Master de Mathématiques – Sorbonne Université

UE 4MUMA039 : Histoire d'un objet mathématique

(Alexandre Guilbaud et Laurent Mazliak)

Semaine 10

Dirichlet et Riemann

I- Dirichlet et l’expansion des mathématiques allemandes

Confédération Germanique
fondée à la suite du Congrès
de Vienne (1815) réglant
la succession napoléonienne

Multiplicité de micro-états hérités du Saint-Empire Romain-Germanique

Domination croissante de la Prusse (antagonisme avec l’ Autriche – politique de Bismarck)
1866: Sadowa.
1870 : Guerre Franco-Prussienne.
Défaite française
1871 :Empire Allemand

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

Né à Düren (entre Aix la Chapelle et Cologne) en 1805. A cette date, partie de l'Empire Français

Nom exact : Lejeune Dirichlet, originaire des environs de Liège (Belgique) = *le jeune de Richelet*

Elève très précoce : entrée au Gymnasium de Bonn en 1817

Légende dorée : argent de poche pour acheter des livres de maths

1820 : change d'institution. Collège jésuite de Cologne (un des plus anciens d'Allemagne, créé en 1544)

Un professeur remarquable : Georg Ohm (1789-1854)
Pédagogue inventif et physicien au contact des maths récentes (circuit électrique // théorie de la chaleur de Fourier en 1826)

Loi d'Ohm : 1827 dans *Die galvanische Kette matematisch bearbeitet* (Le circuit galvanique étudié **mathématiquement**)

1821 : fin des études secondaires

A cause du niveau moyen des universités allemandes, décide de poursuivre ses études de mathématiques à Paris, alors centre le plus prestigieux.

Université de Paris et Collège de France : Biot, Fourier, Laplace, Lacroix, Legendre, Poisson.

Rencontre personnelle avec Fourier

En parallèle, étude des *Disquisitiones* de Gauss

Premier travail publié en 1825 : résolution du théorème de Fermat pour le cas n=5.
Recherches sur la loi de réciprocité quadratique de Gauss

A partir de l'été 1823, employé come tuteur des enfants du Général Foy (1777-1825), un des grands généraux des armées napoléoniennes. Et un des chefs de file de l'opposition libérale.

Mort de Foy. Retour en Allemagne, appuyé par Humboldt (peut être recommandé par Fourier).
Problème : n'a pas de Doctorat pour pouvoir être candidat à une habilitation et un poste de professeur dans une université.
Doctorat Honoris causa (!) conféré par l'Université de Cologne ; habilitation sur les décompositions polynomiales
Nommé professeur à l'Université de Breslau (auj. Wroclaw, Pologne) en 1827.
Assez nombreuses protestations dues à sa jeunesse et le passe-droit.
Système allemand : nombreuses universités. Jeunes ont des années de « purgatoire »

En fait, Dirichlet, peu satisfait du niveau, ne reste qu'un an à Breslau.
Aide d'Humboldt : nommé au Collège Militaire de Berlin puis après quelques mois à l'Université de Berlin
Il y reste de 1828 à 1855.
« Début de l'âge d'or des mathématiques à Berlin »

INHALTS-VERZEICHNISS.

1829 : première démonstration de la convergence des séries trigonométriques.

Impose la continuité (sauf au plus en un nombre fini de points) aux fonctions pour que les intégrations aient un sens.

A la fin de l'article promet une extension dans une autre note dans le cas où les points de discontinuités forment un ensemble nulle part dense (rare)

$$\forall -\pi \leq a < b \leq \pi, \exists a \leq r < s \leq b, f \text{ est continue sur } [r, s]$$

Cette note n'a jamais paru. Echec pour le démontrer ?

1837 : méthodes analytiques en théorie des nombres (pour démontrer : *dans toute suite arithmétique dont la raison et le premier terme sont premiers entre eux, il y a une infinité de nombres premiers*)

1837 : première définition « moderne » d'une fonction

Sur la representation de fonctions entierement arbitraires par des series sinus et cosinus (1837)

Les séries remarquables qui représentent dans un intervalle déterminé des fonctions qui ne suivent aucune loi ou qui suivent dans des parties différentes de cet intervalle des lois totalement différentes ont trouvé depuis la fondation de la théorie mathématique de la chaleur par Fourier des applications si nombreuses dans le traitement analytique de problèmes de physique qu'il paraît convenable de développer quelques-unes de ces séries les plus importantes pour introduire les extraits des travaux les plus récents portant sur la physique mathématique retenus pour les volumes suivants de cet ouvrage.

