rapprochées de ces dernières séries, on pourra en conclure les valeurs des intégrales relatives à z. On peut encore en déduire les valeurs des intégrales

$$\int z^m \operatorname{tang} z\, dz,\quad \int z^m \cot z\, dz,$$

prises entre les limites $z=0$, $z=\frac{\pi}{4}$, ou même entre les limites $z=0$, $z=\frac{\pi}{2}$.

Si, dans les équations (p), on remplace, en général,

$$p_k \quad\text{par}\quad 2^k r_k,$$

on pourra déduire de ces équations les valeurs successives de

$$r_1,\ s_2,\ r_3,\ s_4,\ \ldots,$$

qui seront ainsi exprimées au moyen des intégrales de la forme

$$\int z^m \frac{\sin z}{2(1+\cos z)}\, dz.$$

De même, si, dans les équations (q), on remplace

$$q_k \quad \text{par} \quad \frac{2^k}{1-\frac{1}{2^{k-1}}}\, r_k,$$

on pourra déduire de ces équations les valeurs de

$$r_1,\ s_2,\ r_3,\ s_4,\ \ldots,$$

qui seront alors exprimées au moyen des intégrales de la forme

$$\int z^m \frac{\sin z}{2(1-\cos z)}\, dz.$$

De plus, la valeur de r_1 peut être déterminée immédiatement par l'intégration. On a, en effet,

$$r_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x}+1} = \tfrac{1}{2} l(2).$$

On pourra donc obtenir plusieurs équations de condition entre les deux espèces d'intégrales relatives à z. Par exemple, si l'on retranche la seconde équation (p) de la seconde équation (q), on trouvera

$$\frac{\pi}{2} l(2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z \cot z\, dz.$$

On trouvera encore

$$(s) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4z^2 \cos z + (2\pi - z)z}{\sin z}\, dz = \pi^2 l(2),$$

. . . .

La première des formules précédentes était déjà connue (*voir* M. Legendre, *Supplément à la première Partie du Calcul intégral*, p. 43). On peut aussi la mettre sous la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z^2}{(\sin z)^2}\,dz = \pi l(2),$$

et l'on peut encore en déduire l'équation suivante

$$\int_0^{\infty} (\operatorname{arc}\cot x)^2\,dx = \pi l(2).$$

Corollaire V. — Si les fonctions

$$\mathrm{P}' \text{ et } \mathrm{P}''$$

s'évanouissent pour $z = \infty$, quel que soit x, en faisant $b = \infty$ dans les équations (36), on aura

$$\int_0^x \mathrm{P}'\,dx = 0, \quad \int_0^x \mathrm{P}''\,dx = 0;$$

et, par suite, en prenant les intégrales relatives à z entre les limites $z = 0$, $z = \infty$, on trouvera

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^x p\,dx - \mathrm{A}' &= \int_0^{\infty} \mathrm{P}''\,dz - \int_0^{\infty} p''\,dz,\\ \mathrm{A}'' &= \int_0^{\infty} \mathrm{P}'\,dz - \int_0^{\infty} p'\,dz. \end{aligned}\right.$$

Si p est une fonction paire de x, on aura $p'' = 0$, et, par suite, la première des équations précédentes sera réduite à

$$(45)\quad \int_0^x p\,dx = \int_0^{\infty} \mathrm{P}''\,dz + \mathrm{A}'.$$

Exemple. — Soit

$$p = \frac{x^2}{(\sin x)^2},$$

on aura

$$P' = 2\,\frac{2xz\sin x\,\dfrac{e^{2z}-e^{-2z}}{2} - (x^2-z^2)\left(\dfrac{e^{2z}+e^{-2z}}{2}\cos x - 1\right)}{\left(\dfrac{e^{2z}+e^{-2z}}{2} - \cos 2x\right)^2},$$

$$-P'' = 2\,\frac{2xz\left(\dfrac{e^{2z}+e^{-2z}}{2}\cos x - 1\right) + (x^2-z^2)\,\dfrac{e^{2z}-e^{-2z}}{2}\sin x}{\left(\dfrac{e^{2z}+e^{-2z}}{2} - \cos 2x\right)^2},$$

$$p' = \frac{4z^2}{(e^z-e^{-z})^2}, \qquad p'' = 0.$$

Si d'ailleurs on suppose la seconde limite de x plus petite que π, on aura $A' = 0$, $A'' = 0$; et, par suite, en admettant les valeurs précédentes de P′ et de P″, on aura

$$(t)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty P''\,dz = \int_0^x \frac{x^2}{(\sin x)^2}\,dx,\\ &\int_0^\infty P'\,dz = 4\int_0^\infty \frac{z^2}{(e^z-e^{-z})^2}\,dz. \end{aligned}\right.$$

La dernière des équations précédentes s'accorde avec diverses formules trouvées par Euler. Quant à la première, si l'on y suppose l'intégrale relative à x prise entre les limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, on aura

$$P'' = 4\pi\,\frac{z}{(e^z+e^{-z})^2};$$

et, par suite,

$$(u)\qquad \int_0^\infty \frac{z}{(e^z+e^{-z})^2}\,dz = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{(\sin x)^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\,l(2).$$

On peut vérifier facilement ce dernier résultat au moyen d'une intégration par série.

Corollaire VI. — Si les valeurs de P′ et de P″ sont indéterminées pour certaines valeurs de x et de z comprises entre les limites des intégrations, les équations (11), (12), (13) et (14) du § II (I^re Partie) deviendront inexactes. Mais on trouvera facilement, par la méthode ci-dessus exposée, les corrections qu'il faudra, dans ce cas, leur faire subir.

Ces corrections sont déterminées par la règle suivante.

Soit $S_m + T_m\sqrt{-1}$ ce que devient la fonction de x,

$$px^m,$$

quand on y remplace x par $x + z\sqrt{-1}$. Soit, de plus, A'_m la valeur de A' relative à l'intégrale

$$\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''} \frac{\partial S_m}{\partial z}\,dx\,dz,$$

et A''_m la valeur de A'' relative à l'intégrale

$$\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''} \frac{\partial T_m}{\partial z}\,dx\,dz.$$

On remplacera, dans les équations (11), (12), (13), (14) (I^re Partie), l'intégrale

$$\int_0^z p'\,z^m\,dz \quad \text{par} \quad \int_0^z p'\,z^m\,dz + A''_m,$$

et l'intégrale

$$\int_0^z p''z^m\,dz \quad \text{par} \quad \int_0^z p''z^m\,dz - A'_m.$$

Exemple I. — Soit

$$p = \frac{1}{e^x - 1}.$$

Supposons que l'on intègre, par rapport à x, entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, et, par rapport à z, entre les limites $z = 0$, $z = b < 2\pi$. Enfin désignons comme ci-dessus par q_k l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{k-1}\,dx}{e^x - 1}.$$

Si l'on fait successivement

$$m = 1, \quad m = 2, \quad m = 3, \quad \ldots, \quad m = 2n, \quad m = 2n+1,$$

les équations (11) et (14), après avoir été corrigées, donneront

$$\int_0^\infty \frac{e^x \sin b}{e^{2x} - 2e^x \cos b + 1}\,dx = \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}b,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^x \cos b - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos b + 1}\,x\,dx = -\frac{\pi}{2}b + \tfrac{1}{4}b^2 + q_2,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^x \sin b}{e^{2x} - 2e^x \cos b + 1}\,x^2\,dx = -\frac{\pi}{2}b^2 + \tfrac{1}{6}b^3 + 2q_2 b,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^x \cos b - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos b + 1}\,x^3\,dx = \frac{\pi}{2}b^3 - \tfrac{1}{8}b^4 - 3q_2 b^2 + q_4,$$

. . . . ;

et, en général,

$$(\nu)\left\{\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{e^x \sin b}{e^{2x} - 2e^x \cos b + 1}\,x^{2n}\,dx \\
&= (-1)^n\Big[\frac{\pi}{2}b^{2n} - \frac{1}{2(2n+1)}b^{2n+1} - 2nb^{2n-1}q_2 \\
&\qquad + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}b^{2n-3}q_4 \\
&\qquad - \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)}{1.2.3.4.5}b^{2n-5}q_6 + \ldots\Big], \\
&\int_0^\infty \frac{e^x \cos b - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos b + 1}\,x^{2n+1}\,dx \\
&= (-1)^{n+1}\Big[\frac{\pi}{2}b^{2n+1} - \frac{1}{2(2n+2)}b^{2n+2} - (2n+1)b^{2n}q_2 \\
&\qquad + \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3}b^{2n-2}q_4 \\
&\qquad - \frac{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4.5}b^{2n-4}q_6 + \ldots\Big].
\end{aligned}\right.$$

Si, au lieu de supposer

$$p = \frac{1}{e^x - 1},$$

on eût supposé

$$p = \frac{1}{e^x + 1},$$

on aurait obtenu les formules données par M. Legendre (IV^e Partie des *Exercices de Calcul intégral*, p. 104).

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Les équations (v) déterminent les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{e^x \sin b}{e^{2x} - 2e^x \cos b + 1} x^{2n}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{e^x \cos b - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos b + 1} x^{2n+1}\,dx,$$

en supposant connues les valeurs de q_2, q_4, ..., c'est-à-dire, des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1}, \quad \int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x - 1}, \quad \ldots.$$

Nous avons donné plus haut les valeurs de ces dernières. Mais on pourrait les déduire immédiatement des équations (v). En effet, si l'on suppose, dans ces dernières, $b = \pi$, on aura généralement

$$\int_0^\infty \frac{e^x \sin b}{e^{2x} - 2e^x \cos b + 1} x^{2n}\,dx = 0,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2},\\
0 &= -\frac{\pi^3}{2} + \frac{\pi^3}{6} + 2q_2\pi,\\
0 &= \frac{\pi^5}{2} - \frac{\pi^5}{10} + 4q_2\pi^3 - 4q_4\pi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, comme ci-dessus,

$$q_2 = \frac{\pi^2}{6}, \quad q_4 = \frac{\pi^4}{15}, \quad \ldots.$$

Exemple II. — Soit

$$p = \frac{1}{e^x - e^{-x}};$$

on déterminera facilement, par les méthodes précédentes, les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x - e^{-x}} x\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{1}{e^x - e^{-x}} x^3\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{1}{e^x - e^{-x}} x^5\,dx, \quad \ldots$$

et celles des intégrales de la forme

$$\int_0^\infty x^{2n+1}\frac{(e^x-e^{-x})\cos b}{e^{2x}-2\cos 2b+e^{-2x}}\,dx,\quad \int_0^\infty x^{2n}\frac{(e^x+e^{-x})\sin b}{e^{2x}-2\cos 2b+e^{-2x}}\,dx,$$

b étant $<\pi$. On trouvera, par exemple,

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x-e^{-x}}\,dx=\frac{2^2-1}{4}\,\frac{1}{6}\pi^2,$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-e^{-x}}\,dx=\frac{2^4-1}{8}\,\frac{1}{30}\pi^4,$$

$$\int_0^\infty \frac{x^5}{e^x-e^{-x}}\,dx=\frac{2^6-1}{12}\,\frac{1}{42}\pi^6,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

et si l'on désigne, en général, $\int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{e^x-e^{-x}}\,dx$ par t_k, on aura encore

$$\int_0^\infty \frac{(e^x-e^{-x})\cos b}{e^{2x}-2\cos 2b+e^{2x}}\,x^{2n+1}\,dx$$

$$=(-1)^{n+1}\left[\frac{\pi}{4}b^{2n+1}-(2n+1)b^{2n}t_2+\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3}b^{2n-2}t_4\right.$$

$$\left.-\frac{(2n+2)2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4.5}b^{2n-4}t_6+\dots\right],$$

$$\int_0^\infty \frac{(e^x+e^{-x})\sin b}{e^{2x}-2\cos 2b+e^{2x}}\,x^{2n}\,dx$$

$$=(-1)^{n}\left[\frac{\pi}{4}b^{2n}-2nb^{2n-1}t_2+\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}b^{2n-3}t_4\right.$$

$$\left.-\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)}{1.2.3.4.5}b^{2n-5}t_6+\dots\right].$$

Au reste, on déduit facilement les valeurs des intégrales précédentes de diverses formules trouvées par Euler.

