ÜBER DIE DARSTELLUNG GANZ WILLKÜRLICHER FUNCTIONEN DURCH SINUS- UND COSINUSREIHEN.

VON

G. LEJEUNE DIRICHLET.

Repertorium der Physik, unter Mitwirkung der Herren Lejeune Dirichlet, Jacobi, Neumann, Riess, Strehlke, herausgegeben von Heinrich Wilhelm Dove und Ludwig Moser.
Bd. I, 1837, S. 152—174.

ÜBER DIE DARSTELLUNG GANZ WILLKÜRLICHER FUNCTIONEN DURCH SINUS- UND COSINUSREIHEN.

Die merkwürdigen Reihen, welche in einem bestimmten Intervalle Functionen darstellen, welche ganz gesetzlos sind oder in verschiedenen Theilen dieses Intervalls ganz verschiedenen Gesetzen folgen, haben seit der Begründung der mathematischen Wärmelehre durch FOURIER so zahlreiche Anwendungen in der analytischen Behandlung physikalischer Probleme gefunden, dass es zweckmässig erscheint, die für die folgenden Bände dieses Werkes bestimmten Auszüge aus den neuesten Arbeiten über einige Theile der mathematischen Physik durch die Entwickelung einiger der wichtigsten dieser Reihen einzuleiten.

§. 1.

Man denke sich unter a und b zwei feste Werthe und unter x eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle zwischen a und b liegenden Werthe annehmen soll. Entspricht nun jedem x ein einziges, endliches y, und zwar so, dass, während x das Intervall von a bis b stetig durchläuft, $y = f(x)$ sich ebenfalls allmählich verändert, so heisst y eine stetige oder continuirliche*) Function von x für dieses Intervall. Es ist dabei gar nicht nöthig, dass y in diesem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängig sei, ja man braucht nicht einmal an eine durch mathematische Operationen ausdrückbare Abhängigkeit zu denken. Geometrisch dargestellt, d. h. x und y als Abscisse und Ordinate gedacht, erscheint eine stetige Function als eine zusammenhängende Curve, von der jeder zwischen a und b enthaltenen Abscisse nur ein Punkt entspricht. Diese Definition schreibt den einzelnen Theilen der Curve kein gemeinsames Gesetz vor; man kann sich dieselbe aus den verschiedenartigsten Theilen zusammengesetzt oder ganz gesetzlos gezeichnet denken. Es

*) Da im Folgenden nur von stetigen Functionen die Rede sein wird, so kann der Zusatz ohne Nachtheil wegbleiben.

geht hieraus hervor, dass eine solche Function für ein Intervall als vollständig bestimmt nur dann anzusehen ist, wenn sie entweder für den ganzen Umfang desselben graphisch gegeben ist, oder mathematischen, für die einzelnen Theile desselben geltenden Gesetzen unterworfen wird. So lange man über eine Function nur für einen Theil des Intervalls bestimmt hat, bleibt die Art ihrer Fortsetzung für das übrige Intervall ganz der Willkür überlassen.

Es seien A und B die Endpunkte von a und b, und $\alpha\gamma\beta$ die der Function $f(x)$ entsprechende Curve, so ist klar, dass mit dieser Function auch der Flächenraum $A\alpha\gamma\beta B$ bestimmt ist, welcher von den Ordinaten $A\alpha$, $B\beta$, dem Stück AB der Abscissenachse und der Curve $\alpha\gamma\beta$ begrenzt wird, wenn er sich gleich nicht immer genau angeben lässt. Dieser Raum heisst bekanntlich auch das bestimmte Integral der Function $f(x)$, von a bis b oder zwischen den Grenzen a und b genommen, und wird durch $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet. Der Ursprung dieses Zeichens liegt in der Art, wie die Infinitesimalrechnung einen Flächenraum oder ein solches Integral betrachtet. Wird die Linie $AB = b - a$, in eine Anzahl n gleicher Theile zerlegt, deren gemeinschaftlicher Werth $= \frac{b-a}{n} = \delta$, und werden durch a und die Endpunkte der den Theilungspunkten 1, 2, 3, ... entsprechenden Ordinaten, Parallelen mit der Abscissenachse gezogen, so entstehen n Rechtecke, deren Summe:

$$(1) \qquad \delta f(a) + \delta f(a+\delta) + \delta f(a+2\delta) + \cdots + \delta f(a+(n-1)\delta),$$

wie sich leicht streng beweisen lässt, und wie es auch schon die blosse Anschauung ergiebt, bei unaufhörlichem Wachsen der Anzahl n zuletzt in den Flächenraum $A\alpha\gamma\beta B$ übergeht, d. h. man kann n immer so gross wählen, dass die Summe (1) von diesem Raum um weniger verschieden sein wird, als eine noch so kleine, vorher bestimmte Grösse. Nimmt man $b-a$ und also auch δ als positiv an, so erscheinen offenbar die in (1) enthaltenen Rechtecke als positiv oder negativ, je nachdem sie auf der Seite der positiven oder der negativen y liegen. Umgekehrt verhält es sich, wenn $b-a$ negativ ist. Es geht also hieraus hervor, dass ein bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ (wenn man dieses als den Grenzwerth betrachtet, welchen (1) für ein unendliches n annimmt) nur insofern als Flächenraum angesehen werden kann, als man bei letzterem die Theile, welche auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenachse liegen, entgegengesetzt und zwar die auf der Seite der positiven y liegenden als positiv oder negativ nimmt, je nachdem b grösser oder kleiner als a ist.

§. 2.

Aus der Definition des bestimmten Integrals als Grenzwerth von (1) oder als Flächenraum mit der eben angegebenen Modification folgen fast unmittelbar mehrere Eigenschaften, die ich hier zusammenstelle, um mich im Folgenden leichter darauf berufen zu können; c bezeichnet, wie a und b, eine Constante.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \tag{2}$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \tag{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx, \tag{4}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f\left(\frac{x}{c}\right)dx, \tag{5}$$

$$\int_a^b [f(x)\pm F(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b F(x)dx, \tag{6}$$

(7) Hat $f(x)$ zwischen $x=a$ und $x=b$ immer dasselbe Zeichen, so ist $\int_a^b f(x)dx$ positiv oder negativ, je nachdem jenes Zeichen dem von $b-a$ gleich oder entgegengesetzt ist.

(8) Das Integral $\int_a^b \varphi(x)F(x)dx$ liegt immer zwischen $M\int_a^b F(x)dx$ und $N\int_a^b F(x)dx$, wenn $F(x)$ innerhalb der Grenzen a und b sein Zeichen nicht ändert und M und N respective den grössten und kleinsten Werth*) bezeichnen, den $\varphi(x)$ in dem genannten Intervall erhält.

Dieser Satz, welcher im Folgenden häufig Anwendung findet, ist leicht aus den vorhergehenden abzuleiten. Nach den über M und N gemachten Vor-

*) Es ist wohl zu bemerken, dass hier bei der Vergleichung zweier Werthe hinsichtlich ihrer Grösse auf die Zeichen Rücksicht genommen wird: r heisst grösser als s, oder geschrieben: $r > s$, wenn die algebraische Differenz $r-s$ positiv ist.

aussetzungen bleiben:

$$M-\varphi(x),\quad \varphi(x)-N$$

zwischen $x=a$ und $x=b$ stets positiv;

$$[M-\varphi(x)]F(x),\quad [\varphi(x)-N]F(x)$$

sind daher in diesem Intervall entweder beide immer positiv oder beide immer negativ, woraus vermöge (7) folgt, dass die Integrale:

$$\int_a^b [M-\varphi(x)]F(x)dx,\quad \int_a^b [\varphi(x)-N]F(x)dx$$

gleiche Zeichen haben. Werden diese Integrale nach (6) und (3) in die Form:

$$M\int_a^b F(x)dx-\int_a^b \varphi(x)F(x)dx,\quad \int_a^b \varphi(x)F(x)dx-N\int_a^b F(x)dx$$

gebracht, so ist die Behauptung bewiesen.

