Pour le bicentenaire de la parution de la Théorie analytique de la chaleur L'offre d'analyse de Fourier

• J. Dhombres

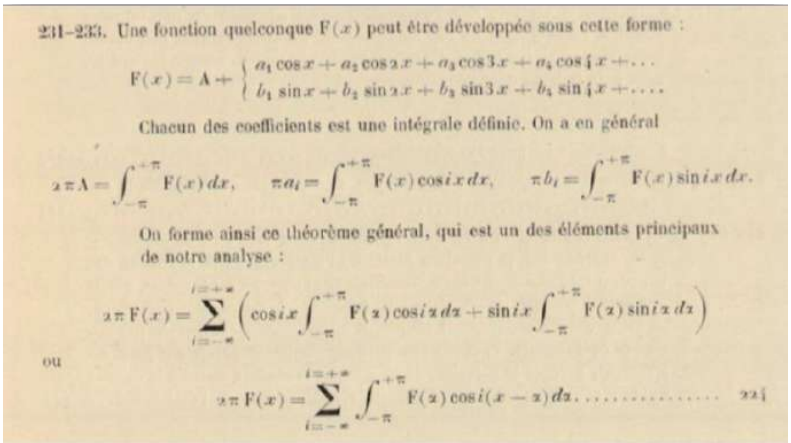
La vie de Fourier (1768-1830) peut se lire comme un roman d'aventure : l'orphelin à l'âge de 10 ans devient moine bénédictin qui est libéré de ses vœux si on peut le dire ainsi par la Révolution en 1789, puis acteur de la Terreur en 1793 dans sa ville natale d'Auxerre, professeur d'analyse à l'École polytechnique fin 1795 alors qu'il n'a encore rien publié, séjournant en Égypte avant 1800, puis préfet de l'Empire jusqu'en 1814, maintenu par Louis XVIII et pourtant devenu préfet du Rhône pendant les Cent Jours, puis démis avant Waterloo pour résistance aux ordres venus de Paris d'organiser une répression à Lyon. Sa vie scientifique n'est pas moins contrastée, avec une implication très sérieuse trois années à partir de la fin 1804, lorsqu'il a atteint déjà l'âge de trente-cinq ans, et une sorte de mise en forme après 1817. S'il termine sa carrière comme secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, n'ayant jamais repris l'enseignement abandonné en 1798, sa Théorie analytique rédigée en manuscrit en 1807 prendra quinze ans pour être publiée, par suite de diverses oppositions dont celle de Joseph Louis Lagrange et de Siméon Denis Poisson. Avant d'être reconnu par les mathématiciens qui aujourd'hui parlent d'analyse de Fourier, ce sont les physiciens qui firent d'abord sa postérité, et les climatologues le retrouvent aujourd'hui à l'origine de l'effet de serre. C'est encore un philosophe comme Auguste Comte qui le célébra dans son *Cours de philosophie positive* de 1830. De nombreux historiens ont tenu, peut-être en raison de publics différents qu'ils visaient, à séparer les différents côtés de cette vie. On sépara donc l'orphelin à l'âge de 10 ans de son milieu commerçant et citadin porté vers l'éducation qui permettait l'ascension bourgeoise en cette fin d'Ancien Régime français ; on sépara le scientifique de l'homme d'action et d'administration qu'il fut comme préfet de Grenoble alors qu'à ce moment il donnait le meilleur de sa production intellectuelle, tout comme on sépara fortement le physicien du mathématicien. On traita aussi comme s'il s'agissait d'une parenthèse médiocre son professorat d'analyse à l'École polytechnique à partir de la fin 1795, voire on présenta comme anecdotique sa direction d'un voyage d'exploration d'antiquités en Haute Égypte, et son influence sur le jeune Champollion jusqu'au fameux déchiffrement à partir de la pierre de Rosette reçue en août en 1799 au Caire par le secrétaire qu'il était de l'Institut d'Égypte. Le plus grave peut-être a été d'accréditer la thèse qui plaît trop aux partisans de l'uni-disciplinaire : Fourier aurait regretté de s'être laissé distraire par moments d'une vie qui aurait dû être toute consacrée à la science. Et certains vont jusqu'à ranger les seules mathématiques sous le mot science [1]. Ne manquent pourtant pas les matériaux d'archives sans lesquels toute histoire est bancale : il y a des dizaines de volumes de ses manuscrits, et quelques inédits encore, dont ses cours à l'École polytechnique, même si l'essentiel de ce qui a permis la *Théorie analytique de la chaleur* a été publié par Ivor Grattan-Guinness en 1972, et une correspondance scientifique fut rendue disponible par John Herivel en 1980. Ce sont deux Britanniques, faut-il ici souligner, car les Français ont été bien plus modestes en dehors des éloges académiques comme celui d'Arago, publié en 1831, repris en 1854. Le très regretté Jean-Pierre Kahane avait bien raison de parler d'un « retour de Fourier » à la fin du xx^{e} siècle ; je préfère toutefois mettre un pluriel pour évoquer

1. Ainsi Emmanuel Kant assurait en 1786 dans ses *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* (*Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*) qu'il n'y avait à proprement parler de science qu'en autant elle serait mise en mathématiques.

des retours [2]. Car si sa théorie analytique ne passa pas inaperçue de quelques-uns en 1807, la publication en 1822 constitue un retour sur la scène de la renommée, sanctionnée cette même année par son accession au poste prestigieux de secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences. On peut de même constater des dizaines d'années plus tard qu'il y a eu retour sur la scène mathématique lorsque Hilbert nomma les coefficients de Fourier généralisés à propos des espaces de fonctions L^2 au début du xxe siècle, ou encore von Neumann en 1932 pour les espaces devenus par lui espaces de Hilbert dans les *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Fait donc contraste le fait qu'au xixe siècle ce furent surtout les physiciens, acousticiens notamment, qui célébraient Fourier. Est symbolique le fait que la publication des *Œuvres de Fourier* sous la direction de Gaston Darboux à partir de 1888 signale bien plus une défiance envers les façons mathématiques de Fourier que son sens de l'invention. Le retour sera dû à Henri Lebesgue et ses *Leçons sur les séries trigonométriques* de 1906 faisant usage de l'intégrale éponyme qui permettait une bonne notion de convergence. Retour encore lorsque l'on crédite aujourd'hui Fourier de la découverte de l'effet de serre, non par expérimentation, mais par déduction en raison de sa façon de procéder pour l'étude des solutions de l'équation de la chaleur dans une sphère et un environnement atmosphérique. Preuve encore de vitalité, les retours aussi bien sont discutés, notamment avec la théorie des ondelettes que quelques auteurs, comme Yves Meyer, font à nouveau pencher vers la physique. Enfin, un retour est rarement signalé. Fourier, qui a été célébré par Auguste Comte en 1830 comme le savant mettant en œuvre le positivisme, ne perd pas aujourd'hui sa place en épistémologie, malgré une critique [3] qui ne fut pas quelconque par le philosophe Gaston Bachelard en 1928.

Mon objectif et mes précautions

Il n'est pas dans mon intention, dans la *Gazette*, de revenir sur cette vie qui a même eu les honneurs d'une bd, et peut-être verra un film, ni d'ailleurs de reprendre en détail son œuvre de physique mathématique, même si tous les mathématiciens disent sans aucune gêne que Fourier est à l'origine des séries et des intégrales éponymes, sans oser affirmer qu'il les a vraiment inventées, ni d'ailleurs savoir préciser quand une telle dénomination s'est installée. Autant d'emblée reprendre ici une conclusion dressée par Fourier pour une fonction 2π-périodique dans la table des matières de sa *Théorie analytique* de 1822 (§231-233), qui ne surprendra un lecteur d'aujourd'hui que si je précise que Fourier est effectivement l'inventeur de la notation des bornes d'intégration.



231-233. Une fonction quelconque $F(x)$ peut être développée sous cette forme :

$$F(x) = A + \begin{cases} a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x + \dots \\ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + \dots \end{cases}$$

Chacun des coefficients est une intégrale définie. On a en général

$$2\pi A = \int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx, \qquad \pi a_i = \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \cos ix\,dx, \qquad \pi b_i = \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \sin ix\,dx.$$

On forme ainsi ce théorème général, qui est un des éléments principaux de notre analyse :

$$2\pi F(x) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \left(\cos ix \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \cos i\alpha\,d\alpha + \sin ix \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \sin i\alpha\,d\alpha \right)$$

ou

$$2\pi F(x) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \cos i(x-\alpha)\,d\alpha \dots\dots\dots\dots\dots \quad 224$$

2. Pour éviter autant que possible les notes, j'ai placé en fin de texte une bibliographie commentée sur la *Théorie analytique*. Les phrases de Fourier sont toutes référées, même pour les documents manuscrits. En dehors de notes précises de référence, je n'ai pas donné de commentaire bibliographique tant sur d'autres sujets scientifiques que sur des considérations philosophiques.

3. Gaston Bachelard soutenait comme seconde thèse pour le doctorat de philosophie une *Étude sur l'évolution d'un problème de physique. La propagation thermique dans les solides*, publiée par Vrin en 1928, dans lequel s'il donnait une grande place à Fourier et à sa célébration par Auguste Comte, n'en faisait pas moins ressortir l'insuffisance physique de cette mathématisation, ne tenant pas compte de la non-isotropie par exemple des matériaux dans lesquels se déploie la chaleur.