Exemple III. — Soit

$$f(x)=ax+bx^3+cx^5+\dots,$$

une fonction impaire et entière de x. Si l'on fait

$$p = \frac{1}{f(e^x) - f(e^{-x})} = \frac{1}{a(e^x - e^{-x}) + b(e^{3x} - e^{-3x}) + \ldots},$$

on aura

$$P' = \frac{a(e^x - e^{-x})\cos z + b(e^{3x} - e^{-3x})\cos 3z + \ldots}{[a(e^x - e^{-x})\cos z + b(e^{3x} - e^{-3x})\cos 3z + \ldots]^2 + [a(e^x - e^{-x})\sin z + b(e^{3x} - e^{-3x})\sin 3z + \ldots]^2},$$

$$-P'' = \frac{a(e^x - e^{-x})\sin z + b(e^{3x} - e^{-3x})\sin 3z + \ldots}{[a(e^x - e^{-x})\cos z + b(e^{3x} - e^{-3x})\cos 3z + \ldots]^2 + [a(e^x - e^{-x})\sin z + b(e^{3x} - e^{-3x})\sin 3z + \ldots]^2},$$

$$p' = 0, \quad p'' = -\frac{1}{2(a\sin z + b\sin 3z + \ldots)}.$$

Si, de plus, on désigne par B′ et B″ les corrections à faire aux seconds membres des équations (11) et (14) (Ire Partie), on aura, en admettant les valeurs précédentes de p, P′ et P″,

$$(\alpha)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^x P' x^{2n-1}\,dx = B' + \int_0^x p x^{2n-1}\,dx - \frac{(2n-1)(2n-2)}{1.2} z^2 \int_0^x p x^{2n-3}\,dx + \ldots, \\ &\int_0^x P'' x^{2n}\,dx \;= B'' - 2nz \int_0^x p x^{2n-1}\,dx + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3} z^3 \int_0^x p x^{2n-3}\,dx + \ldots \end{aligned} \right.$$

Supposons maintenant que l'on doive intégrer, relativement à x, entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, et relativement à z, entre les limites $z = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$. On aura généralement

$$\int_0^\infty P' x^{2n-1}\,dx = 0,$$

et, par suite, la première des deux équations précédentes se trouvera réduite à

$$0 = B' + \int_0^\infty p x^{2n-1}\,dx - \frac{(2n-1)(2n-2)}{1.2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_0^\infty p x^{2n-3}\,dx + \ldots.$$

Si, dans cette dernière, on fait successivement $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ..., on obtiendra une série d'équations qui détermineront les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty p x\,dx, \quad \int_0^\infty p x^3\,dx, \quad \int_0^\infty p x^5\,dx, \quad \ldots.$$

Si, au lieu d'intégrer, relativement à z, entre les limites $z = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$, on intégrait entre les limites $z = 0$, $z = \pi$, ou même entre les limites $z = 0$, $z = k\pi$, k étant un nombre entier quelconque, on aurait

$$\int_0^\infty \mathrm{P}'' x^{2n}\,dx = 0,$$

et, par suite, en faisant successivement $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ..., dans la première des équations (w), on obtiendrait encore les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty px\,dx,\quad \int_0^\infty px^3\,dx,\quad \int_0^\infty px^5\,dx,\quad \ldots.$$

Pour que cette dernière méthode réussisse, il n'est pas nécessaire que $f(x)$ soit une fonction impaire de x; il suffit qu'elle soit entière ou même rationnelle. En général, cette méthode est applicable toutes les fois que, p' étant nul ou constant, P'' s'évanouit pour certaines valeurs de z. Il est aisé de s'assurer que ces deux dernières conditions seront remplies si l'on donne à p l'une des valeurs suivantes :

$$p = \frac{\alpha + 6(e^x + e^{-x}) + \gamma(e^{2x} + e^{-2x}) + \ldots}{a(e^x - e^{-x}) + b(e^{2x} - e^{-2x}) + \ldots},$$

$$p = \frac{\alpha(e^x - e^{-x}) + 6(e^{2x} - e^{-2x}) + \ldots}{a + b(e^x + e^{-x}) + c(e^{2x} + e^{-2x}) + \ldots},$$

$$p = \frac{a + be^{-x} + ce^{-2x} + \ldots}{2a + b(e^x + e^{-x}) + c(e^{2x} + e^{-2x}) + \ldots},$$

$$p = \frac{ae^{-x} + be^{-2x} + \ldots}{a(e^x - e^{-x}) + b(e^{2x} - e^{-2x}) + \ldots},$$

α, 6, γ, ..., a, b, c, ... étant des constantes arbitraires. Il est toutefois nécessaire de supposer que chacune de ces valeurs de p s'évanouit pour $x = \infty$.

Par des raisonnements semblables à ceux qu'on vient de faire, on prouverait que l'équation (13) (Ire Partie) fournira les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty p\,dx,\quad \int_0^\infty px^2\,dx,\quad \int_0^\infty px^4\,dx,\quad \ldots;$$

si l'on donne à p la valeur suivante :

$$p = \frac{\alpha + 6(e^x + e^{-x}) + \gamma(e^{2x} + e^{-2x}) + \ldots}{a + b(e^x + e^{-x}) + c(e^{2x} + e^{-2x}) + \ldots}.$$

VI.

SECONDE APPLICATION, POUR FAIRE SUITE AU § III DE LA PREMIÈRE PARTIE ([1]).

Considérons d'abord les équations (15) du § III (I^re^ Partie). Si les quantités P′, P″, renfermées dans ces équations sous le signe $\int$, deviennent indéterminées pour certaines valeurs des variables comprises entre les limites des intégrations, ces mêmes équations seront inexactes. Pour les corriger, il suffira d'ajouter respectivement aux premiers membres les valeurs de A′ et de A″, déterminées par les formules (33), (34) et (35). Seulement, dans ces formules, le signe S ne devra s'étendre qu'aux valeurs de α et de 6 pour lesquelles les deux quantités

$$X = \frac{\alpha}{a}, \quad Z = \frac{a6}{\alpha},$$

se trouvent comprises, la première, entre les deux limites de x, et la seconde, entre les deux limites de z.

Les valeurs de A′ et de A″ étant déterminées, comme on vient de le

([1]) Les équations (15) et (21) de la première Partie étant corrigées, comme il est dit dans ce paragraphe, pourront être renfermées dans les deux formules

$$(\mathrm{X})\quad \left\{\begin{aligned} &(a + z\sqrt{-1})\int_0^x f(ax + xz\sqrt{-1})\,dx - a\int_0^x f(ax)\,dx \\ &\quad = x\sqrt{-1}\int_0^z f(ax + xz\sqrt{-1})\,dz - (A' + A''\sqrt{-1}), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{Y})\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty x^{n-1} f[r(\cos k + \sqrt{-1}\sin k)x]\,dx \\ &\quad = \frac{\cos nk - \sqrt{-1}\sin nk}{r^n}\left[\int_0^\infty x^{n-1} f(x)\,dx - A' - A''\sqrt{-1}\right]. \end{aligned}\right.$$

dire, il suffira, pour corriger les équations (16) (I^re Partie), d'ajouter respectivement aux seconds membres de ces équations les quantités

$$\frac{-A''z - A'a}{a^2 + z^2}, \quad \frac{-A''a + A'z}{a^2 + z^2}.$$

Enfin, pour corriger les deux équations (21) (I^re Partie), il suffira d'ajouter au second membre de la première

$$\frac{-A'' \sin nk - A' \cos nk}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}},$$

et au second membre de l'autre

$$\frac{-A'' \cos nk + A' \sin nk}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}},$$

k désignant toujours le plus petit des arcs qui ont pour tangente $\frac{b}{a}$.

Exemple. — Soit

$$p = \frac{1}{e^x \pm 1}.$$

Si l'on suppose $n > 1$, on aura $A' = 0$, $A'' = 0$; et, par suite, les équations (21) (I^re Partie) donneront immédiatement

$$(x)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty x^{n-1} \frac{e^x \cos bx - 1}{e^{2x} \pm 2e^x \cos bx + 1}\, dx &= \frac{\cos nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}\, dx}{e^x \pm 1}, \\ \int_0^\infty x^{n-1} \frac{e^x \sin bx}{e^{2x} \pm 2e^x \cos bx + 1}\, dx &= \frac{\sin nk}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}\, dx}{e^x \pm 1}, \end{aligned} \right.$$

k étant le plus petit arc dont la tangente soit égale à $\frac{b}{a}$.

Lorsque n est un nombre pair, les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\, dx}{e^x \pm 1}$$

sont connues. On pourra donc obtenir, dans le même cas, les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty x^{n-1}\frac{e^x\cos bx - 1}{e^{2x}\pm 2e^x\cos bx + 1}\,dx,\quad \int_0^\infty x^{n-1}\frac{e^x\sin bx}{e^{2x}\pm 2e^x\cos bx + 1}\,dx.$$

VII.

TROISIÈME APPLICATION, POUR FAIRE SUITE AU § VI DE LA PREMIÈRE PARTIE [1].

Supposons que les fonctions Q′, Q″, renfermées dans les équations (33) du § VI (Ire Partie), deviennent indéterminées pour certaines valeurs de x et de z comprises entre les limites des intégrations. Alors les équations (33) seront inexactes. Désignons à l'ordinaire par A′ et A″ les quantités qu'il sera nécessaire d'ajouter aux premiers membres de ces équations pour les rectifier. Concevons, pour plus de facilité, que l'équation $\frac{1}{q} = 0$ n'ait pas de racines nulles ni égales entre elles; et soit $\alpha + 6\sqrt{-1}$ une racine de cette même équation, 6 devant être nul, lorsque la racine est réelle. Si l'on détermine les valeurs de λ et

[1] En corrigeant les formules (33), (34), (35), de la première Partie, comme il est dit dans ce paragraphe, et posant

$$f(x) = q\cos r + \sqrt{-1}\,q\sin r,$$

on obtiendra diverses équations, desquelles on déduira immédiatement la formule (L), étendue au cas où la fonction $f(x)$ devient imaginaire. On en déduirait également les formules (S) et (U), en prenant

$$q\cos r = \varphi(x)\frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)},\quad q\sin r = \chi(x)\frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)}.$$

Si l'on suppose en particulier $r = ax$, on verra la formule (S) coïncider avec l'équation (52), et la formule (U) avec l'équation (53). Dans la même hypothèse, si l'on fait $q = \frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)}$, la formule (L) deviendra

$$(Z)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax\sqrt{-1}}\frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)}\,dx = 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{S}\left[e^{-a6+a\alpha\sqrt{-1}}\frac{\mathcal{F}(\alpha+6\sqrt{-1})}{F'(\alpha+6\sqrt{-1})}\right].$$

Cette dernière peut remplacer à elle seule les équations (52) et (53). Il est bon de rappeler que chacun des termes indiqués par le signe S doit être réduit à moitié quand la valeur de μ par les équations (16), ainsi que les valeurs de γ et δ par les équations (26); si, de plus, l'on désigne par

$$\lambda_{\alpha,6},\ \mu_{\alpha,6},\ \gamma_{\alpha,6},\ \delta_{\alpha,6},$$

les valeurs de

$$\lambda,\ \mu,\ \gamma,\ \delta,$$

qui correspondent à des valeurs positives de α et de 6, et que l'on remplace, dans cette notation, α par zéro, lorsque α devient nul, et 6 par zéro, lorsque 6 devient nul; enfin, que les valeurs extrêmes de x et de z soient positives, et ne rendent pas indéterminées les deux fonctions Q′ et Q″ : on aura toujours $\mu_{\alpha,0} = 0$, et, par suite,

$$(46)\quad A' = [2S(\gamma_{\alpha,6}\mu_{\alpha,6} - \delta_{\alpha,6}\lambda_{\alpha,6}) + S(\gamma_{0,6}\mu_{0,6} - \delta_{0,6}\lambda_{0,6}) - S(\delta_{\alpha,0}\lambda_{\alpha,0})]\pi,$$

$$(47)\quad A'' = [2S(\gamma_{\alpha,6}\lambda_{\alpha,6} + \delta_{\alpha,6}\mu_{\alpha,6}) + S(\gamma_{0,6}\lambda_{0,6} + \delta_{0,6}\mu_{0,6}) + S(\gamma_{\alpha,0}\lambda_{\alpha,0})]\pi,$$

le signe S se rapportant à toutes les valeurs positives de α qui se trouvent comprises entre les limites des intégrales relatives à x, et à toutes les valeurs de 6 qui sont comprises entre les limites des intégrales relatives à z.

