# 9.
# Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

(Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.)

Les séries de sinus et de cosinus, au moyen desquelles on peut représenter une fonction arbitraire dans un intervalle donné, jouissent entre autres propriétés remarquables aussi de celle d'être convergentes. Cette propriété n'avait pas échappée au géomètre illustre qui a ouvert une nouvelle carrière aux applications de l'analyse, en y introduisant la manière d'exprimer les fonctions arbitraires dont il est question; elle se trouve énoncée dans le Mémoire qui contient ses premières recherches sur la chaleur. Mais personne, que je sache, n'en a donné jusqu'à présent une démonstration générale. Je ne connais sur cet objet qu'un travail dû à M. Cauchy et qui fait partie des Mémoires de l'Académie des sciences de Paris pour l'année 1823. L'auteur de ce travail avoue lui même que sa démonstration se trouve en défaut pour certaines fonctions pour lesquelles la convergence est pourtant incontestable. Un examen attentif du Mémoire cité m'a porté à croire que la démonstration qui y est exposée n'est pas même suffisante pour les cas auxquels l'auteur la croit applicable. Je vais, avant d'entrer en matière, énoncer en peu de mots les objections auxquelles la démonstration de M. Cauchy me parait sujette. La marche que ce géomètre célèbre suit dans cette recherche exige que l'on considère les valeurs que la fonction $\varphi(x)$ qu'il s'agit de développer, obtient, lorsqu'on y remplace la variable $x$ par une quantité de la forme $u+v\sqrt{-1}$. La considération de ces valeurs semble étrangère à la question et l'on ne voit d'ailleurs pas bien ce que l'on doit entendre par le résultat d'une pareille substitution lorsque la fonction dans laquelle elle a lieu, ne peut pas être exprimée par une formule analytique. Je présente cette objection avec d'autant plus de confiance, que l'auteur me semble partager mon opinion sur ce point. Il insiste en effet dans plusieurs de ces ouvrages sur la nécessité de définir d'une manière précise le sens que l'on attache à une pareille substitution même lorsqu'elle est faite dans une fonction d'une loi analytique régulière; on trouve surtout dans le Mémoire qu'il a inseré dans le 19^ième^ cahier du journal polytechnique pag. 567 et suiv. des remarques sur les difficultés que font naître les quantités imaginaires placées sans ou des signes de fonctions arbitraires. Quoi qu'il en soit de cette première observation, la démonstration de M. Cauchy donne encore lieu à une autre objection qui parait ne laisser aucun doute sur son insuffisance. La considération des quantités imaginaires conduit l'auteur à un résultat sur le décroissement des termes de la série, qui est loin de prouver que ces termes forment une suite convergente. Le résultat dont il s'agit peut être énoncé comme il suit, en supposant que l'intervalle que l'on considère, s'etende depuis zéro jusqu'à $2\pi$.

„Le rapport du terme dont le rang est $n$, à la quantité $A\frac{\sin nx}{n}$ ($A$ désignant une constante determinée dépendante des valeurs extrêmes de la fonction) diffère de l'unité prise positivement d'une quantité qui diminue indéfiniment, à mesure que $n$ devient plus grand."

De ce résultat et de ce que la série, qui a $A\frac{\sin nx}{n}$ pour terme général, est convergente, l'auteur conclut que la série trigonométrique générale l'est également. Mais cette conclusion n'est pas permise, car il est facile de s'assurer que deux séries (du moins lorsque, comme il arrive ici, les termes n'ont pas tous le même signe) peuvent être l'une convergente, l'autre divergente, quoique le rapport de deux termes de même rang diffère aussi peu que l'on veut de l'unité prise positivement lorsque les termes sont d'un rang très avancé.

On en voit un exemple très simple dans les deux séries, ayant l'une pour terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et l'autre $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. La première de ces séries est convergente, la seconde au contraire est divergente, car en la soustraiant de la première on obtient la série divergente:

$$-1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}-\text{etc.}$$

et cependant le rapport de deux termes correspondans, qui est $1\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$, converge vers l'unité à mesure que $n$ croît.