Beaucoup savent aussi que ces séries et intégrales sont venues à l'occasion d'un problème que Fourier dénommait propagation de la chaleur et qu'il gérait par au moins une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, et que la physique actuelle rassemble sous la dénomination plus générale de phénomènes de diffusion. La désignation mathématique reste tributaire de cette origine physique puisque l'on parle d'équation de la chaleur.

Mon article se veut donc placé sous le signe du bicentenaire de la publication de la *Théorie analytique de la chaleur*, et sur un retour au moins bidisciplinaire, puisque dans le titre de l'ouvrage l'expression « théorie analytique » fait se combiner les mathématiques à la chaleur qui indique la physique. Je devais certes parler en premier d'une invention particulière de Fourier, celle du flux de chaleur au travers d'une surface infinitésimale, et son expression en dérivée partielle par rapport au temps de la température. Je ne le ferai pas, me contentant de citer en bibliographie quelques références. Car j'ai un objectif dont les épistémologues et les historiens se méfient en général, habités qu'ils sont par une idée de progrès linéaire, mais que les historiens de l'art sont plus habiles à faire vivre : j'entends parler de ce dont Joseph Fourier estimait être le garant, et c'est ce que j'appelle son offre scientifique. Si je protège ainsi l'histoire contrastée de la postérité de Fourier, compte tenu de la place accordée aux idées du savant, je circonscris mon propos et ne vais parler que de son offre en analyse mathématique, tout en soulignant que dans cette offre il serait malvenu de ne pas inclure de la physique. Ce double jeu est un défi auquel je réponds en discutant le rôle original donné par Fourier à une démarche de type expérimental. En parlant d'offre, un terme inhabituel en histoire des sciences, je ne vise pas sa possible vision globale des mathématiques pratiques au sens où Comte l'entendrait, ou l'exhaustivité d'un parcours de ses démonstrations ou tentatives, qu'elles soient réussies ou non. Je ne cherche pas nécessairement à dire ce qui ferait de Fourier notre contemporain, mais plutôt à dire ce en quoi il différait de ses contemporains, qui n'étaient certes pas de petites pointures, comme ses aînés Lagrange ou Laplace, mais aussi bien de plus jeunes comme Cauchy et Gauss. C'est aussi en cela que je peux parler d'offre. Comme avec de telles comparaisons on se débarrasse difficilement de biais quelquefois nationalistes, ou tout simplement d'empathie, et de jugements de valeur qui font l'histoire sanctionnée comme le dit si bien Gaston Bachelard [4], je précise encore quelques-unes de mes précautions dans le présent article qui se veut aussi peu technique que possible, quoique en étant précis. D'abord, alors que j'ai passé beaucoup de temps ces dernières années avec les textes et les manuscrits de Fourier, je ne prétends pas que ce que je tente d'expliquer aussi clairement que possible se déduise *ipso facto* de tous ses écrits ; ce qui est ma propre construction provient d'une certaine manière que je vois se dessiner dans quelques entreprises de Fourier. Je ne pourrais donc détailler, et étayer en citant précisément Fourier, que quelques points seulement. Ensuite, je ne prétends pas donner une genèse de sa pensée, tant je suis sûr que ses manuscrits, si souvent raturés, ne sont pas d'une seule venue et que si Fourier prétend donner l'histoire de sa pensée, c'est au sens d'une histoire rationalisée, pas trop éloignée de ce que dit Bachelard, à ceci près que Fourier se sert de son récit pour inventer. Il n'hésite donc pas à répéter des choses qu'il peut juger *a posteriori* comme redondantes ou constituant d'inutiles détours. L'aspect littéraire des écrits de Fourier est indéniable, qui est un contemporain de Stendhal, mais aussi de Laplace qui fut comme Fourier de l'Académie française. Fourier, il faut aussi le dire, a la fibre philosophique et il n'a pas hésité à citer favorablement Aristote, auteur peu prisé au temps des Lumières, dans sa première publication portant sur la démonstration du principe des vitesses virtuelles. Enfin, en signalant d'autres mathématiciens, je ne peux pas entrer dans une analyse profonde, mais vais utiliser des conflits avérés de Fourier, avec Lagrange, et avec Poisson. Il y en a de plus feutrés avec Laplace, comme avec Gaspard Riche de Prony, mais les évoquer en détail prendrait trop de temps. Même si, paradoxalement, je dois tenir compte d'un double fait social : Fourier fut lié à un nombre considérable de personnages de son temps de tous bords, dont des militaires pour cet homme éminemment civil, sans pour autant perdre sa représentation d'esprit issu des Lumières et portant, sans nostalgie toutefois mais avec un sens de l'histoire et des situations, une militance révolutionnaire, notamment dans le domaine religieux par lequel il débuta. Le confirment ses élections faciles à l'Académie des sciences et à l'Académie française

4. L'épistémologue Gaston Bachelard constate que l'histoire des sciences ne saurait être neutre, devant en effet tenir compte du progrès : le résultat est ce qu'il appelle l'histoire sanctionnée ou jugée. Il l'explique notamment avec force dans son livre *L'engagement rationaliste* dont une édition est parue aux PUF en 1972.

où il y avait un monde réactionnaire, qui permet de comprendre l'opposition première de Louis XVIII à l'élection à la première académie citée, ou les moqueries d'un Chateaubriand comme celles d'un jeune Victor Hugo sur « l'algébriste » qui mépriserait la sensibilité humaine sur les choses selon le vieil argument anti-mathématique. Ce qui ne manque pas de sel pour quelqu'un qui fut à part égale un physicien proche de l'expérimentation. Bref Fourier colle à la société de son temps [5], et sait parler à beaucoup jusqu'à la parodie quelquefois un peu solennelle, sans pourtant perdre son originalité et un ton de jovialité.

Les conséquences de l'expérience de pensée de la lame

Ayant listé ce qui peut paraître comme des excuses à ne pas être plus disert, je peux aller à l'essentiel que je nomme comme une « expérience de pensée », en francisant l'expression (*Denkexperiment*) que l'épistémologue et médecin Ludwick Fleck adoptait sans trop de succès dans les années 1930, et qui a occupé les historiens et philosophes des sciences autour de l'idée de révolution scientifique depuis qu'on l'a repérée chez un auteur comme Galilée. Elle constitue une sorte d'imagination inventive, pour laquelle l'expérimentation pratique n'est pas possible, mais est pourtant susceptible d'un calcul. C'est une mathématisation qui n'est pas une modélisation ; c'est une machinerie intellectuelle destinée, si possible, à fabriquer des concepts. Il s'agit pour Fourier de trouver les répartitions convenables de la température à la base d'une lame métallique placée verticalement et dont l'épaisseur ne joue pas, infinie en longueur, parvenue à un équilibre thermique lorsque les côtés verticaux sont maintenus à une température constante nulle, qui reproduisent de façon homothétique au long de toute cette lame les valeurs de température de la base. De cette expérience de pensée, Fourier a déduit une conséquence physique majeure : la chaleur se propage selon une combinaison linéaire infinie de ce qu'il désigne comme des « modes propres », justement les répartitions qu'il a trouvées au terme de l'expérience de pensée de la lame. Autant le citer dès 1807, lorsqu'il exprime avec netteté la réalité et donc l'existence physique de ces modes : ils ne sont pas le résultat abstrait d'un exercice mathématique auquel ils resteraient attachés, offrent certes aux mathématiques un nouveau sujet d'extension, mais ont une signification phénoménale qui est d'exprimer sinon la nature même de la chaleur, du moins sa forme, et du coup ce à quoi elle peut être analogue, non par intuition ou décret, mais par preuve scientifique. Sa description reste d'abord liée à la lame.

> La chaleur se meut uniformément par ondes perpendiculaires à la longueur de la lame, et en même temps par ondes parallèles à cette longueur. Les premières parcourent toute la lame en s'éloignant du foyer. Les ondes parallèles aux côtés s'éloignent de part et d'autre du milieu de la lame, en sorte que les deux dernières d'entre elles se perdent de chaque côté dans les corps environnants. [6]

Tel devient le « moteur » du chapitre III de la *Théorie analytique* de 1822, et il court de la page 141 jusqu'à la page 238, où elle est finalement résolue en quelques lignes. Nous fixons dans le marbre de l'histoire des sciences ce que je viens de présenter succinctement comme étant la découverte des séries de Fourier, décrite ci-dessus avec l'extrait en premier de la *Théorie analytique de la chaleur* ; il ne s'agit surtout pas de le nier, mais de saisir comment l'adjectif « propre », associé à « mode », donc à une façon d'être, peut avoir modifié l'ontologie savante, et les rapports de la science mathématique aux sciences de la nature comme on disait à son époque. Je veux tout de suite dire l'opposition ferme de Poisson, qui ne diminuera jamais, à cette idée d'un aspect « naturel » des modes propres. Censé « présenter au public » les travaux de Fourier, travaillant donc à partir du long mémoire manuscrit de Fourier déposé à l'Institut fin 1807, dans un article qui paraît dès mars 1808, Poisson donne une large part à cette démarche pour la critiquer. Il en

5. C'est ici que je dois donner un minimum de références pour justement parler de l'esprit d'un temps, en liaison avec les mathématiques. J'en choisis trois seulement : Jean et Nicole Dhombres, *Naissance d'un nouveau pouvoir, sciences et savants en France (1793-1824)*, Payot, 1989 ; Ivor Grattan-Guinness, *Convolutions in French Mathematics : 1800-1840. From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics*, Bâle, Birkhaüser Verlag, 1990 ; Christian Gilain et Alexandre Guilbaud, *Sciences mathématiques 1750-1850. Continuités et ruptures*, cnrs Éditions, 2015.