Si l'équation $\frac{1}{q} = 0$ avait une racine nulle, la valeur de A′ serait en général infinie. Mais, dans ce cas, la valeur de A″ resterait finie, et

correspondante de 6 s'évanouit. Alors aussi l'intégrale définie qui compose le premier membre de la formule (Z) doit être réduite à sa valeur principale.

Si, dans l'équation (Z), on pose successivement

$$\frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)} = \frac{r}{x^2 \pm r^2} \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)} = \frac{x}{x^2 \pm r^2},$$

on en tirera les formules

$$\int_0^\infty \frac{r\cos ax}{x^2 + r^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ar}, \qquad \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2 + r^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ar},$$

$$\int_0^\infty \frac{r\cos ax}{x^2 - r^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\sin ar, \qquad \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2 - r^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cos ar,$$

dont les premières ont été données par M. Laplace, et les dernières par M. Bidone, géomètre italien.

serait donnée par l'équation

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} A'' = [&2S(\gamma_{\alpha,6}\lambda_{\alpha,6} + \delta_{\alpha,6}\mu_{\alpha,6}) \\ &+ S(\gamma_{0,6}\lambda_{0,6} + \delta_{0,6}\mu_{0,6}) + S(\gamma_{\alpha,0}\lambda_{\alpha,0}) + \tfrac{1}{2}\gamma_{0,0}\lambda_{0,0}]\pi. \end{aligned}\right.$$

Corollaire I. — Supposons, comme dans les équations (38) (Iʳᵉ Partie),

$$r = F(x) = ax;$$

les équations (26) donneront,

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{si l'on a } \alpha > 0,\ 6 > 0, \\ &\qquad \gamma_{\alpha,6} = e^{-a6}\cos a\alpha, \quad \delta_{\alpha,6} = e^{-a6}\sin a\alpha; \\ &\text{si l'on a } \alpha > 0,\ 6 = 0, \\ &\qquad \gamma_{\alpha,0} = \cos a\alpha, \quad \delta_{\alpha,0} = \sin a\alpha; \\ &\text{si l'on a } \alpha = 0,\ 6 > 0, \\ &\qquad \gamma_{0,6} = e^{-a6}, \quad \delta_{0,6} = 0. \end{aligned}\right.$$

Supposons, de plus, que Q′ et Q″ s'évanouissent pour des valeurs infinies positives de la variable z. Si l'on intègre, relativement à x, entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, et, relativement à z, entre les limites $z = 0$, $z = \infty$, la première des équations (38) (Iʳᵉ Partie) deviendra

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^\infty q\cos ax\,dx = [&2S(\gamma_{\alpha,6}\mu_{\alpha,6} - \delta_{\alpha,6}\lambda_{\alpha,6}) \\ &+ S(\gamma_{0,6}\mu_{0,6}) - S(\delta_{\alpha,0}\lambda_{\alpha,0})]\pi - \int_0^\infty q'' e^{-az}\,dz. \end{aligned}\right.$$

Si, au lieu d'intégrer, relativement à x, entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, on voulait intégrer entre les limites $x = -\infty$, $x = 0$, on trouverait, en raisonnant comme on l'a fait ci-dessus (§ V),

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 q\cos ax\,dx = [&2S(\gamma_{-\alpha,6}\mu_{-\alpha,6} - \delta_{-\alpha,6}\lambda_{-\alpha,6}) \\ &+ S(\gamma_{0,6}\mu_{0,6}) - S(\delta_{-\alpha,0}\lambda_{-\alpha,0})]\pi + \int_0^\infty q'' e^{-az}\,dz. \end{aligned}\right.$$

En ajoutant ces deux équations, on trouvera

$$(52)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} q \cos ax\, dx = [2\,\mathrm{S}(\gamma_{\pm\alpha,\beta}\mu_{\pm\alpha,\beta} - \delta_{\pm\alpha,\beta}\lambda_{\pm\alpha,\beta}) - \mathrm{S}(\delta_{\pm\alpha,0}\lambda_{\pm\alpha,0})]\pi,$$

les valeurs des quantités γ, δ étant déterminées par les équations (48), et le signe S se rapportant à toutes les valeurs positives nulles ou négatives de α, mais seulement aux valeurs positives de β. Cette dernière équation est analogue à celles que nous avons trouvées ci-dessus, § V, n° (39).

On trouvera de même

$$(53)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} q \sin ax\, dx = [2\,\mathrm{S}(\gamma_{\pm\alpha,\beta}\lambda_{\pm\alpha,\beta} + \delta_{\pm\alpha,\beta}\mu_{\pm\alpha,\beta}) + \mathrm{S}(\gamma_{\pm\alpha,0}\lambda_{\pm\alpha,0})]\pi.$$

Si q est une fonction paire de x, l'intégrale $\int_0^\infty q \cos ax\, dx$ aura pour valeur la moitié du second membre de l'équation (52). De même, la moitié du second membre de l'équation (53) donnera, si q est une fonction impaire de x, la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty q \sin ax\, dx$.

Exemple I. — Si l'on fait

$$q = \frac{1}{1+x^2},$$

l'équation (52) donnera

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-a};$$

et si l'on suppose

$$q = \frac{x}{1+x^2},$$

l'équation (53) donnera

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

Ces formules sont bien connues.

En général, si $\frac{P}{Q}$ représente une fonction rationnelle quelconque de x, les formules (52) et (53) fourniront les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{P}{Q} \cos ax\, dx, \quad \int_0^\infty \frac{P}{Q} \sin ax\, dx,$$

sans que l'on soit obligé de décomposer la fraction $\frac{P}{Q}$ en fractions simples. La méthode précédente exige seulement que l'on détermine les racines de l'équation

$$Q = 0.$$

Exemple II. — Soit

$$q = \frac{1}{(1 + x^2)\sin bx}.$$

L'équation

$$(1 + x^2)\sin bx = 0$$

se décomposera en deux autres, savoir,

$$1 + x^2 = 0 \quad \text{et} \quad \sin bx = 0.$$

La première de celles-ci donnera

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1,$$

$$\gamma = e^{-a}, \quad \lambda = \frac{-1}{e^b - e^{-b}}, \quad \delta = 0, \quad \mu = 0.$$

Par suite, la partie correspondante du second membre de l'équation (53) sera

$$-2\pi \frac{e^{-a}}{e^b - e^{-b}}.$$

Quant à l'équation $\sin bx = 0$, elle donnera

$$\alpha = \frac{k\pi}{b}, \quad \beta = 0,$$

k étant un nombre entier positif, nul ou négatif; et, par suite,

$$\gamma = \cos\left(k\frac{a}{b}\pi\right), \quad \lambda = (-1)^k \frac{1}{b\left(1 + \frac{1}{b^2}k^2\pi^2\right)}, \quad \mu = 0.$$

Ainsi la partie du second membre de l'équation (53), qui correspond aux racines de l'équation $\sin bx = 0$, sera

$$\frac{\pi}{b}\left[1 - \frac{2\cos\left(\frac{a}{b}\pi\right)}{1+\frac{\pi^2}{b^2}} + \frac{2\cos\left(\frac{2a}{b}\pi\right)}{1+4\frac{\pi^2}{b^2}} - \frac{2\cos\left(\frac{3a}{b}\pi\right)}{1+9\frac{\pi^2}{b^2}} + \ldots\right].$$

Si donc on fait, pour abréger,

$$\frac{\cos\left(\frac{a}{b}\pi\right)}{1+\frac{\pi^2}{b^2}} - \frac{\cos\left(\frac{2a}{b}\pi\right)}{1+4\frac{\pi^2}{b^2}} + \frac{\cos\left(\frac{3a}{b}\pi\right)}{1+9\frac{\pi^2}{b^2}} - \ldots = \mathrm{R},$$

on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{\sin bx}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{b} - \frac{2\pi}{b}\mathrm{R} - \frac{2\pi e^{-a}}{e^b - e^{-b}};$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sin bx}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2b} - \frac{\pi}{b}\mathrm{R} - \pi\frac{e^{-a}}{e^b - e^{-b}}.$$

On a d'ailleurs, en supposant $a < b$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sin bx}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^a - e^{-a}}{e^b - e^{-b}};$$

on aura donc, dans la même hypothèse,

$$(y) \qquad \mathrm{R} = \frac{1}{2}\left(1 - b\frac{e^a + e^{-a}}{e^b + e^{-b}}\right).$$

D'ailleurs il est facile de voir que la valeur de R restera la même, si, b ayant une valeur constante, le rapport $\frac{a}{b}$ se trouve augmenté ou diminué d'un nombre pair quelconque. Par suite, si, a étant $> b$, on désigne par $\frac{1}{2}r$ la différence absolue qui existe entre le rapport $\frac{a}{2b}$ et le nombre entier le plus voisin de ce rapport, on aura, en général,

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2}\left(1 - b\frac{e^{rb} + e^{-rb}}{e^b - e^{-b}}\right),$$

d'où l'on conclut

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{rb}+e^{-rb}-2e^{-a}}{e^b-e^{-b}}.$$

On obtiendra de même les valeurs des quatre intégrales que nous avons considérées ci-dessus, § V, corollaire II, quel que soit le rapport des quantités a et b. Il est seulement nécessaire d'examiner si le nombre entier le plus voisin de la fraction $\frac{a}{2b}$ est pair ou impair, et si ce nombre est inférieur ou supérieur à la fraction dont il s'agit. Ainsi, par exemple, si l'on suppose que ce nombre soit pair et inférieur à la fraction $\frac{a}{2b}$, en représentant la différence par $\frac{1}{2}r$, on aura (¹)

$$(z)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\cos bx}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{br}-e^{-br}+2e^{-a}}{e^b+e^{-b}},\\
&\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{br}+e^{-br}-2e^{-a}}{e^b-e^{-b}},\\
&\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x\cos bx}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{br}+e^{-br}-2e^{-a}}{e^b+e^{-b}},\\
&\int_0^\infty \frac{x\cos ax}{\sin bx}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{br}-e^{-br}+2e^{-a}}{e^b-e^{-b}}.
\end{aligned}\right.$$

Si, dans ces diverses équations, on suppose b très petit, on aura, à très peu près,

$$\sin bx = bx,\quad e^b-e^{-b}=2b,\quad e^{\pm b}=1,\quad e^{\pm br}=1,$$

et, par suite,

$$\int_0^\infty \cos ax\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}(1-e^{-a}),$$

ce qui s'accorde avec les formules connues.

(¹) Les formules (z), ainsi que les équations (g), (h), ..., fournissent seulement les valeurs principales des intégrales qu'elles renferment.

Si le nombre entier le plus voisin de la fraction $\frac{a}{2b}$ était impair, au lieu d'être pair, il faudrait, dans la première et la troisième des équations (z), changer le signe de chacune des deux quantités e^{br}, e^{-br}; et si le même nombre entier, au lieu d'être inférieur à la fraction $\frac{a}{2b}$, lui devenait supérieur, il faudrait changer encore, dans la première et la quatrième équation, le signe de ces deux quantités. Par suite, il n'y aurait rien à changer dans la première, si les deux hypothèses précédentes avaient lieu en même temps.