(9) Liegt c zwischen a und b, so ist:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Dieser Satz sagt nichts anderes, als dass der Flächenraum $\int_a^b f(x)dx$ durch die der Abscisse c entsprechende Ordinate in zwei andere Flächenräume zerlegt wird. Man kann durch wiederholte Anwendung desselben jedes Integral in eine beliebige Anzahl anderer Integrale zerlegen.

Es geht z. B. daraus hervor,

(10) dass $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2mx dx = 0$, wenn m irgend eine von 0 verschiedene ganze Zahl bezeichnet.

Zerlegt man nämlich diesen Flächenraum in $2m$ andere zwischen den Grenzen:

$$0 \text{ und } \frac{\pi}{4m},\quad \frac{\pi}{4m} \text{ und } \frac{2\pi}{4m},\quad \frac{2\pi}{4m} \text{ und } \frac{3\pi}{4m},\quad \ldots,\quad \frac{(2m-1)\pi}{4m} \text{ und } \frac{2m\pi}{4m},$$

so sieht man leicht, dass der erste dem zweiten, der dritte dem vierten u. s. w. gleich und entgegengesetzt ist.

Endlich ist für das Folgende noch die Kenntniss der Summe z der endlichen Reihe:

$$z=\cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\cdots+\cos n\vartheta$$

erforderlich. Um zur Bestimmung derselben zu gelangen, multiplicire man die

Gleichung mit $2\cos\vartheta$ und verwandle die Cosinusproducte nach der bekannten Formel $2\cos\beta\cos\gamma = \cos(\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma)$ in Summen. Man erhält so:

$$\begin{aligned} 2z\cos\vartheta = \quad & 1+\cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\cdots+\cos(n-1)\vartheta \\ & +\cos 2\vartheta+\cos 3\vartheta+\cos 4\vartheta+\cdots+\cos(n+1)\vartheta. \end{aligned}$$

Die Vergleichung der oberen Horizontalreihe mit der durch z bezeichneten Reihe ergiebt für dieselbe:

$$z+1-\cos n\vartheta;$$

eben so findet man für die untere:

$$z-\cos\vartheta+\cos(n+1)\vartheta.$$

Werden beide Werthe eingesetzt, so kommt:

$$2z\cos\vartheta = 2z+1-\cos\vartheta+\cos(n+1)\vartheta-\cos n\vartheta;$$

Bringt man $2z$ auf die andere Seite und dividirt durch $2(\cos\vartheta-1)$, so folgt:

$$z = -\frac{1}{2}+\frac{\cos n\vartheta-\cos(n+1)\vartheta}{2(1-\cos\vartheta)}.$$

Dieser Ausdruck für z wird vereinfacht, wenn man $2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta$ für $1-\cos\vartheta$ und $2\sin\frac{1}{2}\vartheta\sin(n+\frac{1}{2})\vartheta$ für $\cos n\vartheta-\cos(n+1)\vartheta$ einführt und den gemeinschaftlichen Factor $2\sin\frac{1}{2}\vartheta$ weglässt. Man findet so:

$$(11)\qquad \cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\cdots+\cos n\vartheta = -\frac{1}{2}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\vartheta}{2\sin\frac{1}{2}\vartheta}.$$

§. 3.

Verschiedene Aufgaben der mathematischen Physik erfordern die Darstellung einer für das Intervall von 0 bis π ganz willkürlich gegebenen Function $f(x)$ durch eine unendliche Reihe von folgender Form:

$$a_1\sin x+a_2\sin 2x+a_3\sin 3x+\cdots,$$

wo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von x unabhängige Grössen bezeichnen. Der natürlichste Weg zu der verlangten Reihenentwicklung scheint der sogenannte Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen zu sein. Man denke sich nämlich zunächst die Reihe aus einer endlichen Anzahl $(n-1)$ von Gliedern bestehend, d. h. man betrachte den Ausdruck:

$$a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_{n-1}\sin(n-1)x.$$

Die darin enthaltenen willkürlichen $n-1$ Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ lassen sich so bestimmen, dass dieser Ausdruck für eben so viele besondere Werthe von x, nämlich $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, (n-1)\frac{\pi}{n}$, der gegebenen Function $f(x)$

gleich wird. Lässt man, nachdem die Werthe der Coefficienten gefunden worden sind, n ohne Grenzen wachsen, so geht die endliche Reihe in eine unendliche über, die Werthe $\frac{\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, ..., $(n-1)\frac{\pi}{n}$ rücken einander immer näher und erfüllen zuletzt das ganze Intervall von 0 bis π, so dass die Gleichheit der Function und der unendlichen Reihe für den ganzen Umfang desselben Statt findet.

Die Gleichsetzung der gegebenen Function $f(x)$ und der endlichen Reihe für die vorher angeführten besondern Werthe ergiebt folgende Bedingungen:

$$a_1 \sin\frac{\pi}{n} + a_2 \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + a_m \sin\frac{m\pi}{n} + \cdots + a_{n-1} \sin(n-1)\frac{\pi}{n} = f\left(\frac{\pi}{n}\right),$$
$$a_1 \sin\frac{2\pi}{n} + a_2 \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + a_m \sin\frac{2m\pi}{n} + \cdots + a_{n-1} \sin 2(n-1)\frac{\pi}{n} = f\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$
$$a_1 \sin\frac{3\pi}{n} + a_2 \sin\frac{6\pi}{n} + \cdots + a_m \sin\frac{3m\pi}{n} + \cdots + a_{n-1} \sin 3(n-1)\frac{\pi}{n} = f\left(\frac{3\pi}{n}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1 \sin(n-1)\frac{\pi}{n} + \cdots + a_m \sin(n-1)\frac{m\pi}{n} + \cdots + a_{n-1} \sin(n-1)^2\frac{\pi}{n} = f\left((n-1)\frac{\pi}{n}\right).$$