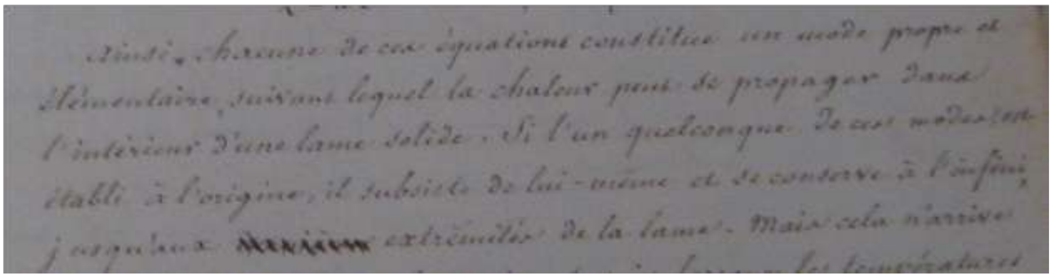
6. Cela se trouve au folio 84 du Ms 1851 des archives de l'École des Ponts et Chaussées, et à la page 180 de l'édition commentée du manuscrit de 1807 par Grattan-Guinness et Ravetz sortie en 1972. Voir en fin d'article les orientations bibliographiques pour plus de détail.

parle comme d'une « hypothèse purement mathématique qui ne saurait avoir lieu dans la nature »[7], et il assure que lui-même peut bien mieux rendre compte des « procédés d'Analyse » employés par Fourier en se débarrassant de cette fiction. Il a pourtant compris la façon mathématique dont Fourier s'y prend sur ce problème, mais n'a pas saisi l'enjeu de science, à savoir comment le concept que Fourier appelle d'abord les « modes simples », est celui qui lui permet de parler d'un phénomène ondulatoire et dissipatif. Fourier qualifie lui-même sa « question » sur la lame : elle est « en quelque sorte rationnelle, puisqu'on n'a point égard à l'épaisseur de la lame et à la déperdition de la chaleur qui s'opère à la surface » (c'est au folio 85 de ce manuscrit) : telle est sa manière d'évoquer une « expérience de pensée », mais aussi une façon de donner à la qualification analytique de sa théorie son poids de véritable construction, s'opposant frontalement à la conception kantienne d'une intuition synthétique *a priori*[8]. Dans le même mouvement – un geste épistémologique fort, – il affirme la réalité de ces modes, qui est un garant de vérité de type aristotélicien. En 1822, expression ultime de son long travail sur la chaleur, Fourier commente encore la forme des solutions obtenues en termes trigonométriques dans le cas paradigmatique de la lame : elles sont, dit-il, « nécessaires », et c'est bien un vocabulaire aristotélicien (en son §191). Pour les désigner, avec la lame repérée par des axes en x et en y, les y étant mis en horizontale, et les x positifs désignant la partie verticale de la lame, les « modes simples » de la chaleur apparaissent comme le produit d'une exponentielle décroissante par un sinus.

> On voit donc que les valeurs particulières
>
> $$ae^{x}\cos y, be^{-3x}\cos 3y, ce^{-5x}\cos 5y, \cdots$$
>
> prennent leur origine dans la question physique elle-même et ont une relation nécessaire avec les phénomènes de la chaleur. Chacune d'elle exprime un mode simple suivant lequel la chaleur s'établit et se propage dans la lame rectangulaire, dont les côtés infinis conservent une température constante. Le système général des températures se compose toujours d'une multitude de systèmes simples, et l'expression de leur somme n'a d'arbitraire que les coefficients $a, b, c, d, \ldots$ (p. 172 de l'édition dans les Œuvres, au tome I, §191)

En 1807, sans dessiner de figure, il avait décidé de les appeler « modes propres », un nom destiné à une grande postérité, trop rarement attribuée à Fourier et que nous continuons de mettre entre guillemets pour bien lui en garder la paternité. Lui-même explique en 1807 la raison de ce vocabulaire.

> Ainsi chacune de ces équations constitue un mode propre ou élémentaire, suivant lequel la chaleur peut se propager dans l'intérieur d'une lame solide. Si l'un quelconque de ces modes est établi à l'origine, il subsiste de lui-même et se conserve à l'infini, jusqu'aux extrémités de la lame (p. 65, correspondant au n° 37, et p. 143 de l'édition imprimée du manuscrit).

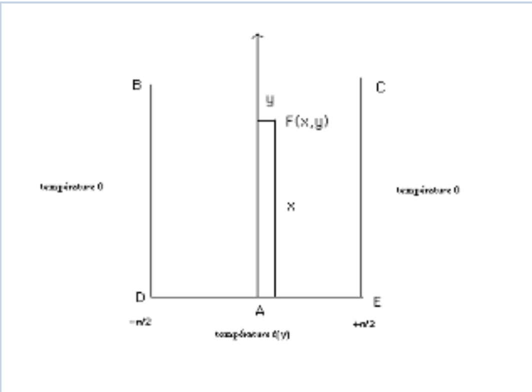

Ainsi, chacune de ces équations constitue un mode propre et élémentaire suivant lequel la chaleur peut se propager dans l'intérieur d'une lame solide. Si l'un quelconque de ces modes est établi à l'origine, il subsiste de lui-même et se conserve à l'infini, jusqu'aux extrémités de la lame. Mais cela n'arrive

7. La critique en quatre pages de Poisson, sortie en mars 1808 avant toute publication de Fourier, est reproduite au deuxième et dernier tome de *Œuvres de Fourier*, p. 213-221.

8. Le philosophe Emmanuel Kant, dont Fourier a pu avoir un aperçu de la théorie de la connaissance, a inventé un type de jugement qui n'est ni analytique, ni *a posteriori* en raison de l'expérimentation, mais bien synthétique et *a priori*, faisant jouer l'intuition pure. Celle-ci ne peut pas rendre compte de l'expérience de pensée de la lame.

La mise en équations de la lame

Si j'ai listé des conséquences, on ne peut comprendre le calcul fait sans entrer dans une des figurations que cet analyste assumé donne avec parcimonie. Elle est la figure 7 au §163 de la *Théorie analytique* dans la version de 1822, reprise ci-après avec quelques ajouts de repérage. Fourier envisage la traversée d'une lame rectangulaire $BDEC$ par la chaleur venant par DE : le problème est mathématiquement plan, réglé par deux variables d'espace seulement, x et y, puisque l'épaisseur est omise. La physique ne peut pas imaginer une barre de profondeur suffisamment grande dont les deux côtés latéraux BD et CE seraient maintenus à une température fixe, car il faudrait dire le comportement de la chaleur dans cette épaisseur et il faut donc cette absence de profondeur ; par ailleurs la température de la glace fondante est choisie par Fourier pour faire l'image d'un bloc isolant la lame plane, au point de faire disparaître l'inévitable dilatation que cette lame devrait normalement éprouver si elle était réelle. L'impossible rigidité physique de la lame est un incontournable de sa manière de faire, mais le 0° de la glace fondante va prendre une valeur mathématique, car liée à l'unicité d'une solution. Le jeu sur le zéro mathématique et le zéro physique est un des ingrédients de la fiction imaginée par Fourier. Une autre fiction va être l'idée d'un régime permanent, au bout d'un certain temps, donc la conception d'une unique solution.



Par contraste avec la coercition latérale, en bas de la lame règne la liberté d'imagination de l'expérimentateur mathématicien : imposer une fonction numérique quelconque, c'est-à-dire une ordonnance de valeurs sur l'intervalle DE, mais sur cet intervalle seulement parcouru par la variable y, donc une fonction numérique $f(y)$. Courant selon l'arête médiane orientée de la lame, la variable x mesure l'éloignement à la source de chaleur. Fourier est sans doute le premier auteur à insister sur le domaine de définition d'une fonction, donc à restreindre le concept même à la donnée d'un domaine. Le choix des bornes en D et E, avec l'intervention du nombre π est une facilité de mathématicien pour l'expression des « modes propres », mais il n'y aurait aucune difficulté à prendre à la place une longueur quelconque. Il faut noter les deux conditions aux limites portant sur y (limitation à l'intervalle entre $-\pi/2$ et $\pi/2$) et sur x (limitation aux valeurs positives). Parce que cela correspond à une étape de l'analyse, le temps n'intervient pas : le régime est présupposé permanent ; une stationnarité de la température est établie entre le moufle de glace entourant la lame, et la donne d'une répartition chauffante à sa base qui est fournie par la fonction f. On remarquera combien le vocabulaire physique s'impose alors même que la lame est une fiction. La température en tout point de la lame est ainsi une fonction F des seules variables d'espace, x et y : elle est l'inconnue et l'objet qui est recherché est d'avance nommé comme en toute bonne analyse. Pour la déterminer, Fourier établit par la pensée, sans calcul, une relation entre ces deux fonctions, la fonction $f(y)$ en bas de lame qui est le donné, et la fonction $F(x,y)$ qui est la température dans la lame. La relation entre f et F existe physiquement – un seul régime s'établit en effet et il y a d'ailleurs une sorte de démonstration physique de cette unicité par Fourier. La démonstration remonte au modèle physique des échanges de chaleur entre « molécules ». Une démonstration analytique de cette unicité, dans ces conditions aux limites, sera donnée après la disparition de Fourier, faisant jouer le carré de la température, à titre d'analogue d'une énergie. Mais, pour les mathématiques, Fourier n'avance pas une preuve d'unicité ; elle serait redondante avec celle de la physique. C'est signaler encore qu'il ne pense pas en termes de déduction axiomatique : il expérimente. Grâce à ce qu'il a établi avec le flux et l'analyse de la propagation de la chaleur, à l'intérieur de la lame, la fonction F est tout à la fois solution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre qui se trouve être la nullité du laplacien, à savoir