Je vais maintenant entrer en matière, en commençant par l'examen des cas les plus simples, auxquels tous les autres peuvent être ramenés. Désignons par $h$ un nombre positif inférieur ou tout au plus égal à $\frac{\pi}{2}$ et par $f(\beta)$ une fonction de $\beta$ qui reste continue entre les limites o et $h$; j'entends par là une fonction qui a une valeur finie et determinée pour toute valeur de $\beta$ comprise entre o et $h$, et en outre telle que la différence $f(\beta+\varepsilon)-f(\beta)$ diminue sans limite lorsque $\varepsilon$ devient de plus en plus petit. Supposons encore que la fonction reste toujours positive entre les limites o et $h$ et qu'elle décroisse constamment depuis o jusqu'à $h$, en sorte que si $p$ et $q$ désignent deux nombres compris entre o et $h$, $f(p)-f(q)$ ait toujours un signe opposé à celui de $p-q$. Celà posé considérons l'intégrale

$$(1.)\quad \int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta$$

dans laquelle $i$ est une quantité positive, et voyons ce que cette intégrale deviendra à mesure que $i$ croît. Pour cela partageons la en plusieurs autres prises la première depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\frac{\pi}{i}$, la seconde depuis $\beta=\frac{\pi}{i}$ jusqu'à $\beta=\frac{2\pi}{i}$, et ainsi de suite, l'avant-dernière ayant pour limites $(r-1)\frac{\pi}{i}$ et $\frac{r\pi}{i}$, et la dernière $\frac{r\pi}{i}$ et $h$, $\frac{r\pi}{i}$ désignant le plus grand multiple de $\frac{\pi}{i}$ qui soit contenu dans $h$. Il est facile de voir que ces intégrales nouvelles, dont le nombre est $r+1$, sont alternativement positives et négatives, la fonction placée sous le signe somme étant évidemment toujours positive entre les limites de la première, négative entre les limites de la seconde et ainsi de suite. Il n'est pas moins facile de se convaincre que chacune d'elles est plus petite que la précédente, abstraction faite du signe. En effet $\nu$ désignant un entier $<r$, les expressions

$$\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta \quad\text{et}\quad \int_{\frac{\nu\pi}{i}}^{(\nu+1)\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta$$

représentent deux intégrales consécutives. Remplaçons dans la seconde $\beta$ par $\frac{\pi}{i}+\beta$; elle se changera ainsi en celle-ci:

$$\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin(i\beta+\pi)}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)} f\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)\partial\beta$$

ou ce qui revient au même:

$$-\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)} f\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)\partial\beta.$$

Les deux intégrales qu'il s'agit de comparer ayant ainsi les mêmes limites, on voit sans peine que la seconde a une valeur numérique inférieure à celle de la première. Il suffit pour cela de remarquer qu'il suit de la supposition que nous avons faite sur la fonction $f(\beta)$, que $f\left(\frac{\pi}{i}+\beta\right) < f(\beta)$ et que d'un autre côté $\sin\left(\frac{\pi}{i}+\beta\right) > \sin\beta$, les arcs $\beta$ et $\frac{\pi}{i}+\beta$ étant l'un et l'autre moindres que $\frac{\pi}{2}$, car il en résulte l'inégalité $\frac{f(\beta)}{\sin\beta} > \frac{f\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)}$, qui ayant lieu pour toutes les valeurs de $\beta$ intermédiaires entre les limites $(\nu-1)\frac{\pi}{i}$ et $\frac{\nu\pi}{i}$, fait voir que, comme nous l'avons dit, chaque intégrale est plus grande que celle qui la suit, abstraction faite du signe. Cette circonstance a lieu a fortiori, l'orsqu'on compare l'avant-dernière à la dernière, attendu que la différence des limites $\frac{r\pi}{i}$ et $h$ de la dernière est inférieure à $\frac{\pi}{i}$ différence commune des limites de toutes les autres.