Um aus diesen $n-1$ Gleichungen irgend einen der darin enthaltenen Coefficienten, z. B. a_m (wo m eine der Zahlen 1, 2, 3, ..., $n-1$) zu erhalten, multiplicire man diese Gleichungen der Reihe nach mit $2\sin\frac{m\pi}{n}$, $2\sin\frac{2m\pi}{n}$, $2\sin\frac{3m\pi}{n}$, ..., $2\sin(n-1)\frac{m\pi}{n}$ und addire nachher alle zusammen. Die so entstehende neue Gleichung wird a_m allein enthalten und zur Bestimmung dieser Grösse führen. Um sich hiervon zu überzeugen, betrachte man den Inbegriff aller Glieder, die in dieser Gleichung irgend einen Coefficienten a_h enthalten, wo h wie m eine in der Reihe 1, 2, 3, ..., $n-1$ enthaltene Zahl bezeichnet. Setzt man a_h als gemeinschaftlichen Factor heraus, so erhält man als Vereinigung aller dieser Glieder:

$$a_h\left(2\sin\frac{m\pi}{n}\sin\frac{h\pi}{n} + 2\sin\frac{2m\pi}{n}\sin\frac{2h\pi}{n} + \cdots + 2\sin(n-1)\frac{m\pi}{n}\sin(n-1)h\frac{\pi}{n}\right),$$

und man beweist leicht, dass der Ausdruck zwischen den Klammern der Null gleich ist, wenn h von m verschieden ist. Schreibt man nämlich statt der Sinusproducte Cosinusdifferenzen, so geht derselbe in folgende Differenz über:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos(m-h)\frac{\pi}{n} + \cos 2(m-h)\frac{\pi}{n} + \cdots + \cos(n-1)(m-h)\frac{\pi}{n} \\ &-\left(\cos(m+h)\frac{\pi}{n} + \cos 2(m+h)\frac{\pi}{n} + \cdots + \cos(n-1)(m+h)\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned}\right.$$

Jede dieser Reihen lässt sich nach Formel (11) summiren. Wenn man dort $\vartheta = (m-h)\frac{\pi}{n}$ setzt und n in $n-1$ verwandelt, so findet man für die erste:

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sin(n-\frac{1}{2})(m-h)\frac{\pi}{n}}{2\sin(m-h)\frac{\pi}{2n}}.$$

Erinnert man sich, dass für irgend eine ganze Zahl l:

$$\sin(l\pi-\gamma) = \mp\sin\gamma,$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem l gerade oder ungerade ist, so sieht man gleich, dass:

$$\sin(n-\tfrac{1}{2})(m-h)\frac{\pi}{n} = \sin\left((m-h)\pi-(m-h)\frac{\pi}{2n}\right) = \mp\sin(m-h)\frac{\pi}{2n},$$

und dass also die erste der Reihen (12):

$$\cos(m-h)\frac{\pi}{n}+\cos 2(m-h)\frac{\pi}{n}+\cdots+\cos(n-1)(m-h)\frac{\pi}{n}$$

den Werth -1 oder 0 hat, je nachdem $m-h$ gerade oder ungerade ist. Aehnlicherweise ergiebt sich für die zweite Reihe (12):

$$-\left(\cos(m+h)\frac{\pi}{n}+\cos 2(m+h)\frac{\pi}{n}+\cdots+\cos(n-1)(m+h)\frac{\pi}{n}\right)$$

der Werth $+1$ oder 0, je nachdem $m+h$ gerade oder ungerade ist. Bemerkt man nun, dass $m-h$ und $m+h$ entweder zugleich gerade oder zugleich ungerade sind, da ihre Summe $2m$ gerade ist, so sieht man auf der Stelle, dass der Ausdruck (12) verschwindet, wie es früher behauptet wurde.

Es ist nicht zu übersehen, dass das oben gefundene Resultat wesentlich voraussetzt, dass h von m verschieden ist. Für den Fall, wo $h = m$, erscheint der Ausdruck für die Summe der ersten der Reihen (12) in der Form $\frac{0}{0}$, und die vorige Bestimmung verliert ihre Gültigkeit. Man erhält aber in diesem Falle, da alle Glieder dieser Reihe der Einheit gleich werden, sogleich für ihre Summe $n-1$, während die zweite den Werth 1 annimmt, indem $m+h = 2m$ in diesem Falle gerade ist. Der Ausdruck (12) verschwindet also für jedes h, welches von m verschieden ist, für $h = m$ hingegen erhält er den Werth n. Es geht daraus hervor, dass die Gleichung, deren Entstehung man oben näher angegeben hat, in der That nur den einzigen Coefficienten a_m enthält und von folgender sehr einfachen Form ist:

$$na_m = 2\sin\frac{m\pi}{n}f\left(\frac{\pi}{n}\right)+2\sin\frac{2m\pi}{n}f\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+2\sin(n-1)\frac{m\pi}{n}f\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

und folglich:

$$a_m = \frac{2}{n}\left[\sin\frac{m\pi}{n} f\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\frac{2m\pi}{n} f\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin(n-1)\frac{m\pi}{n} f\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

Nachdem die Coefficienten der endlichen Reihe gefunden worden sind, bleibt zu untersuchen, wie sich der Coefficient, welcher eine beliebige, aber bestimmte Stelle einnimmt, bei unaufhörlich wachsender Gliederzahl verändert, d. h. es bleibt der Werth auszumitteln, den der vorhergehende Ausdruck für a_m annimmt, wenn man n unendlich gross werden lässt, während m constant gedacht wird. Schreibt man den Ausdruck wie folgt:

$$a_m = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\sin\left(\frac{0m\pi}{n}\right) f\left(\frac{0\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{n}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right) f\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{n}\sin\frac{2m\pi}{n} f\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{\pi}{n}\sin(n-1)\frac{m\pi}{n} f\left((n-1)\frac{\pi}{n}\right)\right],$$

so erhellt sogleich aus der Vergleichung der Summe zwischen den Klammern mit der Gleichung (1), dass für $n=\infty$ die Summe in das bestimmte Integral $\int_0^\pi \sin mx\, f(x)dx$ übergeht.

Die alsdann zu einer unendlichen gewordene Reihe stellt aber, wie früher bemerkt worden, die Function $f(x)$ für alle zwischen 0 und π gelegenen Werthe von x dar, und wir haben also für den ganzen Umfang des genannten Intervalls:

$$(13) \qquad f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_m \sin mx + \cdots,$$

in welcher Reihe die Coefficienten nach der allgemeinen Gleichung:

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin mx\, f(x)dx$$

zu bestimmen sind.

Man kann durch ähnliche Betrachtungen zu einer Reihe gelangen, welche nur die Cosinus von x und dessen Vielfachen enthält, und die Function $f(x)$, wie die gefundene Sinusreihe, für dasselbe Intervall von 0 bis π darstellt. Kürzer erreicht man jedoch diesen Zweck, wenn man das schon gefundene Resultat (13) benutzt. Setzt man in demselben statt $f(x)$ das Product $2f(x)\sin x$, so erhält man:

$$2\sin x f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_m \sin mx + \cdots,$$

wo:

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\sin mx \sin x\, f(x)dx.$$

Dieser Werth für a_m lässt sich auch so schreiben:

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(m-1)x f(x)dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(m+1)x f(x)dx,$$

oder, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos hx f(x)dx = b_h,$$

wo h eine ganze positive Zahl mit Einschluss der Null bezeichnet:

$$a_m = b_{m-1} - b_{m+1}.$$

Nimmt man successive $m = 1, 2, 3, \ldots$ und substituirt in obige Reihe, so kommt:

$$2\sin x f(x) = (b_0 - b_2)\sin x + (b_1 - b_3)\sin 2x + (b_2 - b_4)\sin 3x + \cdots,$$

oder wenn man nach $b_0, b_1, b_2, \ldots$ ordnet:

$$2\sin x f(x) = b_0 \sin x + b_1 \sin 2x + b_2(\sin 3x - \sin x) + b_3(\sin 4x - \sin 2x) + \text{ etc.}$$

Durch Einführung der Producte $2\sin x\cos x$, $2\sin x\cos 2x, \ldots$ an die Stelle von $\sin 2x$, $\sin 3x - \sin x, \ldots$ wird die ganze Gleichung durch $2\sin x$ theilbar, und man erhält nach Entfernung dieses gemeinschaftlichen Factors:

$$(14) \qquad f(x) = \tfrac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots + b_m \cos mx + \cdots$$