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

De façon symptomatique toutes les constantes physiques de conduction ou de nature du matériau solide ont disparu ! Une solution pour la lame vérifie en plus les trois conditions suivantes, pour tout $x > 0$, et pour y strictement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

$$F(x,-\frac{\pi}{2})-F(x,+\frac{\pi}{2})=0$$

$$F(0,y)=f(y), \lim F(x,y)=0 \quad \text{lorsque } \lim x=\infty.$$

L'association indissoluble des conditions aux limites à l'équation même du laplacien est une des innovations de Fourier, et elle lui a facilité l'appréhension de la correspondance de f à F. Du même coup, Fourier contribue à la transformation en cours, initiée par la controverse des cordes vibrantes, du concept de fonction numérique [9]. Ceci participe bien sûr de la constitution de l'Analyse. Que Fourier y contribue n'est pas un hasard : cela fait partie de son projet scientifique comme l'explicitera admirablement le *Discours préliminaire* à la Théorie analytique de 1822. Mais son Analyse ne se limite pas au Calcul différentiel et intégral et à la sommation des séries, pas plus qu'aux fonctions continues : nous ne tarderons pas à le voir faire appel aux fonctions « arbitraires ». Un « mode propre » est alors une fonction numérique f, température mise à la base de la lame, qui redonne la même fonction, à un facteur multiplicatif près, comme trace de F sur un segment horizontal quelconque. Ainsi, si l'on pose $\cos 11y$ pour la fonction $f(y)$, pour les valeurs de y entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (en inégalités non strictes), l'expression de $F(x,y)$ devient égale à $\lambda f(y)=\lambda\cos 11y$, où $\lambda=e^{-11x}$. On aura compris que les bornes de l'intervalle sur lequel f est définie en y ont été choisies de manière à faire aisément paraître les cosinus pour des valeurs impaires de l'entier multiple de y. Ce cosinus est bien un « mode propre » : le caractère oscillant de la fonction f est exactement maintenu pour F en la variable y. Mais Fourier ne présente pas les choses ainsi : la nature de sa démarche est en quelque sorte de tenter des coups, ou d'expérimenter avec les mathématiques, pour en tirer non pas une conséquence logiquement établie, mais une propriété structurelle. Voici sa manière de fonctionner, qui permet le passage de « modes simples », qui sont juste une astuce de calcul, aux « modes propres » qui ont valeur de réalité, ou de naturalité.

D'un calcul astucieux à la lame comme opérateur fonctionnel

On dispose, de la main même de Fourier (alors que nombre de ses manuscrits ont été remis au propre par un copiste) du calcul qu'il fait pour obtenir des solutions particulières du laplacien dans le cas de la lame (manuscrit de 1807, folio 60, et p. 137 de la version imprimée). Il déclare chercher d'abord les « fonctions de x et y les plus simples » satisfaisant à la nullité du laplacien de la fonction z, la température en un point de la lame, ce qui était noté plus haut $F(x,y)$. Cette simplicité ici consiste à prendre un produit $z(x,y)=F(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$, et selon un procédé bien connu au XVIIIe siècle avec D'Alembert notamment pour l'équation des cordes vibrantes, obtient une séparation des variables, c'est-à-dire met d'un côté ce qui dépend de la variable x et ce qui dépend de la variable y quand on prend les dérivées partielles du second ordre en x et en y.

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi''(x)}+\frac{\psi(x)}{\psi''(x)}=0$$

De sorte que chacun des quotients de la fonction par sa dérivée seconde en chaque variable est une constante, respectivement écrite A et $-A$. Comme la fonction paire ψ en y doit s'annuler deux fois, en $\pm\pi/2$, la constante A doit être strictement positive, et les seules possibilités pour ψ sont $\cos(2n+1)x$, pour tous les nombres entiers n, dont l'entier nul. Le comportement supposé pour les grandes valeurs de x de la température donnée par la fonction f en x, limite celle-ci aux exponentielles décroissantes, l'aspect dissipatif. Ce qui donne dès lors les formes dites précédemment « modes propres » pairs :

$$e^{-(2n+1)x}\cos(2n+1)y$$

On a des ondes en la variable y, tandis que l'aspect dissipatif en x est effectivement lisible sur les fonctions exponentielles. On ne pouvait pas prévoir ce résultat du calcul, mais on peut maintenant, et Fourier n'y manque pas, interpréter la diffusion thermique à l'aide de ces « modes propres ». Il appelle cela la « route de la chaleur », et c'est bien cela qui justifie le qualificatif « propre ». À très peu près la description sera la même en 1822, et mérite d'être lue comme la première découverte de Fourier (*Théorie analytique*, édition de 1822, p. 166-167).

9. En 1747, Jean D'Alembert établit l'équation des ondes qui permet de traiter le mouvement d'une corde tenue en deux extrémités, mais se trouve embarrassé par le fait d'avoir à construire une fonction définie sur tout l'axe réel ayant certaines propriétés à partir d'un donné bien plus limité, et aboutit à un empêchement général, auquel Euler répond aussitôt. Ainsi fut lancée la question des cordes vibrantes. Un traitement ancien, assez biaisé, est dû à Clifford A. Truesdell, *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638-1788*, vol. 11 des *Opera* de Leonhard Euler, Zurich, 1960, et la discussion se poursuit de nos jours, et déjà dans le livre de Grattan-Guinness précédemment mentionné.

ainsi de suite, et l'équation de la surface courbe sera

$$v = a\,e^{-x}.\cos.\,y.$$

Si l'on coupe cette surface perpendiculairement à l'axe des y, on aura une logarithmique dont la convexité est tournée vers l'axe ; si on la coupe perpendiculairement à l'axe des x, on aura une courbe trigonométrique qui tourne sa concavité vers l'axe. Il suit de là que la fonction $\frac{d^2 v}{dx^2}$ a toujours une valeur positive, et que celle de $\frac{d^2 v}{dy^2}$ est toujours négative. Or la quantité de chaleur qu'une molécule acquiert à raison de sa place entre deux autres dans le sens des x, est proportionnelle à la valeur de $\frac{d^2 v}{dx^2}$. (art. 123); il s'ensuit donc que la molécule intermédiaire reçoit de celle qui la précède, dans le sens des x, plus de chaleur qu'elle n'en communique à celle qui la suit. Mais, si l'on considère cette même molécule comme placée entre deux autres dans le sens des y, la fonction $\frac{d^2 v}{dy^2}$ étant négative, on voit que la molécule intermédiaire communique à celle qui la suit plus de chaleur qu'elle n'en reçoit de celle qui la précède. Il arrive ainsi que l'excédent de chaleur qu'elle acquiert dans le sens des x, compense exactement ce qu'elle perd dans le sens des y, comme l'exprime l'équa-

CHAPITRE III. 167

tion $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$. On connaît ainsi la route que suit la chaleur qui sort du foyer A. Elle se propage dans le sens des x, et en même temps elle se décompose en deux parties, dont l'une se dirige vers une des arêtes, tandis que l'autre partie continue de s'éloigner de l'origine, pour être décomposée comme la précédente et ainsi de suite à l'infini. La surface que nous considérons est engendrée par la courbe trigonométrique, qui répond à la base A, et se meut perpendiculairement à l'axe des x en suivant cet axe, pendant que chacune de ses ordonnées décroît à l'infini, proportionnellement aux puissances successives d'une même fraction.