L'analyse qui conduit aux équations (z) fournit aussi les valeurs des quatre séries suivantes [1] :

$$\frac{\sin\theta}{1+m^2}-\frac{\sin 3\theta}{9+m^2}+\frac{\sin 5\theta}{25+m^2}-\ldots=\frac{\pi}{4m}\,\frac{e^{\theta m}-e^{-\theta m}}{e^{\frac{1}{2}\pi m}+e^{-\frac{1}{2}\pi m}};$$

$$\frac{\cos\theta}{1+m^2}-\frac{\cos 2\theta}{4+m^2}+\frac{\cos 3\theta}{9+m^2}-\ldots=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2m}\,\frac{e^{\theta m}+e^{-\theta m}}{e^{m\pi}-e^{-m\pi}};$$

$$\frac{\cos\theta}{1+m^2}-\frac{1}{3}\,\frac{\cos 3\theta}{9+m^2}+\frac{1}{5}\,\frac{\cos 5\theta}{25+m^2}-\ldots=\frac{\pi}{4m^2}-\frac{\pi}{4m^2}\,\frac{e^{\theta m}+e^{-\theta m}}{e^{\frac{1}{2}\pi m}+e^{-\frac{1}{2}\pi m}};$$

$$\frac{\sin\theta}{1+m^2}-\frac{2\sin 2\theta}{4+m^2}+\frac{3\sin 3\theta}{9+m^2}-\ldots=\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{\theta m}-e^{-\theta m}}{e^{m\pi}-e^{-m\pi}}.$$

On déduit facilement de ces quatre séries tous les théorèmes connus

[1] Les séries dont il est ici question, et beaucoup d'autres, peuvent être données directement à l'aide de la formule (O). Ainsi, par exemple, si l'on pose

$$\frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)}=\frac{\cos\theta x}{(m^2+x^2)\sin\pi x},$$

on tirera de la formule (O)

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2m^2}-\frac{\cos\theta}{1+m^2}+\frac{\cos 2\theta}{4+m^2}-\frac{\cos 3\theta}{9+m^2}+\ldots\right)-\frac{e^{\theta m}+e^{-\theta m}}{2m(e^{m\pi}-e^{-m\pi})}=0,$$

ce qui s'accorde avec l'équation qu'on obtient en égalant les deux valeurs de R.

Au reste, il est facile de voir pourquoi l'analyse dont nous avons fait usage dans le § VII nous a conduits à la sommation des séries dont nous venons de parler. En effet, les formules (z) sont tirées des équations (52) et (53) comprises dans la formule (Z) ou (L). Au contraire, les formules (g) du § IV ont été tirées de la formule (39) ou (N); et comme, pour déduire les formules (L), (N) l'une de l'autre, il faut nécessairement avoir égard à l'équation (O), il est clair que la comparaison des formules (g) et (h) devait nous ramener à la considération des séries qui peuvent être sommées directement à l'aide de l'équation (O).

sur la sommation des puissances réciproques des nombres naturels et des nombres impairs.

Corollaire II. — Désignons toujours par A′ et A″ les corrections à faire aux seconds membres des équations (38) (Ire Partie), dans le cas où Q′ et Q″ deviennent indéterminées pour des valeurs des variables comprises entre les limites des intégrations. Concevons, de plus, qu'on intègre, par rapport à x, entre les limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, et, par rapport à z, entre les limites $z = 0$, $z = \infty$. Les équations (38) deviendront, si l'on suppose $a = 1$,

$$(54)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} q\cos x\,dx = \int_0^\infty Q' e^{-z}\,dz - \int_0^\infty q'' e^{-z}\,dz + A', \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} q\sin x\,dx = \int_0^\infty Q'' e^{-z}\,dz + \int_0^\infty q' e^{-z}\,dz + A'', \end{cases}$$

et, si l'on suppose $a = 2$,

$$(55)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} q\cos 2x\,dx = -\int_0^\infty Q'' e^{-2z}\,dz - \int_0^\infty q'' e^{-2z}\,dz + A', \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} q\sin 2x\,dx = \int_0^\infty Q' e^{-2z}\,dz + \int_0^\infty q' e^{-2z}\,dz + A''. \end{cases}$$

Dans ces équations, A′ se trouve toujours déterminé par la formule (46), et A″ par les formules (47) ou (48).

Si q est une fonction paire de x, on aura $q'' = 0$; par suite, la première des équations (54) se trouvera réduite à

$$(56)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} q\cos x\,dx = \int_0^\infty Q' e^{-z}\,dz + A',$$

et la première des équations (55) à

$$(57)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} q\cos 2x\,dx = -\int_0^\infty Q'' e^{-2z}\,dz + A'.$$

De même, si q est une fonction impaire de x, on aura $q' = 0$; par suite, la seconde des équations (54) se trouvera réduite à

$$(58) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} q \sin x\, dx = \int_0^{\infty} Q'' e^{-z}\, dz + A'',$$

et la seconde des équations (55) à

$$(59) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} q \sin 2x\, dx = \int_0^{\infty} Q' e^{-2z}\, dz + A''.$$

Si, dans ces quatre dernières équations, on parvient à obtenir les valeurs des intégrales relatives à z, on en conclura celles des intégrales relatives à x, et réciproquement.

Exemple I. — Soit

$$q = \frac{x}{\sin x}.$$

Comme les limites des intégrales relatives à x sont 0 et $\frac{\pi}{2}$, on devra supposer, dans Q' et Q'', $x = \frac{\pi}{2}$. Cela posé, on trouvera

$$Q' + Q''\sqrt{-1} = \frac{\frac{\pi}{2} + z\sqrt{-1}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\sqrt{-1}\right)},$$

$$Q' = \frac{\pi}{e^z + e^{-z}}, \qquad \int_0^{\infty} Q' e^{-z}\, dz = \pi \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}\, dz}{e^z + e^{-z}} = \tfrac{1}{2}\pi l(2).$$

On aura d'ailleurs $A' = 0$; et par suite l'intégrale (56) deviendra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \tfrac{1}{2}\pi l(2).$$

Cette intégrale a été donnée par Euler. Nous l'avions déjà obtenue dans le § V, mais par une méthode moins directe. On obtiendra de même, en général, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\alpha + 6 \cos 2x + \gamma \cos 4x + \ldots) \cos x}{a \sin x + b \sin 3x + c \sin 5x + \ldots}\, x\, dx,$$

α, 6, γ, ..., a, b, c, ..., étant des constantes arbitraires. On aura, en effet, en vertu de l'équation (56),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\alpha + 6\cos 2x + \gamma\cos 4x + \ldots)\cos x}{a + b\cos 2x + c\cos 4x + \ldots} x\,dx$$

$$= \mathrm{A}' + \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{[2\alpha - 6(e^{2z} + e^{-2z}) + \gamma(e^{4z} + e^{-4z}) - \ldots]e^{-z}\,dz}{a(e^{z} + e^{-z}) - b(e^{3z} + e^{-3z}) + c(e^{5z} + e^{-5z}) - \ldots}.$$

On peut d'ailleurs obtenir facilement la valeur de cette dernière par les méthodes d'intégration connues.

Exemple II. — M. Poisson est parvenu à déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{a + \cos 2x} x\,dx.$$

On peut déduire immédiatement cette intégrale de l'équation (59).

On obtiendra, en général, par la même équation, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\alpha + 6\cos 2x + \gamma\cos 4x + \ldots)\sin 2x}{a + b\cos 2x + c\cos 4x + \ldots} x\,dx;$$

α, 6, γ, ..., a, b, c, ..., étant des constantes arbitraires.

Dans les deux exemples précédents, il est nécessaire de supposer que la fonction q ne devient pas infinie lorsqu'après avoir remplacé, dans cette fonction, x par $\frac{\pi}{2} \pm z\sqrt{-1}$, on suppose $z = \infty$. Néanmoins, si le contraire avait lieu, on pourrait encore obtenir les valeurs des intégrales relatives à x, en substituant aux équations (54) et (55) les équations semblables qu'on déduit des formules (38) (I^re Partie), en supposant successivement, dans ces dernières, $a = 3$, $a = 4$, $a = 5$, ...

PREMIER SUPPLÉMENT,

OU

DÉVELOPPEMENTS RELATIFS A LA SECONDE PARTIE

DU MÉMOIRE SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES (¹).

PREMIÈRE QUESTION.

Déduire des formules obtenues dans le Mémoire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x\, dx}{a + \cos 2x}.$$

Solution. — q étant une fonction impaire de x, et

$$Q' + Q'' \sqrt{-1}$$

étant ce que devient q lorsqu'on y substitue $\frac{\pi}{2} + z\sqrt{-1}$ au lieu de x, on a, par la formule (59) de la seconde Partie,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} q \sin 2x\, dx = \int_0^{\infty} Q' e^{-2z}\, dz + A''.$$

Dans cette même formule, la valeur de A'' est déterminée par l'équa-

(¹) Les deux Suppléments qu'on va lire sont ceux dont il est parlé dans le Rapport, et que l'auteur avait composés pour répondre aux observations faites par le rapporteur. Il est essentiel d'observer que plusieurs des formules établies dans ces Suppléments renferment des intégrales définies dont les valeurs générales seraient indéterminées, mais que l'on suppose réduites à leurs valeurs principales.

tion (47); et les valeurs de γ, δ, sont données par les équations (49), dans lesquelles on doit supposer $a = 2$.

Pour appliquer la formule (59) à la détermination de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x}{a + b \cos 2x}\, dx,$$

on fera

$$q = \frac{\mathcal{F}(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{x}{a + b \cos 2x};$$

et l'on aura par suite,

$$\mathrm{Q}' + \mathrm{Q}''\sqrt{-1} = \frac{\frac{1}{2}\pi + z\sqrt{-1}}{a + \cos(\pi + 2z\sqrt{-1})} = \frac{\frac{1}{2}\pi + z\sqrt{-1}}{a - \left(\frac{e^{2z} + e^{-2z}}{2}\right)},$$

$$\mathrm{Q}' = \frac{\pi}{2a - (e^{2z} + e^{-2z})}.$$

Cela posé, si l'on fait $e^{-2z} = u$, on trouvera

$$\int_0^{\infty} \mathrm{Q}' e^{-2z}\, dz = \frac{\pi}{2} \int_1^0 \frac{u\, du}{u^2 - 2au + 1}.$$

Si l'on veut que cette dernière soit prise entre les limites $u = 0$, $u = 1$, elle changera de signe, et l'on aura, en conséquence,

$$\int_0^{\infty} \mathrm{Q}' e^{-2z}\, dz = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{u\, du}{u^2 - 2au + 1};$$

ce qui réduit l'équation (59) à

$$(\mathrm{A}) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x}{a + \cos 2x}\, dx = \mathrm{A}'' - \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{u\, du}{u^2 - 2au + 1}.$$

Pour achever le calcul, il est nécessaire de distinguer deux cas différents, suivant que la quantité désignée par a est inférieure ou supérieure à l'unité.