Diese Gleichung gilt wie die Gleichung (13), aus der sie abgeleitet ist, für alle Werthe zwischen 0 und π, und der allgemeine Coefficient b_m ist:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos mx f(x)dx.$$

Obgleich die Reihen (13) und (14) beide eine ganz beliebige Function $f(x)$ für das Intervall von 0 bis π darstellen, so sind sie doch wesentlich von einander verschieden. Während die letztere wegen der bekannten Eigenschaft des Cosinus, für entgegengesetzte Werthe des Bogens gleich zu sein, durch die Verwandlung von x in $-x$ unverändert bleibt, nimmt die erstere in demselben Falle den entgegengesetzten Werth an, wie eben so leicht aus der Natur des Sinus erhellt. Man sieht hieraus leicht, dass man unter gewissen Umständen eine Function von x für das Intervall von $-\pi$ bis π durch die Reihe (14) oder (13) darstellen kann. Denkt man sich nämlich unter $f(x)$ eine von $x = 0$ bis $x = \pi$ ganz beliebig gegebene Function von x, und setzt diese Function oder Curve von $x = 0$ bis $x = -\pi$ so fort, dass immer:

$$f(-x) = f(x).$$

so wird diese Function von $x = \pi$ bis $x = -\pi$, durch die Reihe (14) ausgedrückt werden können, denn diese Reihe gilt immer von 0 bis π, und da sie bei der Verwandlung von x in $-x$ unverändert bleibt, welches nach der angegebenen Art der Fortsetzung auch bei der Function der Fall ist, so stellt sie diese auch von 0 bis $-\pi$ dar. Ganz auf dieselbe Weise überzeugt man sich, dass wenn man eine von 0 bis π beliebig gegebene Function so fortsetzt, dass:

$$f(-x) = -f(x),$$

für eine solche Function zwischen $x = -\pi$ und $x = \pi$ die Reihe (13) gilt. Auf diese einfache Bemerkung kann man eine Reihe gründen, welche die Reihen (13) und (14) als besondere Fälle in sich begreift und eine von $x = -\pi$ bis $x = \pi$ ganz willkürlich gegebene Function $\varphi(x)$ darzustellen geeignet ist. — Bringt man nämlich $\varphi(x)$ in die Form:

$$\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2} + \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2},$$

so hat der erste Theil $\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}$ die Eigenschaft, durch Verwandlung von x in $-x$ unverändert zu bleiben, und ist also nach dem Vorhergehenden von $x = -\pi$ bis $x = \pi$ durch (14) ausdrückbar. Eben so lässt sich offenbar der zweite Theil $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2}$ durch die Reihe (13) darstellen, und man hat also für den ganzen Umfang des Intervalls von $-\pi$ bis π, wenn man beide Theile vereinigt:

$$(15) \qquad \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots + b_m\cos mx + \cdots \\ \qquad\qquad + a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_m\sin mx + \cdots, \end{cases}$$

wo die Coefficienten durch die Gleichungen:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos mx[(\varphi x) + \varphi(-x)]dx,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin mx[\varphi(x) - \varphi(-x)]dx$$

zu bestimmen sind. Man kann diesen Ausdrücken eine einfachere Form geben. Es ist nämlich:

$$\int_0^\pi \cos mx[\varphi(x)+\varphi(-x)]dx = \int_0^\pi \cos mx\,\varphi(x)dx + \int_0^\pi \cos mx\,\varphi(-x)dx$$

und nach (5):

$$\int_0^\pi \cos mx\,\varphi(-x)dx = -\int_0^{-\pi} \cos mx\,\varphi(x)dx,$$

oder nach (2), $=\int_{-\pi}^{0}\cos mx\,\varphi(x)\,dx$, folglich:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos mx\,\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos mx\,\varphi(x)\,dx\right)$$

oder nach (9):

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx\,\varphi(x)\,dx.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx\,\varphi(x)\,dx.$$

§. 4.

Wie natürlich und wie befriedigend auch auf den ersten Blick der Gang erscheinen mag, welcher uns zu den Reihen des vorigen Paragraphen geführt hat, so findet man doch bald bei genauerer Erwägung, dass derselbe als strenger Beweis für die Gültigkeit dieser Reihen etwas zu wünschen übrig lässt. Es geht aus dem Begriff des bestimmten Integrals, wie dieser in (1) festgestellt wurde, unbestreitbar hervor, dass irgend ein Coefficient a_m, welcher in der endlichen Reihe eine bestimmte Stelle m einnimmt, bei unaufhörlichem Wachsen von n in das Integral $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin mx\,f(x)\,dx$ übergeht, allein man darf nicht vergessen, dass durch das Zunehmen von n zugleich immer mehr neue Glieder hinzukommen. Um die Richtigkeit der Reihe (13) zu beweisen, müsste man sich die Glieder der endlichen Reihe in zwei Gruppen zerfällt denken: die erste würde alle Glieder bis zu einer bestimmten unveränderlich gedachten Stellenzahl m, die zweite alle übrigen enthalten. Könnte man nun zeigen, dass, während die Coefficienten der Glieder der ersten Gruppe sich ins Unendliche den durch bestimmte Integrale ausgedrückten Werthen nähern, der Inbegriff aller Glieder der zweiten, deren Anzahl mit n unaufhörlich wächst, nie eine gewisse von m abhängige und zwar beliebig klein ausfallende Grenze überschreitet, wenn man das m gehörig gross wählte, so würde man die Gewissheit erlangen, dass die Reihe (13) convergirend ist und die Function $f(x)$ für das Intervall von 0 bis π wirklich darstellt. — Die Nothwendigkeit der eben angedeuteten Nachweisung, wenn man den Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen zu einem ganz strengen Verfahren erheben will, wird im höchsten

Grade einleuchtend, wenn man der endlichen Reihe, von der man ausgeht, eine andere Form giebt. Betrachtet man eine Reihe von der Form:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1},$$

so lassen sich die Coefficienten ebenfalls leicht so bestimmen, dass die Reihe für n Werthe von x innerhalb eines beliebigen Intervalls einer ganz willkürlichen Function $f(x)$ gleich wird. Lässt man nach erlangter Bestimmung irgend eines Coefficienten n unendlich wachsen, während die Stellenzahl m der Coefficienten constant bleibt, so nähert sich der Coefficient unaufhörlich einem gewissen Endwerth, und man würde also durch das im vorigen Paragraphen befolgte Verfahren zu der falschen Folgerung verleitet, eine ganz gesetzlose oder stellenweise ganz anderen Gesetzen gehorchende Function lasse sich durch eine nach Potenzen der Veränderlichen x geordnete Reihe darstellen.

Die Betrachtungen, die dem Verfahren, welches uns die Reihe (13) geliefert hat, die gehörige Strenge geben würden, sind so zusammengesetzter Art, dass wir lieber einen andern Weg der Beweisführung einschlagen. Wir werden die Reihe (15), welche die beiden andern (13) und (14) als besondere Fälle in sich begreift, an und für sich untersuchen und, ohne etwas von dem Früheren vorauszusetzen, direct nachweisen, dass diese Reihe:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_m \cos mx + \cdots \\ + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_m \sin mx + \cdots,\end{aligned}$$

wenn man ihre Coefficienten durch die Gleichungen:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\,\varphi(x)\,dx, \qquad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx\,\varphi(x)\,dx$$

bestimmt, immer convergirt und für alle zwischen $-\pi$ und π enthaltenen Werthe von x der Function $\varphi(x)$ gleich ist.