Fourier a évité l'autre famille, les $\sin 2ky$, avec k entier, en imposant la parité de f sur la base DE. Fourier l'exprime sous une forme de symétrie, comme si la fonction f faisait partie de la lame : « On supposera que la lame est partagée en deux parties égales par l'axe des x. » La lame, en vue de cette conception des « modes propres », reste l'intermédiaire de la correspondance entre f et F ; elle n'est pas seulement objectivée par une équation, elle est une forme géométrique. Comme on constate que la transformation qui fait passer de f à F, que l'on peut noter $F = P(f)$, est linéaire, on voit que les « modes propres » en f sont les fonctions f telles que $P(f)$, fonction à deux variables, est un multiple de f. Ce multiple est bien une fonction de x. En général, si l'on pose $f(y) = \cos(2n+1)y$, il vient $F(x,y) = \lambda f(y)$, avec le coefficient qui est une fonction de x :

$$e^{-(2n+1)x}.$$

L'interprétation change d'un coup car la simplicité n'est pas seulement une facilité de calcul déjà bien connue de ceux s'occupant des équations aux dérivées partielles : elle prend un sens physique, que porte le mode propre et que nous écrivons comme la résolution de $P(f) = \lambda f$. Tous ceux qui ont étudié l'algèbre linéaire, et les matrices, auront reconnu dans ce coefficient qui sert de multiple la notion de valeur propre, et dans les f, sous forme de cosinus, les vecteurs propres correspondants. Mais Fourier ne dispose pas de ces résultats désormais classiques d'algèbre linéaire, encore moins des espaces vectoriels de dimension finie auxquels cette algèbre fut d'abord restreinte : elle ne sera véritablement étendue aux espaces de dimension infinie qu'au début du XX^e siècle, créant alors l'Analyse fonctionnelle. On peut aussi signaler le lien avec les problèmes de Sturm-Liouville[10], venus à partir de 1836, pour lesquels le λ apparaît comme un ajout « gratuit » du mathématicien, alors qu'ici le λ, le caractère propre, est recherché en soi. Le propre tient à la chaleur bien sûr, mais aussi à la géométrie de la lame où cette chaleur se déploie. De ce fait, l'expérience impraticable de la lame dresse un projet d'envergure : estimer les modes propres dans d'autres circonstances géométriques comme une sphère, un cylindre, voire un demi-plan qui conduira plus tard à l'intégrale de Fourier. Tel devient le plan de la *Théorie analytique*, liant inéluctablement physique et géométrie analytique. On ne peut pas ici à proprement parler évoquer une offre de Fourier, puisque son livre détaille longuement les différents corps dans lesquels la chaleur se déploie, refaisant à chaque fois des calculs, comme s'il s'agissait à chaque fois de faire une expérience. Mais c'est en cela qu'il y a offre et non simple répétition : il s'agit d'inventer à chaque fois les modes propres, propres à la géométrie en jeu, en se servant des cas qui ont précédé. Autrement dit, mon compte-rendu de la fiction de la lame n'a pas été suffisamment loin : j'ai réduit l'aventure dès que j'ai trouvé ce qui paraissait mener aux séries dites de Fourier.

Il faut dépasser la limitation de la base de la lame

Pour Fourier, le caractère propre n'est pas encore complètement prouvé, car il sous-entend bien plus : les « modes propres », caractéristiques de la forme de la lame, doivent de surcroît permettre de reconstituer par addition toute fonction « arbitraire » f qui serait donnée à la base, et donc toute répartition de température (présupposée paire à ce stade, et nulle en $\pm\pi/2$). Or, en effectuant le calcul des modes propres, on n'a pas suffisamment fait attention à un point qui n'est pas d'apparence mineure : les fonctions solutions de $P(f) = \lambda f$, qui donnent la liaison de f avec F, et servent à la base, ne sont pas définies seulement sur l'intervalle d'amplitude π de cette base, qui est leur raison physique d'être, mais le calcul a prouvé qu'elles sont définies partout, sur tout l'axe réel, et de période 2π. Autrement dit, puisqu'il y a une infinité d'entiers impairs, pour répartir dans la lame une température paire donnée f à la base, on peut imaginer que la nature agirait comme s'il y avait une infinité de lames, chacune indexée par un entier impair, qu'elle superposerait pour qu'au total ce soit la somme de tous les $F_n(x,y) = e^{-(2n+1)x}\cos(2n+1)y$ qui donne la température effective de la lame. À condition toutefois de faire intervenir chaque fois un coefficient numérique convenable devant ces fonctions F_n particulières, ou états propres indexés par les entiers impairs $2n+1$ depuis l'entier 1. Le renversement de la recherche est alors brutal, puisque c'est par

10. Sur certaines équations différentielles linéaires du second ordre, généralisant l'équation des vibrations dont les solutions sont des sinus et des cosinus, et pour des conditions aux limites qui font intervenir deux points et non seulement un seul comme dans le cas de Cauchy, les mathématiciens Sturm et Liouville ont développé à partir de 1836 une théorie où intervient la notion de valeur propre, qui comme la théorie des séries de Fourier, trouve le cadre théorique *ad hoc* au XX^e siècle avec les espaces de Hilbert et leurs bases. Voir une publication récente : Vladislav Kravchenko, *Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems : A Method of Solution*, Birkhäuser, 2020. Voir aussi : Jean Dhombres, « Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonctions », Archive for History of Exact Sciences, vol. 36, n° 2, 1986, p. 91-181.

la possibilité même d'un calcul de ces coefficients qu'il y va y avoir analyse de la fonction f, alors que celle-ci pouvait apparaître comme une synthèse, le résultat d'une somme infinie. Pour Fourier, ces coefficients (qui portent aujourd'hui son nom et assurent sa célébrité mondiale), existent nécessairement, et ne doivent dépendre que de la fonction f. Voici comment Fourier s'exprime en 1807, mêlant volontairement un vocabulaire physique à une expression mathématique, tout en employant les mots surprenants de « conception », ou d' « imagination », alors qu'il avait à sa disposition le vieux vocabulaire d'analyse et de synthèse dont il ne veut plus car si pour lui il n'y a là qu'analyse, c'est en un sens nouveau.

> Il faut concevoir qu'il y a autant de lames solides différentes qu'il entre de termes dans l'équation de la surface générale *(note d'aujourd'hui : il s'agit de la fonction température en x et y)*, que chacune de ces tables est échauffée séparément de la même manière que s'il n'y avait qu'un seul terme dans l'équation, que toutes ces lames demeurent superposées ; enfin que les quantités de chaleur qui affectent les points correspondants sont accumulées sur un seul. Cela posé, on peut imaginer que la chaleur qui sort à chaque instant du foyer se distribue ainsi par portions distinctes, qu'elle se propage suivant une des lois élémentaires que l'on a exposées *(note d'aujourd'hui : Fourier a décrit précisément le comportement des fonctions $F_n(x,y)$, notamment du point de vue du signe)* ; et que tous ses mouvements partiels s'accomplissent à la fois sans se troubler (p. 66, correspondant au n° 37, et p. 144 de l'édition imprimée).

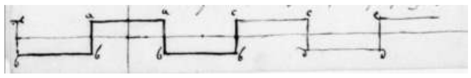
Parvenu à ce stade, il n'hésite nullement à se lancer dans le calcul des coefficients. Mais une fois de plus il le fait à titre d'une expérience à conduire. Il commence par le cas très particulier de la fonction f constante égale à 1 pour les valeurs de y strictement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. Donc il pose un problème : déterminer les constantes a, b, c, etc., telles que pour les y convenables dits ci-dessus, on ait

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d\cos 7y + \text{etc.}$$

Naturellement le membre de droite est égal à 0 pour $y = \pm\pi/2$; ce qui correspond à la température imposée aux deux côtés latéraux de la lame. Ainsi d'emblée Fourier doit abandonner la continuité de la fonction qui est imposée au bas de la lame : on la note Y ici, valant 1 strictement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, et 0 aux deux bornes $\pm\pi/2$. On a donc

$$Y = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d cos 7y + \text{etc.}$$

Mais il faut – le verbe « falloir » ici n'est pas usurpé – faire subir à Y une extension particulière. Objectivement le second membre n'est pas seulement défini sur le seul intervalle que représente la base de la lame, assurément une fonction périodique de période 2π. Mais ce n'est pas tout, car compte tenu des propriétés des modes propres, les fonctions cosinus, si le second membre vaut effectivement 1 entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, il vaut nécessairement -1 pour la variable y entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, et entre $\pi/2$ et π. Le problème posé implique donc d'envisager une nouvelle fonction, que je note encore Y, qui porte aujourd'hui le nom évocateur de fonction créneau, devenu banal pour les électroniciens ou en théorie du signal. Elle est paire, 2π-périodique, égale à 1 entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, égale à -1 entre $-\pi$ et $-\pi/2$ et entre $\pi/2$ et π, égale à 0 aux points $-\pi$, $-\pi/2$, $\pi/2$ et π. Fourier la représente dès 1806 (*Ms 22 525, folio138v*), que je reproduis ci-dessous, et il y a beaucoup à parier qu'il est le premier à le faire.



Cette seule figure est porteuse d'histoire, mais aussi de combats. Car selon la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange, livre sorti en 1797, cette courbe ne pouvait pas être une fonction : en l'occurrence la relation entre une variable et sa valeur n'était pas partout la même. Ce n'est pas rien que de s'opposer frontalement à un tel auteur, Nestor de la science européenne. Fourier reprendra ce dessin dans le manuscrit de 1807 (p. 107 bis, et p. 184 de la version imprimée), et dont la construction est généralisée dans la *Théorie analytique de la chaleur* de 1822 (correspond au n° 232, et est placée dans une planche). Dans ce dernier cas, Fourier contredit ouvertement Cauchy qui assurait qu'une série comme celle de Fourier, composée de fonctions continues, donne une somme nécessairement continue. Ce que n'est pas Y. L'offre de Fourier aux analystes est à la fois de refuser la voie algébrique de Lagrange et la voie de rigueur analytique de Cauchy. Mais pas pour les mêmes raisons. Celle de Lagrange est fausse de façon rédhibitoire car le concept de fonction y est mal défini ; celle de Cauchy est fausse par une insuffisante analyse de ce qui fait la continuité d'une fonction, bref la notion d'uniformité. Il me reste à dire ce que Fourier propose. Dans son premier manuscrit, en 1806, Fourier n'avait d'abord pas compris le jeu à mener sur la construction de la fonction Y, et encore moins ce qui faisait l'originalité des « modes propres » puisqu'ils étendent les valeurs de la fonction au-delà de ce qui était physiquement proposé à la base de la lame. C'est en particulier la preuve que sa construction n'était pas faite d'avance. On le surprend, dans le manuscrit, barrer quelques lignes écrites par un secrétaire, et de sa propre main noter le changement de signe qu'imposent les cosinus. Ce passage constructif de la *fonction créneau* est pour lui un élément décisif qui permet de parler de « mode propre ». On le présente généralement comme une facilité mathématique, mais Fourier y voit bien plus : dans la symétrie et l'extension périodique qu'il faut effectuer, il voit une imposition de la nature. Aussi brillant, et long soit son calcul des coefficients réels a, b, c, etc., tels que pour tout y réel on ait :

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d\cos 7y + \text{etc.},$$

conformément à mon programme d'explication générale, je ne vais pas le donner ici. Car Fourier a trouvé, ou repris, une remarque à laquelle il sait donner toute sa valeur physique, et qui deviendra une valeur mathématique. Il veut comprendre pourquoi un calcul si long a pu aboutir à un résultat si simple pour les valeurs des coefficients, à savoir les expressions $(-1)^n/2n+1$. On comprend donc que mon jeu de compression est loin d'être une critique de ce que fait Fourier qui prend son temps : s'il trouve un moyen de répondre à cette question de la simplicité, il aura quasi nécessairement résolu le problème général de la représentation d'une fonction f, et non seulement celui de la fonction Y.