Examinons actuellement un peu plus en détail l'intégrale du rang $\nu$, qui est

$$\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta.$$

Comme la fonction de $\beta$ qui se trouve sous le signe intégral est le produit des facteurs $\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}$, et $f(\beta)$, qui sont l'un et l'autre des fonctions continues de $\beta$ entre les limites de l'intégration et comme d'un autre côté le premier de ces facteurs conserve toujours le même signe entre ces mêmes limites, on conclura en vertu d'un théorème connu, que l'intégrale que nous considérons est égale à l'intégrale du premier facteur multipliée par une quantité comprise entre la valeur la plus grande et la valeur la plus petite de l'autre facteur. Le second facteur décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde, la quantité dont il s'agit est comprise entre $f\left(\frac{(\nu-1)\pi}{i}\right)$ et $f\left(\frac{\nu\pi}{i}\right)$. En la désignant par $\varrho_\nu$, notre intégrale sera équivalente à

$$\varrho_\nu \int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\,\partial\beta.$$

L'intégrale que renfermee encore cette expression, dépend à la fois de $\nu$ et de $i$. Elle est positive ou négative selon que $\nu - 1$ est pair ou impair; nous la désignerons désormais par $K_\nu$, abstraction faite du signe. Nous aurons bientôt besoin de connaître la limite vers laquelle elle converge, lors que, $\nu$ restant invariable, $i$ devient de plus en plus grand. Pour découvrir cette limite, remplaçons $\beta$ par $\frac{\gamma}{i}$, $\gamma$ étant une nouvelle variable. Nous aurons ainsi

$$\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin\gamma}{i\sin\left(\frac{\gamma}{i}\right)}\,\partial\gamma.$$

Sous cette forme, il est évident qu'elle converge vers la limite

$$\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma}\,\partial\gamma,$$

que pour abréger nous désignerons par $k_\nu$, abstraction faite du signe.

On sait que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin\gamma}{\partial\gamma}\,\partial\gamma$ a une valeur finie et égale à $\frac{\pi}{2}$. Cette intégrale peut être partagée en une infinité d'autres, prises la première depuis $\gamma = 0$ jusqu'à $\gamma = \pi$, la seconde depuis $\gamma = \pi$ jusqu'à $\gamma = 2\pi$, et ainsi de suite. Ces nouvelles intégrales sont alternativement positives et négatives, chacune d'elles a une valeur numérique inférieure à celle de la précédente, et celle du rang $\nu$ est $k_\nu$, abstraction faite du signe. La proposition qu'on vient de citer, revient donc à dire que la suite infinie

$$(2.)\quad k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 - \text{etc.}$$

est convergente et a une somme égale à $\frac{\pi}{2}$.

Les termes de cette suite allant toujours en décroissant, il suit d'une proposition connue que la somme de $n$ premiers termes est supérieure ou inférieure à $\frac{\pi}{2}$, selon que $n$ est impair ou pair et que cette somme qu'on peut désigner par $S_n$, diffère de $\frac{\pi}{2}$ d'une quantité moindre que le terme suivant $k_{n+1}$.

Reprenons actuellement l'intégrale (1.) et cherchons à déterminer la limite vers laquelle elle converge lorsque $i$ croît indéfiniment. En faisant ainsi croître le nombre $i$, les intégrales dans lesquelles nous avons décomposé l'intégrale (1.), changeront sans cesse de valeur en même temps que leur nombre augmentera; il s'agit de connaître le résultat de ce double changement lorsqu'il continue indéfiniment. Pour cela, prenons un nombre entier $m$ (qu'il soit supposé pair pour plus de simplicité) et supposons que le nombre $m$ reste invariable pendant que $i$ croît. Le nombre $r$, qui croît sans cesse avec $i$, finira bientôt par surpasser le nombre invariable $m$, quelque grand qu'on l'ait choisi.

Cela posé, partageons en deux groupes les intégrales dont la somme est équivalente à l'intégrale (1.). Le premier groupe comprendra les $m$ premières de ces intégrales, et le second sera composé de toutes les suivantes. On aura pour la somme du premier groupe:

$$(3.)\quad K_1\varrho_1 - K_2\varrho_2 + K_3\varrho_3 - K_4\varrho_4 + \ldots . - K_m\varrho_m$$

et le second, dont le nombre des termes croît sans cesse avec $i$, a pour premiers termes:

$$(4.)\quad K_{m+1}\varrho_{m+1} - K_{m+2}\varrho_{m+2} + \ldots .$$

Considérons séparément ces deux groupes. Le nombre $i$ croissant indéfiniment la somme (3.) convergera vers une limite qu'il est facile de déterminer. En effet, les quantités $\varrho_1$, $\varrho_2$, .... $\varrho_m$ qui sont comprises la première entre $f(0)$ et $f\left(\frac{\pi}{i}\right)$, la seconde entre $f\left(\frac{\pi}{i}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{i}\right)$, et la dernière entre $f\left(\frac{(m-1)\pi}{i}\right)$ et $f\left(\frac{m\pi}{i}\right)$ convergent chacune vers la limite $f(0)$, lorsque, $m$ restant invariable, $i$ croît sans cesse. D'un autre côté nous avons vu que les quantités $K_1$, $K_2$, .... $K_m$ convergent dans les mêmes circonstances respectivement vers les limites $k_1$, $k_2$, ... $k_m$. Donc la somme (3.) converge vers la limite $f(0)(k_1 - k_2 + k_3 - \text{etc.} \ldots . - k_m) = S_m f(0)$, ce qui veut dire que la différence entre la somme (3.) et $S_m f(0)$ finira toujours, abstraction faite du signe, par être constamment inférieure à $\omega$, $\omega$ désignant une quantité positive aussi petite que l'on veut.

Considérons pareillement la somme (4.), dont le nombre des termes augmente sans cesse. Ses termes étant alternativement positifs et négatifs, et chacun d'eux ayant une valeur numérique inférieure à celle du terme précédent, comme nous l'avons vu plus haut, en considérant les intégrales que ces termes représentent, il suit d'un principe connu *),

---

*) Le principe sur lequel nous nous appuyons peut être énoncé de cette manière. Les lettres $A$, $A'$, $A''$, .... désignant des quantités positives en nombre quelconque et telles que

que cette somme, quelque soit le nombre de ses termes, est positive comme son premier terme $K_{m+1}\varrho_{m+1}$ et a une valeur inférieure à celle de ce terme. Or, ce premier terme convergeant vers la limite $k_{m+1}f(0)$, il s'ensuit que la somme (4.) finira toujours par être inférieure à $k_{m+1}f(0)$ augmenté d'une quantité positive $\omega'$ aussi petite que l'on veut. En combinant ce résultat avec celui que nous avons obtenu sur la somme (3.), il n'y a qu'un instant, on verra que l'intégrale (1.) qui est la somme des expressions (3.) et (4.) finira toujours par différer de $f(0)\,S_m$ d'une quantité moindre, abstraction faite du signe, que $\omega+\omega'+f(0)\,k_{m+1}$, $\omega$ et $\omega'$ étant deux nombres d'une petitesse arbitraire. D'un autre côté $S_m$ diffère de $\frac{\pi}{2}$ d'une quantité numériquement inférieure à $k_{m+1}$; donc l'intégrale finira toujours par différer de $\frac{\pi}{2}f(0)$ d'une quantité moindre que $\omega+\omega'+2f(0)\,k_{m+1}$, abstraction faite du signe.

Comme $m$ peut être choisi tellement grand que $k_{m+1}$ sait moindre que toute grandeur donnée, il s'ensuit que l'intégrale (1.) finira toujours, lorsque $i$ croît sans limite, par différer constamment de $\frac{\pi}{2}f(0)$ d'une quantité moindre, abstraction faite du signe, qu'un nombre aussi petit que l'on veut. Il est ainsi prouvé, que l'intégrale (1.) converge vers la limite $\frac{\pi}{2}f(0)$ pour des valeurs croissantes de $i$.