Schreibt man in den vorhergehenden Integralen statt x einen andern Buchstaben α, was offenbar erlaubt ist, da ein bestimmtes Integral nur von der Natur der Function und den Werthen der Grenzen abhängig ist, und setzt die Werthe für die $2n+1$ ersten Coefficienten ein, so erhält man als Summe der $2n+1$ ersten Glieder der Reihe:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\,\varphi(\alpha) + \frac{1}{\pi}\cos x\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \cos\alpha\,\varphi(\alpha) + \cdots + \frac{1}{\pi}\cos nx\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \cos n\alpha\,\varphi(\alpha) \\ + \frac{1}{\pi}\sin x\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \sin\alpha\,\varphi(\alpha) + \cdots + \frac{1}{\pi}\sin nx\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \sin n\alpha\,\varphi(\alpha)\end{aligned}$$

oder nach (3) und (6):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha\,\varphi(\alpha)\left[\tfrac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\cos 2(\alpha-x)+\cdots+\cos n(\alpha-x)\right]$$

oder endlich, wenn man die Cosinusreihe vermittelst der Formel (11) summirt:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha\,\varphi(\alpha)\,\frac{\sin(2n+1)\,\frac{\alpha-x}{2}}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}}.$$

Soll also die Reihe convergiren und den Werth $\varphi(x)$ haben, so muss der Unterschied zwischen $\varphi(x)$ und diesem Integral, welches die Summe ihrer $2n+1$ ersten Glieder ausdrückt, bei unaufhörlichem Zunehmen von n zuletzt kleiner werden als jede noch so klein gedachte Grösse. Es ist nöthig, der Untersuchung dieses Integrals in seiner ganzen Allgemeinheit die Behandlung einiger einfachen Fälle vorauszuschicken, auf welche sich alle übrigen zurückführen lassen.

§. 5.

Man betrachte zunächst das Integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta,$$

in welchem n wie vorher eine positive ganze Zahl bezeichnet. Setzt man statt $\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}$ den nach (11) äquivalenten Ausdruck:

$$1+2\cos 2\beta+2\cos 4\beta+\cdots+2\cos 2n\beta,$$

so erhellt nach (10), dass alle Glieder mit Ausnahme des ersten zwischen den angegebenen Grenzen integrirt verschwinden, und man findet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man zur Abkürzung $2n+1 = k$ und zerlegt das Integral in $n+1$ andere zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{k}$ und $\frac{2\pi}{k}$, ..., $\frac{n\pi}{k}$ und $\frac{\pi}{2}$, so folgt nach (7), dass von diesen Integralen das erste positiv, das zweite negativ, das dritte positiv u. s. w. sein wird, da $\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}$ innerhalb der Grenzen des ersten positiv, des zweiten negativ u. s. w. ist. Bezeichnet man das Integral des Ranges ν,

d. h. das von $\frac{(\nu-1)\pi}{k}$ bis $\frac{\nu\pi}{k}$ genommene, abgesehen von seinem Zeichen, mit ϱ_ν, so dass also:

$$\varrho_\nu = \mp\int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\, d\beta,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem ν gerade oder ungerade ist, so folgt leicht aus (8), da $\mp\sin k\beta$ von $\frac{(\nu-1)\pi}{k}$ bis $\frac{\nu\pi}{k}$ stets positiv bleibt, dass ϱ_ν zwischen den beiden Producten liegt, welche man erhält, wenn man:

$$\int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \mp\sin k\beta d\beta = \frac{2}{k}$$

mit dem grössten und kleinsten Werth multiplicirt, den der Factor $\frac{1}{\sin\beta}$ in dem genannten Intervall annimmt.

Das vorhergehende Integral ist nach (4):

$$= \int_0^{\frac{\pi}{k}} \mp\sin((\nu-1)\pi+k\beta)d\beta = \int_0^{\frac{\pi}{k}} \sin k\beta d\beta,$$

oder nach (5):

$$= \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \sin\beta d\beta = \frac{\Delta}{k},$$

wenn man zur Abkürzung den von k unabhängigen Werth $\int_0^{\pi}\sin\beta d\beta$ mit Δ bezeichnet.

Was den Factor $\frac{1}{\sin\beta}$ betrifft, so ist dieser um so kleiner, als β grösser ist. Sein grösster Werth ist daher $\frac{1}{\sin\frac{(\nu-1)\pi}{k}}$ und der kleinste $\frac{1}{\sin\frac{\nu\pi}{k}}$, so dass also:

$$\varrho_\nu > \frac{\Delta}{k}\,\frac{1}{\sin\frac{\nu\pi}{k}} \quad \text{und} \quad \varrho_\nu < \frac{\Delta}{k}\,\frac{1}{\sin\frac{(\nu-1)\pi}{k}}.$$

Für das letzte Integral ϱ_{n+1} gelten die Grenzen $\frac{\Delta}{k}$ und $\frac{\Delta}{k}\frac{1}{\sin\frac{n\pi}{k}}$, die sich auf dieselbe Weise ergeben. Vergleicht man die Grenzen, zwischen welchen je zwei auf einander folgende Integrale liegen, so ergiebt sich auf der Stelle, dass $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_{n+1}$ eine abnehmende Reihe bilden, d. h.:

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \cdots > \varrho_{n+1}.$$

Das ursprüngliche, später in $n+1$ andre Integrale zerlegte Integral hatte den Werth $\frac{\pi}{2}$. Es findet also folgende Gleichung statt:

$$\frac{\pi}{2} = \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 + \cdots \pm \varrho_{n+1}.$$

Aus der Abnahme der Glieder $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ folgt leicht, wenn man die Reihe bei ihrem $2m^{\text{ten}}$ und $(2m+1)^{\text{ten}}$ Gliede abbricht (wo natürlich $2m < n$):

$$(16)\qquad \begin{cases} \frac{\pi}{2} > \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \cdots - \varrho_{2m}, \\ \frac{\pi}{2} < \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \cdots - \varrho_{2m} + \varrho_{2m+1}. \end{cases}$$

Um sich zu überzeugen, dass diese Ungleichheiten stattfinden, darf man nur bemerken, dass im ersten Falle die weggebrachten Glieder, wenn man sie paarweise vereinigt, $\varrho_{2m+1} - \varrho_{2m+2}, \varrho_{2m+3} - \varrho_{2m+4}, \ldots$, positive Differenzen geben, und dass man also etwas positives weglässt, und das Umgekehrte für den zweiten gilt.