Les « modes propres » suffisent, parce qu'ils vont jusqu'à toute fonction, et les relations d'orthogonalité sont le signe algébrique de l'indépendance des modes propres

L'affaire est réglée en bien peu de temps. Si l'on calcule en effet l'intégrale sur $-\pi < y < \pi$ du produit de deux modes propres, avec $2n+1$ et $2m+1$, on obtient 0 pour n différent de m. Pour quiconque est un peu au courant de l'intégration des fonctions trigonométriques sur une période, le calcul est quasiment évident, en linéarisant le produit des cosinus. L'interpréter comme orthogonalité en revanche est user d'un vocabulaire ultérieur ; il tient à une géométrisation de l'idée de Fourier qui se fera au début du XX^{e} siècle par David Hilbert qui l'adoptera vite avec enthousiasme, l'ayant par formalisme refusée en un premier temps. L'idée d'une indépendance des « modes propres » de la lame est présente chez Fourier en raison de leur nature même de la chaleur, et est envisagée nettement par la superposition des lames, mais elle se double de la perception que chaque mode propre intervient seul : il voit comment calculer les coefficients pour une fonction paire quelconque périodique Y et de période 2π.

$$Y(x) - \sum_{n-1}^{\infty} a_n \cos(2n+1)y. \tag{1}$$

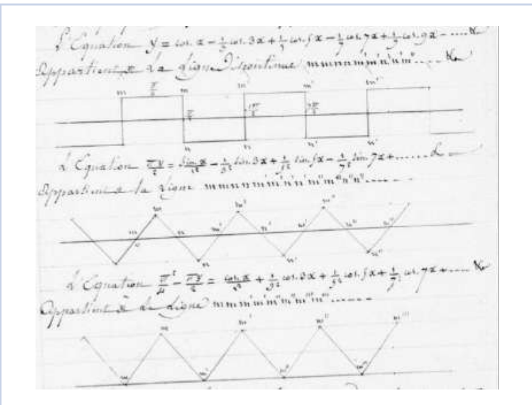
Il suffit de remarquer que le coefficient a_n se déduit du calcul de l'intégrale du produit de Y par $\cos(2n+1)y$, en effectuant le calcul de l'intégrale sur l'intervalle de longueur 2π, et sans se préoccuper du fait que l'on a une somme infinie, mais en agissant comme pouvait le faire Euler, et aussi bien Laplace, un des examinateurs du texte de Fourier :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{T} Y(y)\cos(2n+1)y\,dy. \tag{2}$$

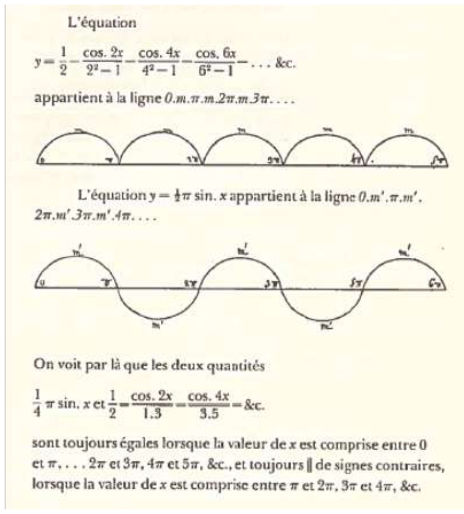
J'ai tort d'en rester aux cosinus, et dès 1806, oubliant même de préciser la périodicité 2π, Fourier dit explicitement que s'il n'est pas arrivé directement à ces relations que nous disons d'orthogonalité par « des éliminations très laborieuses »,

> ... j'emploie maintenant une règle beaucoup plus générale et très expéditive pour résoudre une fonction arbitraire quelconque en série de sinus ou de cosinus d'arcs multiples.

C'est-à-dire que le calcul explicite, celui qui est donné par (2) , l'a fait passer directement de la fonction créneau à une fonction dont il nous dit qu'elle est quelconque. La comparaison des formules (2) et (1) , leur réciprocité de fait, est ce qui est vraiment l'offre analytique de Fourier. Par (2) , on analyse la fonction périodique (paire) Y et par (1), on synthétise cette fonction. Mais on le fait par un procédé de sommation sur les entiers, que l'on pourrait bien concevoir comme une intégrale, à la manière de celle qui permet d'avoir le coefficient de Fourier. Ceux qui connaissent l'intégrale de Fourier lisent aisément la même réciprocité, celle qui redonne la fonction à partir de l'intégrale de Fourier, jusque dans les constantes. L'argument que je viens de donner sera celui utilisé par Fourier lui-même, une fois qu'il aura pris conscience de l'intérêt de l'intégrale de Fourier, ce qui ne fut pas le cas au début de son travail. Et ceux qui connaissent la théorie des caractères sur les groupes abéliens localement compacts auront reconnu le jeu sur le groupe dual, le dual du groupe additif des réels modulo 1 (le tore) étant Z, qui explique la sommation (1). Pendant longtemps, y compris dans le livre de André Weil de 1940 sur l'intégration dans les groupes topologiques, le nom de Fourier ne paraissait pas majeur dans ce qui relevait de l'analyse harmonique. J'ai déjà dit le changement en « analyse de Fourier ». Lorsque dans la gradation des solides étudiés, Fourier entame l'étude du cylindre, ce sont inévitablement les fonctions de Bessel qui s'imposent à lui comme modes propres ; leur orthogonalité est bien moins triviale, mais il ne doute pas de son existence, tant il a une vision unifiée des diverses situations. C'est le fait essentiel qui instaure la généralité : les modes propres sont présents dans tous les phénomènes de propagation de la chaleur, et à ce seul titre leur dénomination serait physiquement justifiée. Mais ils sont aussi bien les harmoniques de la théorie du son, ou de celles des marées. L'harmonique devient théorie mathématique parce qu'elle est universelle ; ce n'est pas le jeu mathématique qui lui a conféré cette qualité. Fourier a éliminé tous les intermédiaires entre pensée et monde en croisant analyse et synthèse [11]. Il me suffit ici de donner quelques exemples tirés de ses manuscrits (BnF, Ms 22 525, folio 107v), ou de la *Théorie analytique* pour vérifier que Fourier joue véritablement de la richesse de sa représentation. Je passerai ensuite à un autre sujet sur la notion de fonction.



Dans le manuscrit de 1807, on a bien l'impression que Fourier joue à multiplier les dessins de fonctions tronquées sur des intervalles pour susciter l'étonnement, et donc d'avance contrer ce qu'il pressent comme une opposition de la part des milieux parisiens (texte imprimé, p 229).



L'équation

$$y=\frac{1}{2}-\frac{\cos.2x}{2^2-1}-\frac{\cos.4x}{4^2-1}-\frac{\cos.6x}{6^2-1}-\ldots \&c.$$

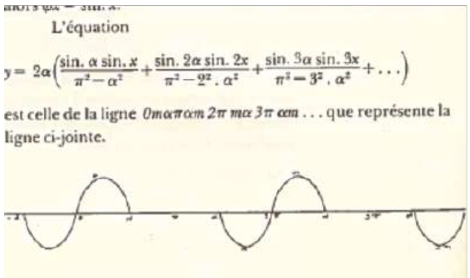
appartient à la ligne $0.m.\pi.m.2\pi.m.3\pi\ldots$

L'équation $y=\frac{1}{4}\pi\sin.x$ appartient à la ligne $0.m'.\pi.m'.2\pi.m'.3\pi.m'.4\pi\ldots$

On voit par là que les deux quantités

$$\frac{1}{4}\pi\sin.x \text{ et } \frac{1}{2}-\frac{\cos.2x}{1.3}-\frac{\cos.4x}{3.5}-\&c.$$

sont toujours égales lorsque la valeur de x est comprise entre 0 et π, ... 2π et 3π, 4π et 5π, &c., et toujours ‖ de signes contraires, lorsque la valeur de x est comprise entre π et 2π, 3π et 4π, &c.