Qu'on se représente par a et b deux valeurs fixes, et par x une grandeur variable qui doit prendre successivement toutes les valeurs comprises entre a et b. Qu'à chaque x corresponde maintenant un y, unique et fini, tel que, pendant que x parcourt continûment l'intervalle compris entre a et b, $y = f(x)$ varie graduellement aussi, alors y est ce qu'on appelle une fonction continue, ou continue de x, pour cet intervalle. Cela étant, il n'est absolument pas nécessaire que y dépende de x selon la même loi dans la totalité de cet intervalle : pas un instant en effet, on n'a besoin de supposer une dépendance qui serait exprimable par des opérations mathématiques. Dans une représentation géométrique, c'est-à-dire en prenant x et y comme abscisse et comme ordonnée, une fonction continue apparaît comme une courbe dont à chaque abscisse comprise entre a et b correspond un seul point. Cette définition ne prescrit aux sous-parties de la courbe aucune loi commune ; on peut se représenter la même courbe comme composée des parties les plus différentes d'allure ou comme tracées sans aucune loi. Il résulte de cela qu'une fonction de cette sorte ne doit être considérée comme entièrement déterminée pour un intervalle que si elle est donnée sous forme graphique pour tout élément dans cet intervalle, ou bien si elle peut être soumise à des lois mathématiques valables pour chacune de ses sous-parties. Aussi longtemps que l'on n'a déterminé une fonction que pour une partie de l'intervalle, la manière dont elle se poursuit dans le reste de l'intervalle est entièrement laissée à l'arbitraire.

1839 : commence à s'intéresser à la théorie de l'équilibre mécanique.

Reprend Laplace sur l'équilibre du système solaire. Est amené à introduire des solutions harmoniques (-> problème de Dirichlet)

Importante amitié avec Jacobi (1804-1851)

Jacobi à Legendre, 2 juillet 1830:

Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde.

1843 : Jacobi malade part pour l'Italie. Dirichlet obtient de l'accompagner.
Retour à Berlin en 1845. Rançon du succès : Berlin centre attractif, Dirichlet enseignant réputé.
Se plaint de ses charges d'enseignement.
Mort de Gauss (1855) : accepte sa chaire à Göttingen.
Crise cardiaque lors d'une conférence en Suisse en 1858. Meurt quelques mois plus tard.

II- Riemann et l’autonomisation du calcul fonctionnel

Bernhard RIEMANN
(1826-1866)

Né à Breselenz près d’Hanovre en 1826

Fils d’un pasteur luthérien

Etudes classiques au Gymnasium de Lüneburg. Intérêt pour les mathématiques remarqué et encouragé par le directeur.

1846 : Université de Göttingen pour étudier la théologie.

Demande son transfert vers la faculté de philosophie (incluant mathématiques). Cours (élémentaires) de Moritz Stern et Gauss.

Malgré Gauss, université de Göttingen en mathématiques plutôt limitée. On conseille à Riemann de s’orienter vers le grand centre, Berlin.

1847 : transfert à Berlin. Suit les cours de Steiner, Jacobi, Eisenstein et surtout Dirichlet

F.Klein:
Riemann était lié à Dirichlet par une solide complicité reposant sur une même façon de penser. Dirichlet aimait se rendre claires les notions d'une façon intuitive; en parallèle, il se livrait à des analyses logiques fines de questions fondamentales et évitait les longs calculs autant qu'il était possible. Sa démarche convenait à Riemann, qui l'adopta et travailla selon les méthodes de Dirichlet.

Pendant son séjour à Berlin, forge une grande partie de sa méthode pour l'étude des fonctions d'une variable complexe.

Fondée sur l'approche de Cauchy mais point de vue original étudiant les propriétés géométriques des ensembles liés à une fonction analytique: transformation conforme…

Troubles à Berlin pendant l'année 1848. Riemann de tendances plutôt conservatrices préfère retourner à Göttingen en 1849. Prépare sa thèse supervisée par Gauss.

Mais aussi forte influence des physiciens Weber (// Gauss et l'électromagnétisme) et Listing: solide bases de physique théorique -> approche topologique pour décrire les positions dans l'espace (continuité, connexion etc.)