Wir wenden uns jetzt zu der Betrachtung des Integrals:

$$\int_0^h \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} f(\beta)\, d\beta = S,$$

wo h eine positive $\frac{\pi}{2}$ nicht übersteigende Constante und $f(\beta)$ eine stetige Function von β bezeichnet, welche, während β von 0 bis h wächst, immer positiv bleibt und nie zunimmt. Ich sage absichtlich, nie zunimmt, um den Fall nicht auszuschliessen, wo $f(\beta)$ stellenweise oder für das ganze Intervall constant bliebe. Der Buchstabe k ist nur zur Abkürzung für $2n+1$ eingeführt, und wir wollen untersuchen, wie sich S verändert, wenn n ohne Grenze wächst. Es sei $r\frac{\pi}{k}$ das grösste in h enthaltene Vielfache von $\frac{\pi}{k}$, wo offenbar die ganze Zahl r nicht grösser als n sein kann, und man zerlege das Integral in $r+1$ andere, zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{k}$ und $\frac{2\pi}{k}$, ..., $\frac{r\pi}{k}$ und h, so sind diese Integrale wieder abwechselnd positiv und negativ. Bezeichnet man dasjenige, welches die r^{te} Stelle einnimmt, abgesehen von seinem Zeichen, mit R_ν, so dass also:

$$R_\nu = \mp \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} f(\beta)\, d\beta,$$

wo wieder das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem ν gerade oder ungerade ist, so hat man:

$$S = R_1 - R_2 + R_3 \cdots \cdots \pm R_{r+1}.$$

Die positiven Werthe R_1, R_2, R_3, ... bilden eine abnehmende Reihe, wie man sich leicht überzeugt, wenn man auf R_ν den Satz (8) anwendet. Man findet unter Berücksichtigung der über $f(\beta)$ gemachten Voraussetzung, dass:

$$R_\nu = \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \mp \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} f(\beta)\, d\beta$$

zwischen den beiden Producten:

$$f\left(\frac{\nu\pi}{k}\right)\int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \mp \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\, d\beta \quad \text{und} \quad f\left(\frac{(\nu-1)\pi}{k}\right)\int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \mp \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\, d\beta$$

liegt, d. h. also:

$$R_\nu > \varrho_\nu f\left(\frac{\nu\pi}{k}\right), \quad R_\nu < \varrho_\nu f\left(\frac{(\nu-1)\pi}{k}\right)\text{*)}.$$

Vergleicht man die untere Grenze $\varrho_\nu f\left(\frac{\nu\pi}{k}\right)$ für R_ν mit der obern für $R_{\nu+1}$, welche $\varrho_{\nu+1} f\left(\frac{\nu\pi}{k}\right)$ ist, so folgt wegen $\varrho_\nu > \varrho_{\nu+1}$, dass auch $R_\nu > R_{\nu+1}$, wie vorher behauptet wurde. Bricht man die Reihe S bei R_{2m} und R_{2m+1} ab (wo $2m < r$), so ergeben sich die Ungleichheiten:

$$S > R_1 - R_2 + R_3 - \cdots\cdots - R_{2m},$$
$$S < R_1 - R_2 + R_3 - \cdots\cdots - R_{2m} + R_{2m+1}.$$

~~Die erste dieser Ungleichheiten wird nicht aufhören, richtig zu bleiben,~~ wenn man statt der zu addirenden Glieder R_1, R_3, ... ihre unteren Grenzen $\varrho_1 f\left(\frac{\pi}{k}\right)$, $\varrho_3 f\left(\frac{3\pi}{k}\right)$, ... und statt der zu subtrahirenden R_2, R_4, ... ihre oberen

*) Wäre $f\left(\frac{\nu\pi}{k}\right) = f\left(\frac{(\nu-1)\pi}{k}\right)$, so würden die beiden Grenzen zusammenfallen, und man muss um alle Fälle zu umfassen, mit dem Zeichen $t > u$ den Sinn verbinden, dass t nicht kleiner als u ist.

Grenzen $\varrho_2 f\left(\frac{\pi}{k}\right)$, $\varrho_4 f\left(\frac{3\pi}{k}\right)$, ... setzt. Hierdurch und durch Anwendung des umgekehrten Verfahrens auf die untere Ungleichheit erhält man:

$$S > (\varrho_1-\varrho_2)f\left(\frac{\pi}{k}\right)+(\varrho_3-\varrho_4)f\left(\frac{3\pi}{k}\right)+\cdots+(\varrho_{2m-1}-\varrho_{2m})f\left(\frac{(2m-1)\pi}{k}\right),$$

$$S < \varrho_1 f(0)-(\varrho_2-\varrho_3)f\left(\frac{2\pi}{k}\right)-(\varrho_4-\varrho_5)f\left(\frac{4\pi}{k}\right)-\cdots-(\varrho_{2m}-\varrho_{2m+1})f\left(\frac{2m\pi}{k}\right).$$

Da die Differenzen $\varrho_1-\varrho_2$, $\varrho_2-\varrho_3$, $\varrho_3-\varrho_4$, ... positiv sind und die Function $f(\beta)$ nie zunimmt, so darf man offenbar in der ersten Ungleichheit $f\left(\frac{\pi}{k}\right)$, $f\left(\frac{3\pi}{k}\right)$, ... und in der zweiten $f\left(\frac{2\pi}{k}\right)$, $f\left(\frac{4\pi}{k}\right)$, ... mit $f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$ vertauschen. Es ist also:

$$S > (\varrho_1-\varrho_2+\varrho_3-\cdots-\varrho_{2m})f\left(\frac{2m\pi}{k}\right),$$

$$S < \varrho_1 f(0)-(\varrho_2-\varrho_3+\varrho_4-\cdots-\varrho_{2m+1})f\left(\frac{2m\pi}{k}\right).$$

Die Zahl $2m$ ist kleiner als r, und also um so mehr kleiner als n, so dass die Resultate (16) stattfinden.

Die dort gefundenen Ungleichheiten lassen sich in die Form bringen:

$$\varrho_2-\varrho_3+\cdots+\varrho_{2m} > \varrho_1-\frac{\pi}{2}, \quad \varrho_1-\varrho_2+\cdots-\varrho_{2m} > \frac{\pi}{2}-\varrho_{2m+1}.$$

Vergleicht man diese, nachdem man von beiden Seiten der ersten ϱ_{2m+1} abgezogen hat, mit den vorher erhaltenen Grenzen für S, so ergeben sich folgende höchst einfache Resultate:

$$S > \frac{\pi}{2}f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)-\varrho_{2m+1}f\left(\frac{2m\pi}{k}\right),$$

$$S < \frac{\pi}{2}f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)+\varrho_{2m+1}f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)+\varrho_1\left|f(0)-f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right|.$$

Unser Zweck war, die allmähliche Veränderung des Integrals:

$$S=\int_0^h \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}f(\beta)d\beta$$

zu untersuchen, wenn man in demselben $k=2n+1$ nimmt und die ganze Zahl n über jede Grenze hinaus wachsen lässt. Diese Frage wird auf der Stelle durch die eben gefundenen Ausdrücke beantwortet. Nach dem Früheren ist die darin enthaltene gerade Zahl $2m$ für ein bestimmtes n insofern noch willkürlich, als sie jeden r nicht übersteigenden Werth haben kann, wo r wie früher das grösste in $\frac{h}{\pi}k = \frac{h}{\pi}(2n+1)$ enthaltene Ganze bezeichnet. Da hiernach r offenbar gleichzeitig mit n über jede Grenze hinaus wächst, so darf auch $2m$ jede Grenze überschreiten.