L'équation

$$y=2\alpha\left(\frac{\sin.\alpha\sin.x}{\pi^2-\alpha^2}+\frac{\sin.2\alpha\sin.2x}{\pi^2-2^2.\alpha^2}+\frac{\sin.3\alpha\sin.3x}{\pi^2-3^2.\alpha^2}+\ldots\right)$$

est celle de la ligne $0m\alpha\pi\alpha m2\pi m\alpha 3\pi\alpha m\ldots$ que représente la ligne ci-jointe.

La culture mathématique de Fourier sur les fonctions

C'est dans une atmosphère bien particulière, par le nombre d'auditeurs et quelques chapeaux à plumes de la représentation nationale de la Convention, qu'un 1er mars 1795 – pardon un 11 ventôse an III –, l'« instituteur » et ex-académicien des sciences Laplace (1749-1827), invente une fonction qu'il ne saurait en aucun cas calculer et en déduit presque tout aussitôt ce que l'on va appeler, mais au XIXe

11. Jean Dhombres, The analysis of the synthesis of the analysis, two moments of a chiasmus, in M. Panza, M. Otte (ed.), *Analysis and Synthesis in Mathematics, History and Philosophy*, Kluwer, 1997, pp. 147-176.

siècle seulement, le « théorème fondamental de l'algèbre ». Il prouve le fait que tout polynôme à coefficients réels et de degré p non nul, possède p racines complexes, certaines pouvant être multiples. Bref, en utilisant la conjugaison dans le domaine complexe, que tout tel polynôme dont le coefficient du plus haut degré est l'unité (polynôme dit unitaire) se factorise en produits de binômes $(x+a)$ ou trinômes (x^2+ax+b) réels, où a et b sont des nombres réels. L'auditeur de cette leçon qu'est Joseph Fourier est fasciné. Il n'est pas sûr qu'il ait tout bien saisi. Mais un an plus tard, nommé professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Fourier présente ce résultat, à sa propre façon qui simplifie, mais aussi explique pour des élèves. L'affaire paraît peu maniable simplement car l'hypothèse de base est qu'il existe une racine réelle pour tout polynôme de degré impair : cette hypothèse paraît moins liée à une fonction que fondatrice de ce que serait un nombre réel, indissolublement liée à l'idée de continu. L'autre hypothèse, pensée par Descartes dès 1637 dans un de ses « essais » accompagnant le *Discours de la méthode*, est que pour tout tel polynôme P de degré p, il existe p racines (comptées selon les multiplicités), ces racines se comportant avec les nombres réels selon les seules propriétés algébriques d'un corps. Bref, en nos termes, que les racines appartiennent à un sur-corps de $\mathbb{R}$. Nous savons bien le faire, moyennant l'axiome du choix, comme Emmy Noether le prouva en établissant plus généralement l'extension à partir de polynômes sur un anneau [12]. Évidemment, il suffit de montrer que pour un polynôme unitaire P de degré pair, il existe deux racines, disons a et b, telles que $a+b$ et ab soient des nombres réels. Car, en ce cas, le trinôme réel $x^2-(a+b)x+ab$ peut être mis en facteur dans P. Une idée, due à Lagrange dans les années 1770, est d'envisager un polynôme Q, associé à P, dont toutes les racines seraient de la forme $a+b+ab$ où a et b parcourent les couples (a,b) de racines de P. Autrement dit de poser Q comme le produit de tous les binômes formellement distincts $x-(a+b+ab)$. Comme ce binôme est invariant si l'on échange a et b, il est clair par un calcul élémentaire sur les combinaisons, que le degré de Q est $q=p(p-1)/2$, lorsque p désigne le degré de P. On semble avoir perdu en simplicité sur le degré, sauf si l'on remarque la division par 2. Ainsi, si p est de la forme $2k$, avec k impair (on dit que n est impairement pair), q est nécessairement un nombre impair. Par conséquent, sous cette première hypothèse sur p, le polynôme associé Q est de degré impair ; il possède donc une racine réelle, donc de la forme $a+b+ab$ pour deux racines convenables, disons encore a et b, de P. Bref on a trouvé un cas réel pour une forme $a+b+ab$. Du moins si l'on a bien pris la précaution de montrer que Q, un polynôme unitaire, est lui aussi à coefficients réels. Or ceci provient d'un beau résultat obtenu par le même Lagrange : une forme algébrique symétrique de p quantités a, b, c, etc., s'exprime algébriquement à partir des p formes symétriques élémentaires de ces mêmes quantités. Comme chacun des coefficients de Q est une forme symétrique de p quantités, donc s'exprime algébriquement à partir des formes symétriques élémentaires de ces mêmes quantités, lesquelles ne sont autres que les coefficients de P, la réalité des coefficients de P est acquise. Fourier admire ce lien fait avec un autre de ses professeurs, Lagrange. Mais le résultat obtenu par ce dernier ne suffit pas pour la preuve cherchée. L'idée lancée par Laplace [13] en 1795 devant ses élèves de l'École normale de l'an III, est d'introduire un paramètre réel, z, et de considérer les formes $a+b+zab$. De la même façon que précédemment, il existe forcément pour chaque z une racine a, et une racine b, de P, telles que $a+b+zab$ soit un nombre réel. Une notation est d'écrire qu'on sait qu'existe pour chaque z un couple (a_z, b_z) de racines de P et $a_z+b_z+za_zb_z$ est réel. Soit l'existence d'une fonction f de la variable z et $f(z)=(a_z,b_z)$. Cette fonction est définie sur l'ensemble des z réels, à valeurs dans la famille des couples de racines de P ; mais si son existence est assurée elle n'est pas calculée. C'est effectivement une application avant la lettre de la définition d'une fonction de E dans F par Cantor, comme point du produit F^E. Mais voilà un premier théorème général utilisé sur une telle fonction : elle ne saurait être injective. Puisque la flèche va d'un ensemble infini, l'ensemble des z, à un ensemble fini, les couples de racines de P où joue le nombre p, degré de P, qui est borne supérieure du nombre de racines si on les cherche dans un corps.

12. Voir le chapitre de Emil Netto et Raymond Le Vavasseur sur le théorème fondamental, dans le volume algèbre, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Paris, Gauthier-Villars, t. I, vol. 2, fasc. 1, Les fonctions rationnelles, 1907, p. 189-205. Voir aussi, Jean Dhombres, Nationale Bedingungen mathematischer Kultur in Deutschland und Frankreich um 1900, in L. Jordan, B. Kôrtlander, *Nationale Grenzen und internationaler Austausch*, Communicatio, Bd 10, Max Niemeyer Verlag, Tübingen, 1995, pp. 312-333.

13. Leçon de Laplace du 11 ventôse an III « aux Écoles normales », leçons publiées sous forme de pamphlets en 1795, reproduit dans Jean Dhombres (dir.), *L'École normale de l'an III. Leçons de mathématiques. Laplace-Lagrange-Monge*, Paris, Dunod, 1992, désormais disponible aux Editions Rue d'Ulm, p. 79.

Ainsi, il existe deux z distincts, z' et z'', et simultanément avec $a = a_{z'} = a_{z''}$, $b = b_{z'} = b_{z''}$, les deux expressions $a_{z'}+b_{z'}+z'a_{z'}b_{z'}$ et $a_{z''}+b_{z''}+z''a_{z''}b_{z''}$, ou plutôt $a+b+z'ab$ et $a+b+z''ab$, sont des racines réelles de Q. On a obtenu ce qu'il fallait trouver, à savoir en combinant, que les combinaisons $a+b$ et ab sont réelles, et par conséquent, résultat sur le second degré, les racines a et b le sont. Si ceci a été démontré pour le seul cas de p impairement pair, le passage à un pair quelconque se fait par récurrence sur l'écriture $p = 2^l p'$, où p' est impair. Car dans ces conditions l'expression $p(p-1)/2$ a un exposant l diminué d'une unité. La seule différence avec la conduite du raisonnement dans le cas p impairement pair, est cette fois que l'on ne doit pas prendre le corps des réels, mais le corps des complexes. Ce que n'ose pas faire Laplace en 1795, qui se complique la vie en devant faire appel aux formules de Cardan sur le quatrième degré. Alors que le professeur Fourier passe aux complexes. Fourier joue effectivement son rôle de bon passeur des idées; il indique les raisons de l'impasse de la seule considération par Lagrange à se servir de la combinaison $a+b+ab$. Fourier fait comprendre l'originalité opérée par Laplace de l'introduction du paramètre z, souligne par une notation que la chose importante est de signaler que z relève d'un ensemble infini, et pour cela il le note n, comme un entier quelconque [14]. De plus il simplifie la démarche de Laplace en ce qu'il fait jouer le corps des complexes, au lieu de s'attarder sur les formules pour le quatrième degré polynomial. De fait, le cours de Fourier est pris en notes par plusieurs élèves, et je donne ici la version manuscrite qui est disponible aux archives de l'École des Ponts et Chaussées, alors que nous ne connaissons pas le scripteur [15]. L'invention de Laplace, reprise par Fourier, celle de la fonction comme existence de quelque chose, alors même qu'on ne sait pas calculer : c'est bien la définition cantorienne qui est en jeu, allant d'un objet pris dans un ensemble infini à un objet pris dans un ensemble fini. On est contraint par les textes de reconnaître que l'emploi du mot fonction par Laplace, puis par Fourier, n'est pas juste pour être dans l'air du temps à la suite d'Euler qui est un auteur que Laplace recommandait de lire attentivement. C'est parce qu'il correspond à une nécessité, compte tenu de la remarquable introduction du paramètre z que maintiendra Gauss dans sa troisième preuve du théorème fondamental de l'algèbre, se gardant pourtant d'en référer à Laplace. Mais il s'agit d'une autre histoire [16].