Premier cas. — Supposons d'abord $a < 1$: le système de valeurs de α et de $\mathcal{B}$, pour lequel la valeur de α se trouvera comprise entre les limites 0 et $\frac{1}{2}\pi$, sera, en vertu du § I (exemple VII), déterminé par les équations

(B) $$\alpha = \tfrac{1}{2}\, arc\cos(-a), \quad 6 = 0.$$

On aura, par suite,

(C) $$\int_0^1 \frac{u\,du}{u^2 - 2au + 1} = \int_0^1 \frac{u\,du}{u^2 + 2u\cos 2\alpha + 1} = \tfrac{1}{2} l(2 - 2a) - \frac{\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Dans le même cas, la valeur de A″ se trouvera réduite à

$$A'' = \pi \gamma_{\alpha,0} \lambda_{\alpha,0}.$$

On a d'ailleurs, en supposant $a = 2$ dans la troisième des équations (49),

$$\gamma_{\alpha,0} = \cos 2\alpha.$$

Enfin, la valeur générale de λ, donnée par la première des formules (16), étant

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathcal{F}(\alpha - 6\sqrt{-1})}{F'(\alpha - 6\sqrt{-1})} + \frac{\mathcal{F}(\alpha + 6\sqrt{-1})}{F'(\alpha + 6\sqrt{-1})}\right],$$

si, dans cette formule, on suppose

$$6 = 0, \quad \frac{\mathcal{F}(x)}{F(x)} = \frac{x}{a + \cos 2x},$$

et par conséquent,

$$\frac{\mathcal{F}(x)}{F'(x)} = -\frac{x}{2\sin 2x},$$

on trouvera

$$\lambda_{\alpha,0} = \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{F'(\alpha)} = -\frac{\alpha}{2\sin 2\alpha}.$$

On aura donc

(D) $$A'' = -\frac{\pi}{2}\,\frac{\alpha\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Cela posé, si, dans la formule (A), on substitue pour A″ et $\int_0^1 \frac{u\,du}{u^2 - 2au + 1}$ leurs valeurs tirées des équations (C) et (D), on trouvera

(E) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin 2x}{a + \cos 2x}\,dx = -\frac{\pi}{4} l(2 - 2a).$$

Second cas. — Supposons maintenant $a > 1$. Le système de valeurs de α et de β, pour lequel la valeur de α restera comprise entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, sera, en vertu du § I (exemple VII), déterminé par les équations

$$\text{(F)} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \beta = \tfrac{1}{2}l(a + \sqrt{a^2 - 1});$$

et, si l'on fait, pour abréger,

$$a - \sqrt{a^2 - 1} = f, \quad a + \sqrt{a^2 - 1} = g,$$

on aura

$$\text{(G)} \quad \int_0^1 \frac{u\,du}{u^2 - 2au + 1} = \int_0^1 \frac{u\,du}{(f-u)(g-u)} = \tfrac{1}{2}l(2a - 2) - \frac{g+f}{2(g-f)}\,l(g).$$

Quant à la valeur de A'' donnée par l'équation (47), il semble, au premier abord, qu'elle devrait être égale à

$$2\pi(\gamma_{\alpha,\beta}\lambda_{\alpha,\beta} + \delta_{\alpha,\beta}\mu_{\alpha,\beta}).$$

Mais, comme la valeur $\frac{1}{2}\pi$ de α est une des limites de l'intégration relative à x, on devra réduire à moitié l'expression précédente, et supposer, en conséquence,

$$A'' = \pi(\gamma_{\alpha,\beta}\lambda_{\alpha,\beta} + \delta_{\alpha,\beta}\mu_{\alpha,\beta}).$$

De plus, si, dans les équations (49), on remplace a par 2, α par $\frac{1}{2}\pi$, et β par

$$\tfrac{1}{2}l(a + \sqrt{a^2 - 1}) = \tfrac{1}{2}l(g) = -\tfrac{1}{2}l(f),$$

on trouvera

$$\gamma_{\alpha,\beta} = e^{-2\beta}\cos\pi = -f,$$
$$\delta_{\alpha,\beta} = e^{-2\beta}\sin\pi = 0.$$

Enfin, on aura aussi

$$\lambda_{\alpha,\beta} = \frac{-\beta\sqrt{-1}}{2\sin(2\alpha + 2\beta\sqrt{-1})} = \frac{\beta}{e^{2\beta} - e^{-2\beta}} = \frac{l(g)}{2(g-f)}.$$

Cela posé, la valeur de A'' se réduira simplement à

$$\text{(H)} \qquad A'' = -\pi\frac{f}{2(g-f)}\,l(g).$$

Si maintenant on substitue, dans la formule (A), pour A″ et $\int_0^1 \frac{u\,du}{u^2 - 2au + 1}$, leurs valeurs données par les équations (G) et (H), on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x}{a + \cos 2x}\, dx = -\frac{\pi}{4} l(2a - 2) + \frac{\pi}{4} l(g);$$

ou, parce que $g = a + \sqrt{a^2 - 1}$,

$$\text{(I)} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x}{a + \cos 2x}\, dx = -\frac{\pi}{4} l(2a - 2) + \frac{\pi}{4} l(a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Corollaire I. — En faisant usage des valeurs de α et de β trouvées dans le § I[er] (exemple VI), on arriverait, par une analyse entièrement semblable à celle qui précède, à la détermination de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x}{a - \cos 2x}\, dx,$$

1° dans le cas où l'on suppose $a < 1$, 2° dans le cas où l'on suppose $a > 1$. En joignant les valeurs de cette dernière intégrale aux équations (E) et (I), on obtient les formules suivantes,

$$\text{(K)} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \text{ pour } a < 1, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{a - \cos 2x}\, x\, dx = \frac{\pi}{4} l(2 + 2a), \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{a + \cos 2x}\, x\, dx = -\frac{\pi}{4} l(2 - 2a); \\ 2^\circ \text{ pour } a > 1, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{a - \cos 2x}\, x\, dx = \frac{\pi}{4} l(2a + 2) - \frac{\pi}{4} l(a + \sqrt{a^2 - 1}), \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{a + \cos 2x}\, x\, dx = -\frac{\pi}{4} l(2a - 2) + \frac{\pi}{4} l(a + \sqrt{a^2 - 1}). \end{array} \right.$$

On peut vérifier les deux dernières formules par les méthodes connues; et, en effet, si l'on suppose toujours

$$f = a - \sqrt{a^2 - 1},$$

on aura $f < 1$, et

$$\text{(L)}\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin 2x}{a - \cos 2x} &= \frac{2f \sin 2x}{1 + f^2 - 2f \cos 2x} \\ &= 2f \sin 2x + 2f^2 \sin 4x + 2f^3 \sin 6x + \ldots, \\ \frac{\sin 2x}{a + \cos 2x} &= \frac{2f \sin 2x}{1 + f^2 + 2f \cos 2x} \\ &= 2f \sin 2x - 2f^2 \sin 4x + 2f^3 \sin 6x - \ldots. \end{aligned} \right.$$

On a d'ailleurs, en général, α étant un nombre entier n,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2\alpha x \, dx = \pm \frac{\pi}{4\alpha},$$

le signe $+$ devant être admis dans le cas où n est un nombre pair, et le signe $-$ dans le cas contraire. Cela posé, les équations (L) conduiront aux suivantes :

$$\text{(M)}\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{a - \cos 2x} x \, dx &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{f}{1} - \frac{f^2}{2} + \frac{f^3}{3} - \ldots\right) = \frac{\pi}{2} l(1 + f), \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{a + \cos 2x} x \, dx &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{f}{1} + \frac{f^2}{2} + \frac{f^3}{3} + \ldots\right) = -\frac{\pi}{2} l(1 - f); \end{aligned} \right.$$

et comme on a, de plus,

$$\tfrac{1}{2} l(2a + 2) - \tfrac{1}{2} l(a + \sqrt{a^2 - 1}) = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{f + g + 2}{g}\right) = l(1 + f),$$

$$\tfrac{1}{2} l(2a - 2) - \tfrac{1}{2} l(a + \sqrt{a^2 - 1}) = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{f + g - 2}{g}\right) = l(1 - f),$$

il en résulte que les équations (M) coïncident parfaitement avec les deux dernières équations (K), ainsi qu'on devait s'y attendre.

Corollaire II. — Lorsqu'on suppose $a < 1$, la fonction placée sous le signe $\int$, dans l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{a - \cos 2x} x\, dx,$$

devient infinie pour la valeur α de x déterminée par l'équation

$$a - \cos 2x = 0.$$

Mais alors l'intégrale dont il s'agit peut se décomposer en deux autres de la forme

$$\int \frac{\sin 2u}{a - \cos 2u} u\, du, \quad \int \frac{\sin 2v}{a + \cos 2v} \left(\frac{\pi}{2} - v\right) dv,$$

prises, la première, entre les limites $u = 0$, $u = \alpha$, et la seconde, entre les limites $v = 0$, $v = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Cela posé, si l'on fait

$$u = \frac{2\alpha}{\pi} y, \quad v = \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) y, \quad \frac{2\alpha}{\pi} = m,$$

on aura

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{a - \cos 2x} x\, dx \\ &= m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{my \sin 2my}{a - \cos 2my} dy + (1 - m) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(y - my - \frac{\pi}{2}\right) \sin 2(1 - m) y}{a + \cos 2(1 - m) y} dy, \end{aligned}$$

les intégrales relatives à y étant prises, comme l'intégrale relative à x, entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$. On a d'ailleurs

$$a = \cos 2\alpha = \cos m\pi, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{a - \cos 2x} x\, dx = \frac{\pi}{4} l(2 + 2a).$$

Par suite, l'équation précédente deviendra

$$(\text{N}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{m^2 y \sin 2my}{\cos m\pi - \cos 2my} + \frac{\left[(1 - m)^2 y - (1 - m) \frac{\pi}{2}\right] \sin 2(1 - m) y}{\cos m\pi + \cos 2(1 - m) y} \right\} dy \\ &= \frac{\pi}{4} l(2 + 2 \cos m\pi). \end{aligned} \right.$$

Si, dans cette dernière, on réduit au même dénominateur les fractions renfermées sous le signe $\int$, la somme de ces deux fractions ne sera plus infinie pour aucune valeur de y comprise entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, par exemple, si l'on suppose $m = \frac{1}{2}$, on trouvera, pour la somme en question,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\frac{\sin y}{\cos y};$$

et, par conséquent, l'équation (N) se trouvera réduite à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\frac{\sin y}{\cos y}\,dy = \tfrac{1}{2}\pi\, l(2).$$

Cette dernière équation coïncide avec la formule connue

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\,\cos x}{\sin x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\, l(2).$$

La transformation que l'on vient d'appliquer à l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{a - \cos 2x}\,x\,dx$$

est également applicable à la suivante

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{a + \cos 2x}\,x\,dx,$$

dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ passe aussi par l'infini, lorsqu'on suppose $a < 1$.

Corollaire III. — L'analyse qui nous a conduits aux formules (K) peut s'étendre à toutes les intégrales de la forme

$$\text{(O)}\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\alpha + 6\cos 2x + \gamma\cos 4x + \ldots}{a + b\cos 2x + c\cos 4x + \ldots}\,x\,\sin 2x\,dx.$$

Supposons toujours, à l'ordinaire,

$$\frac{\alpha + 6 \cos 2x + \gamma \cos 4x + \ldots}{a + b \cos 2x + c \cos 4x + \ldots} = q.$$

Si l'on fait $2x = z$, q pourra représenter une fonction rationnelle quelconque de $\cos z$, et la formule (O) deviendra

$$\frac{1}{4} \int_0^{\pi} qz \sin z \, dz.$$

Ainsi, $\mathcal{F}(x)$ et $F(x)$ désignant deux fonctions entières de x, on pourra toujours obtenir les intégrales de la forme

$$\text{(P)} \qquad \int_0^{\pi} \frac{\mathcal{F}(\cos z)}{F(\cos z)} z \sin z \, dz,$$

et, par suite, celles de la forme

$$\text{(Q)} \qquad \int_0^{\pi} \frac{\mathcal{F}(\cos z)}{F(\cos z)} \frac{z}{\sin z} dz.$$

En effet, pour déduire la formule (Q) de la formule (P), il suffit de changer $F(\cos z)$ en $(1 - \cos^2 z) F(\cos z)$.

SECONDE QUESTION.

Comment l'analyse qui conduit aux formules (g) *indique-t-elle qu'on doit supposer, dans ces formules,* $a < b$?