Denkt man sich nun das gleichzeitige Wachsen von $2m$ und n so, dass dabei $\frac{2m}{k}$ successive jeden Grad von Kleinheit erreicht, so werden die für S gefundenen Grenzen zuletzt zusammenfallen. Betrachtet man zunächst die untere Grenze:

$$\frac{\pi}{2}f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) - \varrho_{2m+1}f\left(\frac{2m\pi}{k}\right),$$

so wird unter der angegebenen Voraussetzung ihr erstes Glied zuletzt in $\frac{\pi}{2}f(0)$ übergehen; was das zweite betrifft, so liegt der Factor ϱ_{2m+1} nach Obigem zwischen:

$$\frac{A}{k}\,\frac{1}{\sin\frac{2m\pi}{k}} \quad \text{und} \quad \frac{A}{k}\,\frac{1}{\sin\frac{(2m+1)\pi}{k}}.$$

Schreibt man diese in folgender Form:

$$\frac{A}{2m\pi}\,\frac{\frac{2m\pi}{k}}{\sin\frac{2m\pi}{k}} \quad \text{und} \quad \frac{A}{(2m+1)\pi}\,\frac{(2m+1)\frac{\pi}{k}}{\sin(2m+1)\frac{\pi}{k}},$$

so ist leicht zu sehen, dass beide zuletzt verschwinden. Durch das unaufhörliche Wachsen von m nähert sich $\frac{A}{2m\pi}$ der Null, während $\frac{\frac{2m\pi}{k}}{\sin\frac{2m\pi}{k}}$ wegen des Abnehmens von $\frac{2m\pi}{k}$ sich der Einheit nähert. Das Product wird also Null, und dasselbe gilt von dem zweiten. Es geht hieraus hervor, dass die untere Grenze für S zuletzt mit $\frac{\pi}{2}f(0)$ zusammenfällt. Die beiden ersten Glieder in der oberen Grenze sind den schon untersuchten ganz ähnlich, und es bleibt uns nur noch das dritte $\varrho_1\left[f(0) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right]$ zu betrachten. Der zweite Factor nähert sich offenbar der Null, und dieses Glied wird also verschwinden, wenn der erste nicht über jede Grenze hinaus wächst. Dass dieses aber nicht der Fall ist, folgt sogleich aus den beiden Ungleichheiten:

$$\varrho_1 < \frac{\pi}{2} + \varrho_2, \quad \varrho_2 < \frac{\Delta}{k} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}},$$

von denen die erste aus (16) hervorgeht, wenn man dort $m = 1$ setzt. Beide mit einander verglichen ergeben:

$$\varrho_1 < \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta}{k} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}},$$

und der Werth von:

$$\frac{\Delta}{k} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta}{\pi} \frac{\frac{\pi}{k}}{\sin\frac{\pi}{k}}$$

nähert sich durch das Wachsen von k dem Werthe $\frac{\Delta}{\pi}$.

Es ist somit streng bewiesen, dass die beiden Grenzen, zwischen denen S eingeschlossen ist, bei unaufhörlichem Wachsen von n zuletzt mit $\frac{\pi}{2} f(0)$ zusammenfallen, welcher Werth also auch der des Integrals:

$$\int_0^h \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} f(\beta) d\beta$$

für ein unendlich grosses n ist.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die Function $f(\beta)$, während β von 0 bis h wächst, nie zunimmt und ausserdem stets positiv bleibt. Behält man die erste Bedingung bei, d. h. setzt man voraus, dass für irgend zwei zwischen 0 und h fallende Werthe p und q die Differenz $f(p) - f(q)$ immer negativ oder Null ist, wenn $p - q$ positiv ist, ohne damit die zweite Annahme zu verbinden, dass $f(\beta)$ nicht negativ wird, so findet der vorige Satz ebenfalls noch statt. Nimmt man nämlich eine positive Constante c, welche so gross ist, dass $f(\beta) + c$ nicht negativ wird, so ist der Satz auf $f(\beta) + c$ anwendbar, d. h. das Integral:

$$\int_0^h [f(\beta) + c] \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} d\beta$$

wird für ein unendlich grosses n:

$$\frac{\pi}{2} [f(0) + c].$$

Zugleich ist klar, dass dieses Integral die Summe von folgenden ist:

$$\int_0^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta, \quad \int_0^h c\,\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta,$$

von denen das zweite in demselben Falle $\frac{\pi}{2}c$ wird. (Es ist nämlich bei der vorigen Behandlung der Fall mit eingeschlossen worden, wo die positive Function im ganzen Intervall constant war). Also muss das erste durch unaufhörliches Wachsen von n zuletzt den Werth $\frac{\pi}{2}f(0)$ annehmen.

Denkt man sich jetzt eine Function $f(\beta)$, die, während β von 0 bis h wächst, nie abnimmt, so wird $-f(\beta)$ nie zunehmen. Man hat also, wenn n unendlich wächst:

$$\int_0^h -f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta = -\frac{\pi}{2}f(0)$$

und folglich:

$$\int_0^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2}f(0).$$

Die vorhergehenden Resultate lassen sich in folgenden Satz zusammenfassen:

(17) Ist $f(\beta)$ eine stetige Function von β, die, während β von 0 bis h wächst (wo die Constante $h>0$ und $<\frac{\pi}{2}$), nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht, so wird das Integral:

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}f(\beta)\,d\beta,$$

wenn man darin der ganzen Zahl n immer grössere positive Werthe beilegt, zuletzt immerfort weniger als jede angebbare Grösse von $\frac{\pi}{2}f(0)$ verschieden sein.

Die Constante h bleibe den vorigen Bestimmungen unterworfen und man denke sich unter g eine zweite Constante, welche kleiner als h und zugleich positiv und von Null verschieden sei. Ist $f(\beta)$ eine für das Intervall von g bis h gegebene stetige Function von β, die, wenn β von g bis h wächst, nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht, so lässt sich nach dem vorigen Satz leicht ermitteln, was aus dem Integral:

$$\int_g^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}f(\beta)\,d\beta$$

wird, wenn man n unendlich werden lässt. Da nämlich $f(\beta)$ bloss von $\beta = g$ bis $\beta = h$ gegeben ist, so bleibt die Art der Fortsetzung dieser Function über das genannte Intervall hinaus ganz willkürlich. Denkt man sich $f(\beta)$ für alle Werthe von β zwischen 0 und g incl. constant, und zwar $= f(g)$, so hat man eine von $\beta = 0$ bis $\beta = h$ stetige Function, welche in diesem ganzen Intervall nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht, und auf welche daher der vorige Satz anwendbar ist. Es wird daher das Integral:

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta) d\beta,$$

wenn man $n = \infty$ setzt, $= \frac{\pi}{2} f(0) = \frac{\pi}{2} f(g)$ sein. Zerlegt man dasselbe Integral in die folgenden:

$$\int_0^g \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta) d\beta + \int_g^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta) d\beta$$

so wird auch das erste $= \frac{\pi}{2} f(0) = \frac{\pi}{2} f(g)$ nach dem vorigen Satz, also muss das zweite für ein unendliches n verschwinden. Es gilt also der Satz:

(18) Sind g und h Constanten, welche den Bedingungen genügen $g > 0$, $\frac{\pi}{2} > h > g$, und geht die Function $f(\beta)$, wenn β von g bis h wächst, nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt über, so wird das Integral:

$$\int_g^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta) d\beta$$

für ein unendlich grosses n der Null gleich.

Vermittelst der Sätze (17) und (18) ist es nun leicht, die zu Ende des §. 4. aufgestellte Behauptung zu beweisen.

§. 6.