1851 : Doctorat

Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse (fondement pour une théorie générale des fonctions d'une variable complexe)

Usage de méthodes variationnelles (principe de Dirichlet): si u est solution de Δu=0 dans Ω avec u=g sur $\partial\Omega$ alors

U minimise l'énergie de Dirichlet $\int_\Omega |\nabla v|^2(x)dx$

Gauss enthousiaste (!!) : rapport où il vante Riemann comme ayant une « originalité glorieusement fertile »

Avec l'appui de Gauss, Riemann obtient un poste d'assistant à Göttingen et prépare son habilitation (degré nécessaire pour devenir professeur)

Leçon inaugurale : 10 juin 1854 *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sur les hypothèses qui sont au fondement de la géométrie)

Premières définitions fondamentales de la géométrie différentielle (dans un certain sens, formalisation systématique des idées de Gauss)
Généralisation de l'espace euclidien de dimension *n*.
Tenseur de courbure qui mesure « de l'intérieur » (i.e. pour des êtres « vivant » à la surface de l'espace) le défaut de planarité
Gauss encore plus enthousiaste (!!!)

1854 : thèse Habilitation (Göttingen) *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique*

Publication uniquement en 1867 (posthume) par Dedekind (1831-1916), son ancien étudiant de Göttingen en 1855-1856. Traduction Darboux publiée en 1870

Conviction que toute fonction continue est somme de sa série de Fourier ==> nécessité de définir la « fonction » de façon indépendante. Aboutissement de l'idée de Dirichlet.
Commence par un historique du sujet

Pour la première fois : fonction définie comme une correspondance arbitraire (pas de « règle »)

« *les fonctions qui ne sont pas du type considéré par Dirichlet n'arrivent pas dans la nature* »

Mais : intéressant d'aller plus loin car

1) Le sujet est fortement connecté avec les principes du calcul infinitésimal et donc peut nous aider à apporter plus de clarté sur ces principes

2) Les applications des Séries de Fourier ne sont pas limitées à la physique. C'est maintenant utile dans un domaine de mathématique pure, la théorie des nombres

A quelle condition une fonction est-elle intégrable

Sommes de Cauchy : $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \to \int_a^b f(x)dx$

Ceci implique:

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=0}^{n} D_i \delta_i \to 0$$

où $$\delta_i = x_{i+1} - x_i$$

et $$D_i = |\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) - \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)|$$

(oscillation)

$$\Delta(d) = \sup_{|P|\leq d} D_1\delta_1 + \cdots + D_n\delta_n$$

$$f \text{ intégrable} \iff \Delta(d) \to 0$$

Soit $\sigma > 0.$

$s = s(P, \sigma)$: longueur totale des intervalles sur lesquels l'oscillation est plus grande que σ

$$s\sigma \leq D_1\delta_1 + \cdots + D_n\delta_n \leq \Delta(d)$$

et donc $s(P, \sigma) \leq \dfrac{\Delta(d)}{\sigma} \to 0 \text{ quand } d \to 0$

D'où, *condition d'intégrabilité de Riemann*

Correspondant à toute paire de nombres positifs ε et σ il existe un d positif tel que si P est une partition de norme inférieure ou égale à d alors $s(P, \sigma)$ est inférieur à ε.

Remarques :

1) Plus de condition liée à la continuité de la fonction
2) Un « germe » de ce qui sera plus tard interprété comme la « mesure extérieure ». Bien entendu, Riemann ne le conçoit pas ainsi.
3) Caractère intégrable devient une propriété autonome

Gauss meurt en 1855 : remplacé par Dirichlet.
En 1857, Riemann professeur à Göttingen.

Chaire de mathématique à Göttingen à la suite de la mort de Dirichlet en 1859.
Elu la même année à l'Académie des Sciences de Berlin.
Etude en profondeur de la fonction

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$$

(Hypothèse de Riemann)

Tuberculose déclarée en 1862 (Riemann a toujours eu une santé fragile)
Décide de partir pour l'Italie en 1863.
Rejoint notamment Betti (qui avec Casorati et Brioschi avaient visité Göttingen en 1858 -> école de géométrie différentielle italienne).
Sa santé se dégrade définitivement en juin 1866 et il meurt à Verbania au bord du lac Majeur

DENEN DIE GOTT LIEBEN MUESSEN ALLE DINGE ZUM BESTEN DIENEN

Ceux qui aiment Dieu doivent faire de leur mieux en toute chose