Supposons maintenant que la fonction $f(\beta)$, au lieu d'être toujours décroissante depuis 0 jusqu'à $h$, soit constante et égale à l'unité. On pourra dans ce cas déterminer la limite vers laquelle converge l'intégrale (1.) par les mêmes considérations que nous venons d'employer; c'est ce qu'on voit tout de suite, en se rappellant que la démonstration précédente est fondée sur ce que les intégrales dans lesquelles nous avons decomposé l'intégrale (1.), forment une suite décroissante. Or, ce décroissement tient à deux choses, au décroissement du facteur $f(\beta)$ et à l'accroissement du diviseur $\sin\beta$. Si $f(\beta)$ devient un nombre constant, l'accroissement de $\sin\beta$ suffira toujours pour rendre chaque intégrale de la série plus petite

---

$A > A' > A'' >$ etc., la quantité $A - A' + A'' - A''' +$ etc.
est positive et inférieure à $A$. Celà résulte immédiatement de que la quantité précedente peut être mise sous l'une et l'autre de ces deux formes:

$$(A-A')+(A''-A''')+\text{etc.},$$
$$A-(A'-A'')-(A'''-A^{\text{IV}})-\text{etc.}$$

que la précédente. On trouvera ainsi, en supposant toujours $h$ positive et tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, que l'intégrale $\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ converge vers la limite $\frac{\pi}{2}$. Il suit de là que l'intégrale $\int_0^h \frac{c\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$, dans laquelle $c$ est une constante positive ou négative, converge vers la limite $c\frac{\pi}{2}$.

Nous avons supposé que la fonction $f(\beta)$ était décroissante et positive entre les limites o et $h$. La première circonstance ayant toujours lieu, c'est-à-dire la fonction étant telle que $f(p)-f(q)$ ait un signe contraire à celui de $p-q$ pour des valeurs $p$ et $q$ comprises entre o et $h$, supposons que $f(\beta)$ ne soit pas toujours positive. On prendra alors une constante positive $c$ assez grande pour que $c+f(\beta)$ conserve toujours un signe positif depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = h$. L'intégrale $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ étant égale à la différence de celles-ci: $\int_0^h [c+f(\beta)]\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ et $\int_0^h c\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$, sa limite sera la différence des limites vers lesquelles convergent ces dernières. Or ces dernières rentrent dans les cas précédemment examinés ($c+f(\beta)$ étant une fonction décroissante et positive) et convergent vers les limites $[c+f(0)]\frac{\pi}{2}$ et $c\frac{\pi}{2}$, d'où il suit que la première converge vers la limite $\frac{\pi}{2}f(0)$.

Considérons actuellement une fonction $f(\beta)$ croissante depuis o jusqu'à $h$. Dans ce cas $-f(\beta)$ sera une fonction décroissante. L'intégrale $\int_0^h -f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ convergera donc vers la limite $-\frac{\pi}{2}f(0)$, et par-conséquent l'intégrale $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ vers la limite $\frac{\pi}{2}f(0)$.

En réunissant ces résultats, on aura cet énoncé:

(5.) „Quelle que soit la fonction $f(\beta)$, pourvu qu'elle reste continue entre les limites o et $h$ ($h$ étant positive et tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$), et qu'elle croisse ou qu'elle décroisse depuis la première de ces limites jusqu'à la seconde, l'intégrale $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ finira par différer constamment de $\frac{\pi}{2}f(0)$ d'une quantité moindre que tout nombre assignable, lorsqu'on y fait croître $i$ au delà de toute limite positive."

Désignons par $g$ un nombre positif différent de zéro et inférieur à $h$, et supposons que la fonction reste continue et croisse ou décroisse depuis $g$ jusqu'à $h$. L'intégrale $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ convergera alors vers une limite qu'il est facile de découvrir. On pourroit y parvenir par des considérations analogues à celles que nous avons appliquées à l'intégrale (1.); mais il est plus simple de ramener ce nouveau cas à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède. La fonction n'étant donnée que depuis $g$ jusqu'à $h$ reste entièrement arbitraire pour les valeurs de $\beta$ comprises entre 0 et $g$. Supposons que l'on entende par $f(\beta)$, pour les valeurs de $\beta$ comprises entre 0 et $g$ une fonction continue et croissante ou décroissante depuis 0 jusqu'à $g$, selon que $f(\beta)$ croît ou décroît depuis $g$ jusqu'à $h$; supposons encore que $f(g-\varepsilon)$ diffère infiniment peu de $f(g+\varepsilon)$, si $\varepsilon$ décroit sans limite; ayant satisfait d'une manière quelconque à ces conditions, ce qu'on peut toujours faire d'une infinité de manières, la fonction $f(\beta)$ remplira depuis 0 jusqu'à $h$ les conditions exprimées dans l'énoncé (5.). Les intégrales

$$\int_0^g f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta \text{ et } \int_0^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$$

convergeront donc l'une et l'autre vers la limite $\frac{\pi}{2}f(0)$. D'où l'on conclut que l'intégrale $\int_g^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ qui est la différence des précédentes, a zéro pour limite.