Solution. — Les équations (g) sont déduites de la formule plus générale

$$(41) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{F}(x)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} \mathcal{F}(\sqrt{-1}).$$

Mais, en vertu du théorème II, cette formule ne doit être employée que dans le cas où chacune des parties réelle et imaginaire de la fonction

$$\frac{\mathfrak{F}(x+z\sqrt{-1})}{1+(x+z\sqrt{-1})^2}$$

s'évanouit pour des valeurs infinies positives de z. D'ailleurs, si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{\mathfrak{F}(x+z\sqrt{-1})}{1+(x+z\sqrt{-1})^2} = \mathrm{P}' + \mathrm{P}''\sqrt{-1},$$

$$\mathfrak{F}(x+z\sqrt{-1}) = \mathrm{Q}' + \mathrm{Q}''\sqrt{-1},$$

$$\frac{1}{1+(x+z\sqrt{-1})^2} = \mathrm{R}' + \mathrm{R}''\sqrt{-1};$$

on trouvera

$$\mathrm{R}' = \frac{1+x^2-z^2}{(1+x^2-z^2)^2+4x^2z^2}, \quad \mathrm{R}'' = \frac{-2xz}{(1+x^2-z^2)^2+4x^2z^2},$$

$$\mathrm{P}' = \mathrm{Q}'\mathrm{R}' - \mathrm{Q}''\mathrm{R}'', \quad \mathrm{P}'' = \mathrm{Q}''\mathrm{R}' + \mathrm{Q}'\mathrm{R}''.$$

Enfin, si l'on donne à z de très grandes valeurs, les équations précédentes se réduiront sensiblement à

$$\mathrm{R}' = -\frac{1}{z^2}, \quad \mathrm{R}'' = \frac{-2x}{z^3},$$

$$\mathrm{P}' = -\frac{\mathrm{Q}'}{z^2} + \frac{2x\mathrm{Q}''}{z^3}, \quad \mathrm{P}'' = \frac{-2x\mathrm{Q}'}{z^3} - \frac{\mathrm{Q}''}{z^2}.$$

Ainsi, pour que l'équation (41) ait lieu, il sera nécessaire qu'on ait à la fois pour des valeurs infinies de z

$$\frac{\mathrm{Q}'}{z^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{Q}''}{z^2} = 0.$$

Si, pour obtenir la première des formules (g), on suppose

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{\sin ax}{\sin bx},$$

on trouvera

$$\mathrm{Q}'+\mathrm{Q}''\sqrt{-1}=\frac{\sin(ax+az\sqrt{-1})}{\sin(bx+bz\sqrt{-1})}=\frac{(e^{az}+e^{-az})\sin ax+\sqrt{-1}(e^{az}-e^{-az})\cos ax}{(e^{bz}+e^{-bz})\sin bx+\sqrt{-1}(e^{bz}-e^{-bz})\cos bx},$$

$$\mathrm{Q}'=\frac{(e^{az}+e^{-az})(e^{bz}+e^{-bz})\sin ax\sin bx+(e^{az}-e^{-az})(e^{bz}-e^{-bz})\cos ax\cos bx}{[(e^{bz}+e^{-bz})\sin bx]^2+[(e^{bz}-e^{-bz})\cos bx]^2},$$

$$\mathrm{Q}''=\frac{(e^{az}+e^{-az})(e^{bz}-e^{-bz})\sin ax\cos bx-(e^{az}-e^{-az})(e^{bz}+e^{-bz})\cos ax\sin bx}{[(e^{bz}+e^{-bz})\sin bx]^2+[(e^{bz}-e^{-bz})\cos bx]^2}.$$

Lorsque z devient très considérable, on peut, dans les valeurs précédentes de Q′ et de Q″, négliger les exponentielles e^{-az}, e^{-bz}, vis-à-vis des exponentielles e^{az}, e^{bz}, ce qui réduit les valeurs de Q′ et de Q″ à

$$\mathrm{Q}'=e^{(a-b)z}(\cos ax\cos bx+\sin ax\sin bx),$$
$$\mathrm{Q}''=e^{(a-b)z}(\sin ax\cos bx-\cos ax\sin bx).$$

On a donc, par suite,

$$\frac{\mathrm{Q}'}{z^2}=\frac{e^{(a-b)z}}{z^2}\cos(a-b)x,$$
$$\frac{\mathrm{Q}''}{z^2}=\frac{e^{(a-b)z}}{z^2}\sin(a-b)x.$$

Les seconds membres de ces dernières équations s'évanouissent évidemment pour des valeurs infinies de z, lorsqu'on suppose $a<b$. On peut donc alors faire usage de la formule (41). Mais, si l'on suppose $a>b$, alors, $a-b$ étant positif, l'exponentielle $e^{(a-b)z}$ croîtra beaucoup plus rapidement que z^2; et, par suite, les valeurs de $\frac{\mathrm{Q}'}{z^2}$, $\frac{\mathrm{Q}''}{z^2}$, devenant infinies avec la variable z, la formule (41) sera illusoire.

Corollaire I. — Si la formule (41) ne peut plus être employée dans le cas où l'on suppose $a>b$, cela tient à ce que, dans cette hypothèse, l'exponentielle e^{az}, qu'introduit dans les valeurs de Q′ et de Q″ le numérateur de la fraction

$$\frac{\sin ax}{\sin bx},$$

est d'un ordre plus élevé que l'exponentielle e^{bz}, introduite par le dénominateur de la même fraction; en sorte que, pour de très grandes valeurs de z, Q′ et Q″ sont de l'ordre de

$$e^{(a-b)z}.$$

On remédie à cet inconvénient en appliquant à l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx}\frac{dx}{1+x^2}$$

le principe de la séparation des exponentielles, comme nous l'avons fait dans le § VII (exemple II). En effet, la séparation dont il s'agit fait disparaître entièrement du calcul l'exponentielle e^{az}, pour ne conserver à sa place que l'exponentielle e^{-az}; et, par suite, les fonctions de x et de z, qui remplacent alors Q′ et Q″, sont, pour de très grandes valeurs de z, de l'ordre de

$$e^{-(a+b)z}.$$

Il est aisé d'en conclure que ces fonctions, divisées par z^2, ou même par une puissance quelconque de z, s'évanouissent non seulement dans le cas où l'on a $a<b$, mais encore dans celui où l'on suppose $a>b$. Ainsi la méthode fondée sur la séparation des exponentielles est également applicable à toutes les hypothèses. Cette remarque conduit facilement à la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx}\frac{dx}{1+x^2},$$

dans le cas où l'on suppose $a>b$. Cette valeur est donnée par l'équation

$$\text{(R)}\qquad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{br}+e^{-br}-2e^{-a}}{e^b-e^{-b}},$$

dans laquelle $\frac{1}{2}r$ désigne la différence absolue qui existe entre le rapport $\frac{a}{2b}$ et le nombre entier le plus voisin de ce rapport.

Quoique la fonction renfermée sous le signe $\int$, dans le premier membre de l'équation (R), passe en général par l'infini, néanmoins cette circonstance cesse d'avoir lieu dans le cas où $\frac{a}{b}$ est un nombre entier. Alors, si l'on suppose $a = kb$, on aura $r = 0$ ou $r = 1$, suivant que le nombre entier k sera pair ou impair. Par suite, si l'on fait successivement

$$k = 2m,$$
$$k = 2m + 1,$$

m étant un nombre entier quelconque, l'équation (R) donnera les deux suivantes :

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin 2mbx}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \frac{1 - e^{-2mb}}{e^b - e^{-b}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(2m+1)bx}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \pi e^{-b} \frac{1 - e^{-2mb}}{e^b - e^{-b}}. \end{cases}$$

On vérifie aisément ces dernières équations, à l'aide des formules connues. Ainsi, par exemple, si l'on fait $m = 1$, on aura

$$\frac{\sin 2mbx}{\sin bx} = \frac{\sin 2bx}{\sin bx} = 2 \cos bx,$$

$$\frac{\sin(2m+1)bx}{\sin bx} = \frac{\sin 3bx}{\sin bx} = 1 + 2 \cos 2bx;$$

et, par suite, les équations (S) deviendront

$$2 \int_0^\infty \cos bx \frac{dx}{1+x^2} = \pi e^{-b},$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} + 2 \int_0^\infty \cos 2bx \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \pi e^{-b}.$$

On déduit aisément des mêmes équations la suivante :

$$(\mathrm{T}) \quad \int_0^\infty \frac{\sin(2m+1)bx - e^{-b} \sin 2mbx}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

En général, quelle que soit la valeur entière ou fractionnaire du rapport $\frac{a}{b}$, on aura

$$\text{(U)} \qquad \int^{\infty} \frac{\sin(a+b)x - e^{-b}\sin ax}{\sin bx} \frac{dr}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-rb}.$$

Corollaire II. — La même analyse qui sert à déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{dr}{1+x^2}$$

donne la valeur de l'intégrale

$$\text{(V)} \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{\mathfrak{F}(x^2)}{F(x^2)} dx,$$

$\mathfrak{F}(x^2)$ et $F(x^2)$ désignant deux fonctions entières quelconques de x^2, quelle que soit d'ailleurs la valeur du rapport $\frac{a}{b}$: et d'abord, si l'on applique à l'intégrale (V) la méthode du § V, on obtiendra sa valeur en termes finis pour tous les cas où

$$\frac{a}{b} < 1.$$

De plus, si l'on fait usage de la méthode exposée dans le § VII, on obtiendra la valeur de cette intégrale dans tous les cas possibles; mais cette dernière valeur sera composée de deux parties, dont l'une, correspondant aux racines de l'équation

$$F(x^2) = 0,$$

renfermera toujours un nombre fini de termes; et dont l'autre, correspondant aux racines de l'équation

$$\sin bx = 0,$$

sera équivalente au produit de $\frac{2\pi}{b}$ par la série

$$\text{(W)} \qquad \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{F}\left(\frac{\pi^2}{b^2}\right)}{F\left(\frac{\pi^2}{b^2}\right)} \cos\left(\frac{a\pi}{b}\right) + \frac{\mathfrak{F}\left(\frac{4\pi^2}{b^2}\right)}{F\left(\frac{4\pi^2}{b^2}\right)} \cos\left(\frac{2a\pi}{b}\right) - \frac{\mathfrak{F}\left(\frac{9\pi^2}{b^2}\right)}{F\left(\frac{9\pi^2}{b^2}\right)} \cos\left(\frac{3a\pi}{b}\right) + \ldots$$

La comparaison des valeurs de l'intégrale (V), obtenues par les deux méthodes qu'on vient de citer, fera connaître la valeur de la série (W) dans le cas où l'on suppose $a < b$. Il est aisé d'en conclure la valeur de la même série dans tous les cas possibles, attendu qu'on peut toujours, sans altérer cette valeur, diminuer le rapport $\frac{a}{b}$ d'un nombre pair pris à volonté. Ainsi, quel que soit le rapport $\frac{a}{b}$, on pourra obtenir en termes finis l'expression de la série (W) et de l'intégrale (V) qui en dépend.

En général, on peut déterminer par les méthodes précédentes les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{\mathcal{F}(x^2)}{F(x^2)} \frac{\sin a x}{\sin b x} dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathcal{F}(x^2)}{F(x^2)} \frac{\cos a x}{\cos b x} dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathcal{F}(x^2)}{F(x^2)} \frac{\sin a x}{x \cos b x} dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathcal{F}(x^2)}{F(x^2)} \frac{x \cos a x}{\sin b x} dx;$$

et les valeurs des séries qui ont pour termes généraux

$$(-1)^n \frac{\mathcal{F}\left(\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)}{F\left(\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)} \cos\left(\frac{na\pi}{b}\right),$$

$$(-1)^n \frac{\mathcal{F}\left[\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4b^2}\right]}{F\left[\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4b^2}\right]} \sin\left[\frac{(2n+1)a\pi}{2b}\right],$$

$$(-1)^n \frac{\mathcal{F}\left[\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4b^2}\right]}{F\left[\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4b^2}\right]} \frac{\cos\left[\frac{(2n+1)a\pi}{2b}\right]}{2n+1},$$

$$(-1)^n \frac{\mathcal{F}\left(\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)}{F\left(\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)} n \sin\left(\frac{na\pi}{b}\right);$$

ou, ce qui revient au même, celles des séries qui ont pour termes généraux,

$$(-1)^n \varphi(nA) \cos n\theta,$$

$$(-1)^n \varphi[(2n+1)A] \sin(2n+1)\theta,$$

$$(-1)^n \varphi[(2n+1)A] \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1},$$

$$(-1)^n \varphi(nA) n \sin n\theta;$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction rationnelle et paire de la variable x; et les deux quantités A, θ, étant des constantes arbitraires. Ces méthodes exigent seulement qu'on détermine les racines de l'équation

$$\frac{1}{\varphi(x)} = 0.$$

SECOND SUPPLÉMENT,

OU

EXAMEN DES DIFFICULTÉS QUE PRÉSENTE LA VÉRIFICATION,

PAR LES MÉTHODES CONNUES,

DES FORMULES DÉSIGNÉES PAR (g) DANS LE MÉMOIRE SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES.