Conclusion

C'est la question de ce que peut signifier une offre en science que j'ai voulu expliciter sur le cas de la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier. C'est bien d'analyse dont il est question, mais je me suis restreint essentiellement à deux aspects, l'un avec un jeu de fiction expérimentale qui est l'exemple de la propagation de la chaleur dans une lame métallique conduisant aux modes propres qui suffisent à représenter toutes les solutions, et l'autre est la mise au point par Fourier d'une preuve du théorème fondamental de l'algèbre, dont le but est de ramener les fictions imaginaires de Descartes aux seules quantités complexes, qui deviennent alors des nombres complexes. Dans les deux cas, c'est le concept de fonction qui s'est trouvé en jeu, et que j'ai privilégié. Avec une part notable de physique dans le premier cas comme j'ai tenu à le décrire, et une conception que je ne peux dire purement algébrique dans le second cas qu'en orientant d'avance le monde de Cantor vers l'algèbre. Il serait préférable, pour l'historien comme pour le mathématicien, de saisir qu'il s'est agi d'aller aux fondements des mathématiques en précisant des concepts qui paraissaient ne requérir aucun effort particulier. Et c'est là que la notion d'offre prend tout son sens, car justement au temps de Fourier, on peut constater plusieurs autres offres sur les fonctions. D'abord l'offre de Lagrange des années 1800, reposant sur le développement d'une fonction en série entière comme quantité réelle, débarrassée des notions d'infiniment petits et même des limites. Ensuite celle de Legendre d'un peu auparavant sur les fonctions d'une variable complexe, à partir d'un comportement opposé au cas des fonctions réelles avec ce qui va s'appeler le principe du minimum, et qui est consacré à la théorie des nombres. Enfin l'offre de Cauchy manifestée par le *Cours d'Analyse algébrique* sorti une année avant la *Théorie analytique*, une construction des fonctions, réelles

14. École nationale des Ponts et Chaussées, Ms 668, page indiquée au crayon n° 53, qui correspond à la 17ᵉ et la 18ᵉ leçon, sans doute prononcées les 14 et 19 mars 1796, mais rassemblées par l'élève.
15. *Idem*, recto de la page indiquée 54 et page 54.
16. On la trouvera dans le livre de Jean Dhombres et Carlos Alvarez, *Une histoire de l'invention mathématique. Les démonstrations classiques du théorème fondamental de l'algèbre dans le cadre de l'analyse réelle et de l'analyse complexe de Gauss à Liouville et Lipschitz*, Paris, Hermann, 2013.

ou complexes, à partir des notions de limite et de continuité. Je pourrais parler d'une autre offre encore avec la thèse de Gauss publiée en 1799 sur le théorème fondamental, car elle constitue une critique très efficace des auteurs phares des Lumières comme Euler, Lagrange et D'Alembert, et ainsi concerne les fondements même de l'acte mathématique. Fourier inscrit son nom au même titre que les quatre autres auteurs en montrant une généralité de calcul sur les fonctions qu'il justifie par une naturalité physique si je peux dire, non pas des fonctions, mais de leur analyse. S'il y a chez Fourier un indéniable positivisme reconnu par Comte, il y a aussi, et surtout le sens qu'un calcul qui se développe comme une expérimentation, et qui réussit, ne saurait être vide de sens et donc hors de la réalité. Les difficultés rencontrées par la postérité de Fourier sont justement dans le hiatus pratique manifesté par les difficultés mêmes du calcul tant des séries que des intégrales éponymes, comme le reconnaissent tous les physiciens du XX^e siècle. Elles n'ont été levées qu'au XXI^e siècle par les ondelettes, c'est-à-dire par la prise en compte inventive d'objets du calcul qui sont indépendants en satisfaisant à des relations d'orthogonalité, mais sont adaptés aux conditions même du calcul et ont non pas une naturalité physique, mais une naturalité de leur mise en calcul. En un sens, Fourier est dans la lignée formelle de Lagrange, même si l'offre de ce dernier a été écartée. Fourier est d'abord « corrigé » par l'offre de Cauchy, par des auteurs comme Dirichlet, ou Jordan, qui donnent des conditions de convergence. Puis au XX^e siècle, Fourier réapparaît en mathématiques grâce à l'intégrale de Lebesgue, avec démonstration de la convergence d'une série de Fourier se réduisant au fait que la différence entre la fonction 2π-périodique et sa série de Fourier est orthogonale à tous les cosinus et sinus. L'offre de Legendre, poursuivie par Cauchy sur les fonctions d'une variable complexe, n'a pas été suivie d'effet par Fourier qui ne passera pas aux exponentielles complexes.

Orientations bibliographiques

Comme en histoire de l'art, l'habitude en histoire et épistémologie des mathématiques est de donner de très copieuses bibliographies. Ce que je ne veux pas faire dans le présent article, souhaitant seulement aider dans sa recherche de précision le lecteur intéressé par Fourier.

La *Théorie analytique de la chaleur* est disponible en version originale de 1822 chez Didot sur le Net, sortie à l'identique chez Gabay en 1988 et avait été rééditée dans les *Œuvres de Fourier*, au tome I (Gauthier-Villars, 1888). Parmi les commentaires et traductions, on peut citer les leçons professées pendant le premier semestre 1893-1894 par Henri Poincaré, rédigées par Rouyer et Baire, dans son cours de physique mathématique, publiées à Paris, G. Carré, 1895.

Le manuscrit sur la théorie de la propagation de la chaleur de 1807 a été retranscrit et commenté dans I. Grattan-Guinness, en coll. avec J.R. Ravetz, avec une présentation biographique, dans *Joseph Fourier 1768-1830. A survey of his life and work, based on a critical edition of his monograph on the propagation of heat, presented to the Institut in 1807*, Cambridge, Mass.-London, 1972. La deuxième partie du manuscrit de 1811, couronné du grand prix des sciences mathématiques par l'Institut, Suite du mémoire intitulé : Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides, est sorti dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* au tome 5, 1821-1822, p. 153-246, repris au tome II et dernier des *Œuvres de Fourier* (p. 1-96). Des lettres relatives aux réactions suscitées par le mémoire de 1807 ont été publiées par J. Herivel, *Joseph Fourier. Lettres inédites 1808-1816*, Paris, 1980, tirées du recueil de manuscrits de la BNF, f.fr. 22 501. Cet auteur avait publié un ouvrage antérieur, *Joseph Fourier. The man and the physicist*, Clarendon Press, Oxford, 1975. L. Charbonneau, auteur d'une thèse en 1976 sur *L'œuvre mathématique de Joseph Fourier*, a publié en 1994 un Catalogue des manuscrits de Joseph Fourier conservés au Cabinet des manuscrits de la BNF, *Cahiers d'Histoire et de philosophie des sciences*, vol. 42, Lib. Albert Blanchard. Cette théorie analytique fait l'objet d'une longue présentation dans le livre de J. Dhombres, J.B. Robert, *Joseph Fourier, 1768-1830. Créateur de la physique mathématique*, Belin, Paris, 1998. Une présentation différente a été faite par Olivier Darrigol, The acoustic origins of harmonic analysis, *Arch. Hist. Ex. Sc.*, 2007, n° 4, p. 343-424. De nombreux articles de Jean-Pierre Kahane, dont un dans la *Gazette* de juillet 2014, *Qu'est-ce que Fourier peut nous dire aujourd'hui ?*, sont faciles à télécharger. Ainsi que l'article de Bernard Maurey, *Fourier, un homme, plusieurs vies*, La *Gazette*, vol. 158, oct. 2018.

Le site Mathourist que produit Alain Juhel donne des informations conséquentes sur la *Théorie analytique*, ainsi d'ailleurs de façon moins technique que le site de la Société Joseph Fourier, et notamment où trouver les articles de Kahane. Cette Société doit sortir prochainement chez Hermann un gros ouvrage très imagé, intitulé *L'itinéraire de Fourier 1768-1830 : de la révolution française à la révolution numérique*.

Auguste Comte parle longuement de la *Théorie analytique* dans son *Cours de philosophie positive* de 1830, en particulier dans les leçons 30 et 31. La deuxième thèse de Gaston Bachelard a fait l'objet d'un livre, *Étude sur l'évolution d'un problème de physique. La propagation thermique dans les solides*, Vrin, Paris, 1928, réédité en 1973.

Jean DHOMBRES

Centre Alexandre Koyré
jean.dhombres@ehess.fr

Jean Dhombres a été professeur de mathématiques à l'université de Nantes à partir de 1972, y ayant fondé l'IREM et le Centre François Viète. Ses recherches ont porté sur les équations fonctionnelles, et sur l'histoire des sciences, avec un accent sur le XVII^e siècle (dont les contacts avec la Chine) et depuis la Révolution française. Devenu directeur de recherche au CNRS en 1988, responsable de l'UPR 21, il a occupé une chaire à l'EHESS en histoire des sciences exactes, maintenant un séminaire mensuel portant cette année sur les positions philosophiques sur les mathématiques aux XX-XXI^e siècles.