Ce nouveau résultat peut être réuni en un seul énoncé avec celui que nous avons obtenu plus haut. On aura ainsi:

(6.) „La lettre $h$ désignant une quantité positive tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, et $g$ une quantité également positive et en outre inférieure à $h$, l'intégrale

$$\int_g^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$$

dans laquelle la fonction $f(\beta)$ est continue entre les limites de l'intégration et a une marche toujours croissante ou toujours décroissante depuis $\beta=g$ jusqu'à $\beta=h$, convergera vers une certaine limite, lorsque le nombre $i$ devient de plus en plus grand. Cette limite est égale à zéro, le seul cas excepté où $g$ a une valeur nulle, dans ce cas elle a la valeur $\frac{\pi}{2}f(0)$."

Il est évident que ce résultat ne serait que légèrement modifié, si la fonction $f(\beta)$ présentait une solution de continuité pour $\beta=g$, et $\beta=h$, c'est-à-dire si $f(g)$ était différent de $f(g+\varepsilon)$ et $f(h)$ de $f(h-\varepsilon)$, $\varepsilon$ désignant une quantité infiniment petite et positive, pourvu qu'alors les valeurs $f(g)$ et $f(h)$ ne fûssent pas infinies. Il faudrait seulement dans ce cas remplacer $f(0)$ par $f(\varepsilon)$ dans l'énoncé précédent, ce qu'on peut faire encore même quand il n'y a pas de solution de continuité, attendu qu'alors $f(\varepsilon)$ est égale à $f(0)$.

Nous sommes maintenant en état de prouver la convergence des séries périodiques qui expriment des fonctions arbitraires entre des limites données. La marche que nous allons suivre nous conduira à établir la convergence de ces séries et à déterminer en même temps leurs valeurs. Soit $\varphi(x)$ une fonction de $x$, ayant une valeur finie et déterminée pour chaque valeur de $x$ comprise entre $-\pi$ et $\pi$, et supposons qu'il s'agisse de développer cette fonction dans une série de sinus et de cosinus d'arcs multiples de $x$. La série qui résout cette question, est, comme l'on sait:

$$(7.)\quad \frac{1}{2\pi}\int\varphi(\alpha)\,\partial\alpha+\frac{1}{\pi}\left\{\begin{matrix}\cos x\int\varphi(\alpha)\cos\alpha\,\partial\alpha+\cos 2x\int\varphi(\alpha)\cos 2\alpha\,\partial\alpha\,\ldots\\ \sin x\int\varphi(\alpha)\sin\alpha\,\partial\alpha+\sin 2x\int\varphi(\alpha)\sin 2\alpha\,\partial\alpha\,\ldots\end{matrix}\right\}.$$

Les intégrales qui déterminent les coëfficiens constans, étant prises depuis $\alpha=-\pi$ jusqu'à $\alpha=\pi$, et $x$ désignant une quantité quelconque comprise entre $-\pi$ et $\pi$ (*Théorie de la Chaleur*, No. 232. et suiv.).

Considérons les $2n+1$ premiers termes de cette série ($n$ étant un nombre entier) et voyons vers quelle limite converge la somme de ces termes, lorsque $n$ devient de plus en plus grand. Cette somme peut être mise sous la forme suivante:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\,\partial\alpha\,[\tfrac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\cos 2(\alpha-x)+\ldots+\cos n(\alpha-x)],$$

ou en sommant la suite de cosinus,

$$(8.)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,\partial\alpha.$$

Tout se réduit maintenant à déterminer la limite dont cette intégrale approche sans cesse, lorsque $n$ croît indéfiniment. Pour cela nous la partagerons en deux autres prises l'une depuis $-\pi$ jusqu'à $x$, l'autre depuis $x$ jusqu'à $\pi$. Si l'on remplace dans la première $\alpha$ par $x-2\beta$, et dans la seconde $\alpha$ par $x+2\beta$, $\beta$ étant une nouvelle variable, ces deux intégrales se changeront en celles-ci, abstraction faite du facteur $\frac{1}{\pi}$:

$$(9.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(x-2\beta)\partial\beta \text{ et} \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(x+2\beta)\partial\beta.$$