OBSERVATIONS

SUR LES FORMULES DÉSIGNÉES PAR (g) DANS LE MÉMOIRE.

Première observation. — Il est facile de voir que ces formules coïncident avec celles qu'on obtient par les méthodes connues, dans le cas où l'on suppose $a = 0$. De plus, comme, dans les équations (g), le rapport $\frac{a}{b}$ peut être un nombre positif quelconque plus petit que l'unité, il est naturel de penser que ces équations doivent subsister encore dans le cas où a devient égal à b. On peut aisément vérifier cette induction à l'égard des trois premières formules; et d'abord les deux premières se réduisent, dans cette hypothèse, à

(α) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2},$$

ce qui est évidemment exact. Quant à la troisième, lorsqu'on y suppose $a = b$, elle devient

(β) $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{tang} bx}{x} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}}.$$

On peut obtenir cette dernière formule par les méthodes connues, ainsi qu'il suit.

Considérons d'abord l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2bx}{1+2r\cos 2bx+r^2}\,\frac{dx}{x(1+x^2)},$$

r étant <1. On aura généralement

$$\frac{\sin 2bx}{1+2r\cos 2bx+r^2} = \sin 2bx - r\sin 4bx + r^2\sin 6bx - \ldots,$$

et

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}\sin kx = \frac{\pi}{2}(1-e^{-k}).$$

Par suite, la valeur de l'intégrale proposée sera représentée par la série

$$\frac{\pi}{2}\left[(1-e^{-2b}) - r(1-e^{-4b}) + r^2(1-e^{-6b}) - \ldots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}(1-r+r^2-\ldots) - \frac{\pi}{2}(e^{-2b} - re^{-4b} + r^2e^{-6b} - \ldots)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1+r} - \frac{1}{e^{2b}+r}\right) = \frac{\pi}{2(1+r)}\,\frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+r}.$$

On aura donc enfin

$$(\gamma)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}\,\frac{\sin 2bx}{1+2r\cos 2bx+r^2} = \frac{\pi}{2(1+r)}\,\frac{e^b-e^{-b}}{e^b+re^{-b}}.$$

Si, dans cette dernière équation, on fait $r=1$, on retrouvera la formule ($\mathfrak{C}$).

Il nous reste à considérer la dernière des formules (g). Si, dans cette formule, a devient égal à b, on aura

$$(\delta)\qquad \int_0^\infty \frac{x\cos ax}{\sin bx}\,\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^b+e^{-b}}{e^b-e^{-b}}.$$

Pour comparer l'équation (δ) avec une formule déjà connue, faisons $m=1$ dans la formule (c) des *Exercices de Calcul intégral* (IV^e Partie,

p. 124). Cette formule deviendra

$$\int_0^\infty z \cot a z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{e^{2a}-1},$$

ou, si l'on change z en x, et a en b,

$$(\varepsilon) \qquad \int_0^\infty \frac{x \cos bx}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{2e^{-b}}{e^b - e^{-b}}.$$

Cette dernière équation ne paraît nullement d'accord avec la formule (δ), et ces deux formules semblent s'exclure réciproquement. Mais la contradiction dont il s'agit n'est qu'apparente, et l'on peut même déduire la formule (δ) de l'équation (ε), ainsi qu'on va le faire voir.

Les équations (g) étant démontrées seulement dans le cas où l'on a $a < b$, pour déduire de ces équations la formule (δ), on est obligé de supposer que $b - a$ est une quantité positive très petite. Soit α la quantité dont il s'agit. On aura

$$a = b - \alpha,$$

et par suite l'équation (δ) deviendra

$$(\zeta) \qquad \int_0^\infty \frac{x \cos(b-\alpha)x}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^b + e^{-b}}{e^b - e^{-b}}.$$

Il s'agit maintenant de vérifier cette dernière équation.

Comme on a en général

$$\frac{\cos(b-\alpha)x}{\sin bx} = \cos \alpha x \frac{\cos bx}{\sin bx} + \sin \alpha x,$$

et

$$\int_0^\infty \sin \alpha x \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha},$$

l'intégrale, qui forme le premier membre de l'équation (ζ), pourra être remplacée, quelle que soit la valeur de α, par

$$\frac{\pi}{2} e^{-\alpha} + \int_0^\infty \cos \alpha x \frac{x \cos bx}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Si, dans cette dernière expression, on suppose α très petit, elle deviendra à très peu près

$$\frac{\pi}{2}+\int_0^\infty \frac{x\cos bx}{\sin bx}\,\frac{dx}{1+x^2}.$$

On aura donc, en supposant α très petit,

$$\int_0^\infty \frac{x\cos(b-\alpha)x}{\sin bx}\,\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\int_0^\infty \frac{x\cos bx}{\sin bx}\,\frac{dx}{1+x^2}.$$

Si, dans cette dernière équation, on substitue à l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x\cos bx}{\sin bx}\,\frac{dx}{1+x^2}$$

sa valeur donnée par la formule (ε), on retrouvera l'équation (ζ).

En résumé, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x\cos(b-\alpha)x}{\sin bx}\,\frac{dx}{1+x^2}$$

obtient deux valeurs essentiellement différentes l'une de l'autre, suivant que l'on y suppose α nul ou très petit. La première de ces valeurs est égale à

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{2e^{-b}}{e^b-e^{-b}},$$

et la seconde à

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\,\frac{2e^{-b}}{e^b-e^{-b}}=\frac{\pi}{2}\,\frac{e^b+e^{-b}}{e^b-e^{-b}}.$$

Deuxième observation. — La remarque qu'on vient de faire relativement à l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x\cos(b-\alpha)x}{\sin bx}\,\frac{dx}{1+x^2}$$

s'applique également à l'intégrale

$$(\eta)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin(b-\alpha)x}{\cos bx}\,\frac{dx}{x}.$$

Cette dernière intégrale, lorsqu'on y suppose $\alpha = 0$, se réduit à

$$\int_0^\infty \tang bx \frac{dx}{x};$$

et sa valeur, en vertu de la formule (c) déjà citée, est égale à

$$\frac{\pi}{2}.$$

Mais, comme on a en général

$$\frac{\sin(b-\alpha)x}{\cos bx} = \cos\alpha x \tang bx - \sin\alpha x,$$

et

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

si l'on se contente de supposer α très petit, l'intégrale $(\varkappa)$ aura pour valeur

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

ainsi qu'on peut le conclure directement du premier théorème énoncé dans la seconde Partie du Mémoire.

Troisième observation. — La propriété qu'ont les deux intégrales

$$\int_0^\infty \frac{x\cos(b-\alpha)x}{\sin bx}\,\frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin(b-\alpha)x}{\cos bx}\,\frac{dx}{x}$$

d'acquérir des valeurs différentes, suivant que l'on suppose α nul ou très petit, ne tient nullement à cette circonstance particulière que la fonction sous le signe $\int$, dans chacune des intégrales dont il s'agit, passe par l'infini entre les limites de l'intégration. En effet, la même propriété appartient aussi à d'autres intégrales définies pour lesquelles cette circonstance n'a plus lieu. Telles sont, par exemple, les deux suivantes,

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\,dx,$$

qui, pour de très petites valeurs de α, se réduisent, en vertu des méthodes connues, à $\frac{\pi}{2}$, et qui néanmoins s'évanouissent, lorsqu'on y suppose $\alpha = 0$. Telle est encore l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a+\alpha)x \cos(a-\alpha)x}{1+x^2} x\,dx,$$

qui, pour de très petites valeurs de α, se réduit à

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2ax + \sin 2\alpha x}{2} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}(e^{-2a}+e^{-2\alpha}) = \frac{\pi}{4}(e^{-2a}+1),$$

et qui, pour une valeur nulle de α, est simplement égale à

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos ax}{1+x^2} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \sin 2ax \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-2a}}{4}.$$

Quatrième observation. — Il suit de ce qui précède, que la quatrième des équations (g) se trouve vérifiée par les méthodes connues, 1° quand $a=0$; 2° quand, a étant inférieur à b, la différence $b-a$ est une quantité infiniment petite. On peut encore vérifier la même équation dans le cas où l'on suppose $b=2a$. En effet, dans cette hypothèse, on a

$$\frac{\cos ax}{\sin bx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sin ax},$$

$$\frac{e^a+e^{-a}}{e^b-e^{-b}} = \frac{1}{e^a-e^{-a}};$$

et par suite la quatrième des formules (g) devient

$$\int_0^\infty \frac{x}{\sin ax}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{e^a-e^{-a}},$$

ce qui s'accorde avec l'équation (f) des *Exercices de Calcul intégral* (IV^e^ Partie, p. 125).

Cinquième observation. — L'analyse qui conduit aux formules (g) suppose que l'on a $a<b$; et c'est pour cette raison que la quatrième

des formules dont il s'agit cesse d'être exacte, lorsque $a - b = 0$, quoiqu'elle soit vraie lorsque $a - b$ est une quantité très petite. Pour obtenir des résultats indépendants du rapport des deux constantes a et b, il faut, comme nous l'avons déjà dit, avoir recours au principe de la séparation des exponentielles. En appliquant ce principe à la détermination de l'intégrale

$$(\theta) \qquad \int_0^\infty \frac{x \cos ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2},$$

on trouve

$$(\lambda) \qquad \int_0^\infty \frac{x \cos ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2} = \pi\left(\frac{e^{-a}}{e^b - e^{-b}} + C\right),$$

la valeur de C étant déterminée par l'équation

$$(\mu) \qquad C = \frac{\pi}{b^2}\left(\frac{\sin\frac{\pi a}{b}}{1+\frac{\pi^2}{b^2}} - 2\frac{\sin\frac{2\pi a}{b}}{1+\frac{4\pi^2}{b^2}} + 3\frac{\sin\frac{3\pi a}{b}}{1+\frac{9\pi^2}{b^2}} - \dots\right).$$

Enfin, lorsque r est plus petit que l'unité, on a

$$(\nu) \qquad \frac{\pi}{b^2}\left(\frac{\sin\pi r}{1+\frac{\pi^2}{b^2}} - 2\frac{\sin 2\pi r}{1+\frac{4\pi^2}{b^2}} + 3\frac{\sin 3\pi r}{1+\frac{9\pi^2}{b^2}} - \dots\right) = \frac{1}{2}\frac{e^{br} - e^{-br}}{e^b - e^{-b}}.$$

Les trois équations (λ), (μ), (ν) suffisent pour déterminer la valeur de l'intégrale (θ), dans tous les cas possibles, ainsi qu'on va le faire voir.

Premier cas. — Supposons d'abord $a < b$; en faisant

$$r = \frac{a}{b}$$

dans l'équation (ν), on trouvera

$$C = \frac{1}{2}\frac{e^a - e^{-a}}{e^b - e^{-b}},$$

et, par suite, l'équation (λ) deviendra

$$(\pi) \qquad \int_0^\infty \frac{x \cos ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^a + e^{-a}}{e^b - e^{-b}};$$

ce qui s'accorde avec la quatrième équation (g).

Second cas. — Supposons, en second lieu, $a = b$, on aura

$$\sin\frac{\pi a}{b} = 0, \quad \sin\frac{2\pi a}{b} = 0, \quad \ldots;$$

et, par suite, l'équation (μ) donnera

$$C = 0.$$

Cela posé, l'équation (λ) deviendra

$$(\rho) \qquad \int_0^\infty x \cot bx \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-b}}{e^b - e^{-b}};$$

ce qui s'accorde avec l'équation (c) des *Exercices de Calcul intégral*. En général, si le rapport $\frac{a}{b}$ équivaut à un nombre entier quelconque, on aura

$$(\sigma) \qquad \int_0^\infty x \frac{\cos ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-a}}{e^b - e^{-b}}.$$

Troisième cas. — Soit $a > b$, $\frac{a}{b}$ n'étant pas un nombre entier. On pourra supposer

$$\frac{a}{b} = 2q \pm r,$$

q étant un nombre entier, et r une fraction plus petite que l'unité. Cela posé, si l'on a

$$\frac{a}{b} = 2q + r,$$

on aura aussi

$$\sin\frac{\pi a}{b} = \sin\pi r, \quad \sin\frac{2\pi a}{b} = \sin 2\pi r, \quad \ldots,$$

et, par suite, l'équation (ν) donnera

$$C = \frac{1}{2}\frac{e^{br} - e^{-br}}{e^b - e^{-b}}.$$

Au contraire, si l'on a

$$\frac{a}{b} = 2q - r,$$

on aura, par suite,

$$\sin\frac{\pi a}{b} = -\sin\pi r,\quad \sin\frac{2\pi a}{b} = -\sin 2\pi r,\quad \ldots,$$

et l'équation (ν) donnera

$$C = -\frac{1}{2}\,\frac{e^{br}-e^{-br}}{e^{b}-e^{-b}}.$$

On aura donc, dans le premier cas,

$$(\tau)\qquad \int_0^\infty \frac{x\cos ax}{\sin bx}\,\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{2e^{-a}+e^{br}-e^{-br}}{e^{b}-e^{-b}},$$

et dans le second,

$$(\upsilon)\qquad \int_0^\infty \frac{x\cos ax}{\sin bx}\,\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{2e^{-a}-e^{br}+e^{-br}}{e^{b}-e^{-b}}.$$

La formule (τ) est la dernière de celles que nous avons désignées, dans le Mémoire, par la lettre (z). Il nous reste à montrer, par quelques exemples, que les formules (τ) et (υ) s'accordent avec celles qu'on peut trouver par les méthodes connues.

Exemple I. — Soit $a = b + \alpha$, α étant une quantité très petite. On trouvera

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{\alpha}{a} = 2 - \left(1 - \frac{\alpha}{a}\right),$$

$$r = 1 - \frac{\alpha}{a}.$$

On aura donc, à très peu près,

$$\frac{2e^{-a}-e^{br}+e^{-br}}{e^{b}-e^{-b}} = \frac{2e^{-b}}{e^{b}-e^{-b}} - 1.$$

Cela posé, l'équation (υ) deviendra

$$(\varphi)\qquad \int_0^\infty \frac{x\cos(b+\alpha)x}{\sin bx}\,\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-b}}{e^{b}-e^{-b}} - \frac{\pi}{2}.$$

On obtient la même formule en retranchant l'une de l'autre les deux équations connues

$$\int_0^\infty \cot bx \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-b}}{e^b - e^{-b}},$$

$$\int_0^\infty \sin\alpha x \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

et observant que, pour de très petites valeurs de α, on a, à fort peu près,

$$\cot bx - \sin\alpha x = \frac{\cos(b+\alpha)x}{\sin bx}.$$

Exemple II. — Soit $a = 2b + \alpha$, α étant toujours une quantité très petite, on trouvera

$$\frac{a}{b} = 2 + \frac{\alpha}{a},$$

$$r = \frac{\alpha}{a}.$$

On aura donc, à très peu près, $r = 0$. Cela posé, l'équation (τ) deviendra

$$(\chi) \qquad \int_0^\infty \frac{x\cos(2b+\alpha)x}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-2b}}{e^b - e^{-b}}.$$

On a, d'ailleurs, pour de très petites valeurs de α,

$$\frac{\cos(2b+\alpha)x}{\sin bx} = \frac{1}{\sin bx} - 2\sin bx - 2\sin\alpha x\cos bx,$$

$$\int_0^\infty 2\sin\alpha x\cos bx \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\left(e^{-(b+\alpha)} - e^{-(b-\alpha)}\right) = 0.$$

Par suite, l'équation (χ) deviendra

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sin bx} - 2\sin bx\right) \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-2b}}{e^b - e^{-b}}.$$

On vérifie aisément cette dernière au moyen des formules connues

$$\int_0^\infty \frac{x}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{e^b - e^{-b}},$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-b}.$$

RÉSUMÉ.

Pour obtenir la valeur de l'intégrale

$$(\theta) \qquad \int_0^\infty \frac{x \cos a x}{\sin b x} \frac{dx}{1+x^2},$$

considérée comme une fonction de a, il faut d'abord examiner si $\frac{a}{b}$ est un nombre entier ou fractionnaire. Si $\frac{a}{b}$ est un nombre entier, l'intégrale (θ) aura pour valeur

$$\frac{\pi e^{-a}}{e^b - e^{-b}}.$$

Mais si $\frac{a}{b}$ est un nombre fractionnaire, alors, pour déterminer la valeur de la même intégrale, on sera obligé de distinguer diverses périodes, suivant les diverses valeurs de a. Ainsi, par exemple, si l'on suppose

$\frac{a}{b} > 0$ et < 1, l'intégrale (θ) aura pour valeur $\frac{\pi}{2} \frac{e^a - e^{-a}}{e^b - e^{-b}}$,

$\frac{a}{b} > 1$ et < 2, » $\frac{\pi}{2} \frac{2e^{-a} - e^{2b-a} + e^{-2b+a}}{e^b - e^{-b}}$,

$\frac{a}{b} > 2$ et < 3, » $\frac{\pi}{2} \frac{2e^{-a} - e^{2b-a} + e^{-2b+a}}{e^b - e^{-b}}$,

$\frac{a}{b} > 3$ et < 4, » $\frac{\pi}{2} \frac{2e^{-a} - e^{4b-a} + e^{-4b+a}}{e^b - e^{-b}}$,

$\frac{a}{b} > 4$ et < 5, » $\frac{\pi}{2} \frac{2e^{-a} - e^{4b-a} + e^{-4b+a}}{e^b - e^{-b}}$,

. . . .

On peut remarquer ici que la valeur de l'intégrale est donnée par la même formule dans les seconde et troisième périodes, dans la quatrième et la cinquième, dans la sixième et la septième, etc.; et l'on voit en même temps que, si $2n$ représente un nombre entier pair quelconque, on obtiendra pour l'intégrale (θ) la même valeur, soit que l'on suppose

$$\frac{a}{b} = 2n,$$

soit que l'on suppose

$$\frac{a}{b} = 2n \pm \alpha,$$

α étant une quantité très petite. Au contraire, si l'on désigne par $2n+1$ un nombre impair quelconque, les trois valeurs de l'intégrale (θ), correspondantes à

$$\frac{a}{b} = 2n+1-\alpha, \quad \frac{a}{b} = 2n+1, \quad \frac{a}{b} = 2n+1+\alpha,$$

seront différentes l'une de l'autre, et respectivement égales à

$$\frac{\pi e^{-a}}{e^b - e^{-b}} + \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi e^{-a}}{e^b - e^{-b}}, \quad \frac{\pi e^{-a}}{e^b - e^{-b}} - \frac{\pi}{2}.$$

On peut vérifier directement cette dernière conclusion, ainsi qu'il suit.

Si l'on désigne toujours par α une quantité fort petite, on aura, à très peu près,

$$\cos\alpha x = 1,$$

et par suite,

$$\int \frac{x\cos(a\pm\alpha)x}{\sin bx}\,\frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{x\cos ax}{\sin bx}\,\frac{dx}{1+x^2} \pm \int \sin\alpha x\,\frac{\sin ax}{\sin bx}\,\frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Si, dans cette dernière équation, on suppose

$$a = (2n+1)b,$$

n étant un nombre entier, on aura

$$\int_0^\infty \frac{x\cos ax}{\sin bx}\,\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-a}}{e^b - e^{-b}}.$$

Cela posé, pour vérifier les résultats trouvés ci-dessus, il suffira de faire voir qu'on a

$$\int_0^\infty \sin\alpha x\,\frac{\sin(2n+1)bx}{\sin bx}\,\frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

et, en effet, soit $2n+1=k$, on aura

$$\frac{\sin(2n+1)bx}{\sin bx}=\frac{\sin kbx}{\sin bx}$$
$$=k-\frac{k(k^2-1)}{1.2.3}(\sin bx)^2+\frac{k(k^2-1)(k^2-9)}{1.2.3.4.5}(\sin bx)^4-\ldots.$$

De plus, on a, en général,

$$(\sin bx)^{2m}=\pm\frac{1}{2^{2m-1}}\left[\cos mbx-\frac{m}{1}\cos(m-1)bx+\ldots\right.$$
$$\left.\pm\frac{1}{2}\,\frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m}\right];$$

on a aussi (α étant très petit),

$$\int_0^\infty \sin\alpha x\ \cos mbx\,\frac{x\,dx}{1+x^2}=0,$$
$$\int_0^\infty \sin\alpha x\ \cos(m-1)bx\,\frac{x\,dx}{1+x^2}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\int_0^\infty \sin\alpha x\,\frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\int_0^\infty \sin\alpha x(\sin bx)^{2m}\,\frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2^{2m+1}}\,\frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m},$$

et par suite

$$(\psi)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \sin\alpha x\,\frac{\sin(2n+1)bx}{\sin bx}\,\frac{x\,dx}{1+x^2}\\&\quad=\frac{\pi}{2}\left[k-\frac{2}{1}\,\frac{k(k^2-1)}{1.2.3}\,\frac{1}{2^2}+\frac{4.3}{1.2}\,\frac{k(k^2-1)(k^2-9)}{1.2.3.4.5}\,\frac{1}{2^4}-\ldots\right].\end{aligned}\right.$$

Si, dans le second membre de l'équation (ψ), on fait successivement $k=1$, $k=2$, $k=3$, ..., on trouvera qu'il se réduit toujours, comme cela doit être, à

$$\frac{\pi}{2}.$$

On a donc, en général, k étant un nombre impair,

$$(\omega)\quad \left\{\begin{aligned} & k - \frac{2}{1}\,\frac{k(k^2-1)}{1.2.3}\,\frac{1}{2^2} + \frac{4.3}{1.2}\,\frac{k(k^2-1)(k^2-9)}{1.2.3.4.5}\,\frac{1}{2^4} \\ & -\frac{6.5.4}{1.2.3}\,\frac{k(k^2-1)(k^2-9)(k^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7}\,\frac{1}{2^6} + \ldots = 1. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière équation, à laquelle on est nécessairement conduit par l'analyse précédente, peut être facilement vérifiée dans les divers cas particuliers; mais il serait peut-être difficile de la démontrer directement.

On peut remarquer que le dernier terme de la série qui forme le premier membre de l'équation (ω) est égal au terme moyen du coefficient de la puissance $k-1$ du binôme. De plus, si k est un nombre premier, tous les termes de la série en question, à l'exception du dernier, seront divisibles par k. Cela posé, il suit de l'équation (ω) que, si l'on désigne par k un nombre premier supérieur à 2, le coefficient du terme moyen, dans la puissance $k-1$ du binôme, étant divisé par k, donnera pour reste $+1$ ou -1, suivant que le nombre donné k sera de la forme $4n+1$, ou $4n-1$. Au surplus, il est facile de démontrer directement cette proposition, et de faire voir que, si k est un nombre premier, les divers coefficients de la puissance $k-1$ du binôme, divisés par k, donneront alternativement pour reste $+1$ et -1.

Ce qui précède suffit pour montrer comment on peut vérifier les formules (g) et (z) du Mémoire par les méthodes connues. C'est pourquoi je n'insisterai pas davantage sur cet objet.

FIN DU TOME PREMIER DE LA PREMIÈRE SÉRIE.