Considérons la seconde de ces deux intégrales. La quantité $x$ étant inférieure ou tout au plus égale à $\pi$, abstraction faite du signe, $\frac{1}{2}(\pi-x)$ ne pourra tomber hors des limites $0$ et $\pi$. Si $\frac{1}{2}(\pi-x)=0$, ce qui a lieu lorsque $x=\pi$, l'intégrale est nulle quelque que soit $n$; dans tous les autres cas elle convergera pour des valeurs croissantes de $n$ vers une limite que nous allons déterminer. Supposons d'abord $\frac{1}{2}(\pi-x)$ inférieure ou tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, et remarquons que la fonction $\varphi(x+2\beta)$ peut présenter plusieurs solutions de continuité depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\frac{1}{2}(\pi-x)$, et qu'elle peut aussi avoir plusieurs maxima et minima dans ce même intervalle. Désignons par $l, l', l'', \ldots l^{(\nu)}$ rangées selon l'ordre de leur grandeur, les différentes valeurs de $\beta$, qui présentent l'une ou l'autre de ces circonstances, et décomposons notre intégrale en plusieurs autres prises respectivement entre les limites $0$ et $l$, $l'$ et $l''$, .... $l^{(\nu)}$ et $\frac{1}{2}(\pi-x)$. Toutes ces intégrales se trouveront dans le cas de l'énoncé (6.). Elles convergeront donc toutes vers la limite zéro à mesure que $n$ croît, à l'exception de la première qui converge vers la limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x+\varepsilon)$, $\varepsilon$ étant un nombre infiniment petit et positif. Si $\frac{1}{2}(\pi-x)$ était supérieure à $\frac{\pi}{2}$, ce qui arrivera lorsque $x$ a une valeur négative, on partagerait l'intégrale en deux autres, l'une prise depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\frac{1}{2}\pi$, l'autre depuis $\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\beta=\frac{1}{2}(\pi-x)$. La première de ces nouvelles intégrales se trouvera dans le même cas que celle que nous venons de considérer, elle convergera donc vers la limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x+\varepsilon)$. Quant à la seconde, on peut la changer en celle-ci, en y remplaçant $\beta$ par $\pi-\gamma$, $\gamma$ étant une nouvelle variable:

$$\int_{\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(x+2\pi-2\gamma)\frac{\sin(2n+1)(\pi-\gamma)}{\sin(\pi-\gamma)}\partial\gamma,$$

ou ce qui revient au même, $n$ étant un entier:

$$\int_{\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(x+2\pi-2\gamma)\frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\partial\gamma.$$

Elle a ainsi une forme analogue à celle de la précédente; en la décomposant comme elle en plusieurs autres, on verra qu'elle converge vers la limite zéro, le seul cas excepté, où $\frac{1}{2}(\pi+x)$ a une valeur nulle, c'est-à-dire lorsque $x=-\pi$; dans ce cas elle approche continuellement de la limite $\varphi(\pi-\varepsilon)$, $\varepsilon$ ayant toujours la même signification. En résumant tout ce qui précède, on trouvera que la seconde des intégrales (10.) est nulle lorsque $x=\pi$, qu'elle converge vers la limite $\frac{\pi}{2}[\varphi(\pi-\varepsilon)+\varphi(-\pi+\varepsilon)]$ lorsque $x=-\pi$, et que dans tous les autres cas elle approche continuellement de la limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x+\varepsilon)$. La première des intégrales (9.) est entièrement analogue à la seconde; en y appliquant des considérations semblables, on trouvera qu'elle est nulle lorsque $x=-\pi$, qu'elle converge vers la limite $\frac{\pi}{2}[\varphi(\pi-\varepsilon)+\varphi(-\pi+\varepsilon)]$ lorsque $x=\pi$ et que dans tous les autres cas elle a pour limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x-\varepsilon)$. Connoissant ainsi les limites de chacune des intégrales (9.), il est facile de trouver la limite dont l'intégrale (8.) approche sans cesse, lorsque $n$ devient de plus en plus grand; il suffit pour celà de se rappeler que cette intégrale est égale à la somme des intégrales (9.) divisée par $\pi$. Or, l'intégrale (8.) étant équivalente à la somme des $2n+1$ premiers termes de la série (7.), il est prouvé que cette série est convergente et l'on trouve au moyen des résultats précédens qu'elle est égale à $\frac{1}{2}[\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x-\varepsilon)]$ pour toute valeur de $x$ comprise entre $-\pi$ et $\pi$, et que pour chacune des valeurs extrêmes $\pi$ et $-\pi$, elle est égale à $\frac{1}{2}[\varphi(\pi-\varepsilon)+\varphi(-\pi+\varepsilon)]$.

L'exposé précédent embrasse tous les cas; il se simplifie lorsque la valeur de $x$ qu'on considère n'est pas une de celles qui présentent une solution de continuité. En effet les quantités $\varphi(x+\varepsilon)$ et $\varphi(x-\varepsilon)$ étant alors l'une et l'autre équivalentes à $\varphi(x)$, on voit que la série a pour valeur $\varphi(x)$.

Les considérations précédentes prouvent d'une manière rigoureuse que, si la fonction $\varphi(x)$, dont toutes les valeurs sont supposées finies et déterminées, ne présente qu'un nombre fini de solutions de continuité entre les limites $-\pi$ et $\pi$, et si en outre elle n'a qu'un nombre déterminé de maxima et de minima entre ces mêmes limites, la série (7.), dont les coëfficiens sont des intégrales définies dépendantes de la fonction $\varphi(x)$ est convergente et a une valeur généralement exprimée par

$\frac{1}{2}[\varphi(x+\varepsilon)+\varphi(x-\varepsilon)]$, où $\varepsilon$ désigne un nombre infiniment petit. Il nous resterait à considérer les cas où les suppositions que nous avons faites sur le nombre des solutions de continuité et sur celui des valeurs maxima et minima cessent d'avoir lieu. Ces cas singuliers peuvent être ramenés à ceux que nous venons de considérer. Il faut seulement pour que la série (8.) présente un sens lorsque les solutions de continuité sont en nombre infini, que la fonction $\varphi(x)$ remplisse la condition suivante.

Il est nécessaire qu'alors la fonction $\varphi(x)$ soit telle que, si l'on désigne par $a$ et $b$ deux quantités quelconques comprises entre $-\pi$ et $\pi$, on puisse toujours placer entre $a$ et $b$ d'autres quantités $r$ et $s$ assez rapprochées pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de $r$ à $s$. On sentira facilement la nécessité de cette restriction en considérant que les différens termes de la série sont des intégrales définies et en remontant à la notion fondamentale des intégrales. On verra alors que l'intégrale d'une fonction ne signifie quelque chose qu'autant que la fonction satisfait à la condition précédemment énoncée. On aurait un exemple d'une fonction qui ne remplit pas cette condition, si l'on supposait $\varphi(x)$ égale à une constante déterminée $c$ lorsque la variable $x$ obtient une valeur rationnelle, et égale à une autre constante $d$, lorsque cette variable est irrationnelle. La fonction ainsi définie a des valeurs finies et déterminées pour toute valeur de $x$, et cependant on ne saurait la substituer dans la série, attendu que les différentes intégrales qui entrent dans cette série, perdroient toute signification dans ce cas. La restriction que je viens de préciser, et celle de ne pas devenir infinie, sont les seules auxquelle la fonction $\varphi(x)$ soit sujette et tous les cas qu'elles n'excluent pas peuvent être ramenés à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède. Mais la chose, pour être faite avec toute la clarté qu'on peut désirer exige quelques détails liés aux principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale et qui seront exposés dans une autre note, dans laquelle je m'occuperai aussi de quelques autres propriétés assez remarquables de la série (7.).

Berlin, Janvier 1829.