Die Summe der $2n+1$ ersten Glieder der zu untersuchenden Reihe war durch das Integral:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\beta \varphi(\beta) \frac{\sin(2n+1)\frac{\beta - x}{2}}{2\sin\frac{\beta - x}{2}}$$

ausgedrückt. Wir haben früher vorausgesetzt, dass die Function $\varphi(\beta)$ für das ganze Intervall von $\beta = -\pi$ bis $\beta = \pi$ stetig ist: wir können aber, ohne die folgende Untersuchung im Geringsten zu erschweren, die Annahme machen, dass $\varphi(\beta)$ für einzelne Werthe von β eine plötzliche Veränderung erleidet, ohne jedoch unendlich zu werden. Die Curve, deren Abscisse β und deren Ordinate $\varphi(\beta)$ ist, besteht alsdann aus mehreren Stücken, deren Zusammenhang über den Punkten der Abscissenaxe, die jenen besonderen Werthen von β entsprechen, unterbrochen ist, und für jede solche Abscisse finden eigentlich zwei Ordinaten statt, wovon die eine dem dort endenden und die andere dem dort beginnenden Curvenstück angehört. Es wird im Folgenden nöthig sein, diese beiden Werthe von $\varphi(\beta)$ zu unterscheiden, und wir werden sie durch $\varphi(\beta-0)$ und $\varphi(\beta+0)$ bezeichnen. Um unnütze, die folgende Darstellung verlängernde Unterscheidungen zu vermeiden, bemerke man, dass dieselbe Bezeichnung auch für die Werthe von β gelten kann, für welche keine Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet, wo dann natürlich $\varphi(\beta-0)$ und $\varphi(\beta+0)$ beide mit $\varphi(\beta)$ gleichbedeutend sind.

Das obige Integral lässt sich nach (9) in die folgenden zerlegen:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x} d\beta\,\varphi(\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\,\frac{\beta-x}{2}}{2\sin\frac{\beta-x}{2}}\,,\qquad \frac{1}{\pi}\int_{x}^{\pi} d\beta\,\varphi(\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\,\frac{\beta-x}{2}}{2\sin\frac{\beta-x}{2}}$$

oder nach (4):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-(\pi+x)}^{0} d\beta\,\varphi(x+\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\,\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}}\,,\qquad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi-x} d\beta\,\varphi(x+\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\,\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}}\,.$$

Wendet man (3) auf beide an und nachher noch (2) und (5) auf das erste, so kommt:

$$(19)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi+x}{2}} d\beta\,\varphi(x-2\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,,\qquad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi-x}{2}} d\beta\,\varphi(x+2\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,.$$

Wir betrachten jetzt das zweite dieser Integrale, abgesehen von dem constanten Factor $\frac{1}{\pi}$. Da x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, so liegt $\frac{\pi-x}{2}$ zwischen 0 und π. Ist $\frac{\pi-x}{2} = 0$, was für $x = \pi$ der Fall ist, so ist das Integral für jedes n Null und erfordert keine weitere Untersuchung. Nehmen wir zunächst an, $\frac{\pi-x}{2}$ sei nicht grösser als $\frac{\pi}{2}$. Man bezeichne mit $c_1, c_2, \ldots c_\nu$, wie sie der Grösse nach auf einander folgen, die Werthe von β, für welche *erstens* $\varphi(x+2\beta)$ innerhalb des Intervalls von $\beta=0$ bis $\beta=\frac{\pi-x}{2}$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet und *zweitens* vom Zunehmen ins Abnehmen oder vom Abnehmen ins Zunehmen übergeht, und zerlege das Integral in andere zwischen den Grenzen 0 und c_1, c_1 und c_2, ..., c_ν und $\frac{\pi-x}{2}$ genommen. Auf alle diese neuen Integrale, mit Ausnahme des ersten, ist der Satz (18) offenbar anwendbar, da innerhalb der Grenze eines jeden die Function keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet und nicht vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht: alle nähern sich daher ins Unendliche der Null, wenn man n über alle Grenzen hinaus wachsen lässt. Das erste hingegen erfüllt die Bedingungen (17) und geht bei unaufhörlichem Wachsen von n zuletzt in den Werth $\frac{\pi}{2}\varphi(x+0)$ über. Also wird das Integral:

$$\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} d\beta\varphi(x+2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}$$

für $n=\infty$ den Werth $\frac{\pi}{2}\varphi(x+0)$ annehmen.

Liegt $\frac{\pi-x}{2}$ über $\frac{\pi}{2}$ oder ist x negativ, so zerlege man das vorige Integral in zwei andere zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi-x}{2}$. Auf das erste dieser neuen Integrale bleibt das vorige Verfahren anwendbar, und dasselbe wird also $\frac{\pi}{2}\varphi(x+0)$, wenn man n unendlich gross werden lässt. Das andere:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\beta\varphi(x+2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}$$

kann nach (4) und (5) in die Form gebracht werden:

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi+x}{2}} d\beta\varphi(x+2\pi-2\beta)\frac{\sin(2n+1)(\pi-\beta)}{\sin(\pi-\beta)}.$$

Wendet man (2) an, und setzt $\sin\beta$ statt $\sin(\pi-\beta)$ und $\sin(2n+1)\beta$ statt $\sin(2n+1)(\pi-\beta)$ (da n eine ganze Zahl ist), so geht das Integral über in:

$$\int_{\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x+2\pi-2\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta.$$

Da x, wie vorher gesagt wurde, in diesem Falle negativ ist und also zwischen 0 und $-\pi$ liegt, so ist $\frac{\pi+x}{2}$ positiv und von Null verschieden, den einzigen Fall ausgenommen, wo $x=-\pi$. Zerlegt man das Integral in andere, zwischen deren Grenzen $\varphi(x+2\pi-2\beta)$ weder eine Unterbrechung der Continuität erleidet noch aus dem Zunehmen ins Abnehmen oder umgekehrt übergeht, so werden alle diese Integrale nach (18) für $n=\infty$ der Null gleich. Dieses Resultat gilt nicht, wenn $\frac{\pi+x}{2}=0$ und also $x=-\pi$, da alsdann auf das erste der durch Zerlegung entstehenden Integrale nicht der Satz (18) sondern der Satz (17) angewendet werden muss. Dieses erste Integral ist alsdann (wegen $x=-\pi$):

$$\int_0^{\varepsilon} d\beta\,\varphi(x+2\pi-2\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} = \int_0^{\varepsilon} d\beta\,\varphi(\pi-2\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}$$

und wird also für $n=\infty$ den Werth $\frac{\pi}{2}\varphi(\pi-0)$ erhalten, während alle übrigen verschwinden.

Vereinigt man die verschiedenen für das zweite Integral (19) gefundenen Resultate, so ergiebt sich, dass dieses Integral durch unaufhörliches Wachsen der darin enthaltenen ganzen Zahl n für jedes zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gelegene x in den Werth $\frac{1}{2}\varphi(x+0)$ übergeht. Für $x=\pi$ und $x=-\pi$ erleidet das Resultat eine Ausnahme: in dem erstern Falle ist das Integral Null, im andern wird es $\frac{1}{2}[\varphi(\pi-0)+\varphi(-\pi+0)]$. Aus einer ganz ähnlichen Untersuchung des ersten Integrals (19) folgt, dass dasselbe für $n=\infty$ im Allgemeinen $\frac{1}{2}\varphi(x-0)$ wird, aber in den besondern Fällen, $x=-\pi$ und $x=\pi$, respective Null und $\frac{1}{2}[\varphi(\pi-0)+\varphi(-\pi+0)]$.

Erinnert man sich nun, dass die beiden Integrale (19) zusammengenommen die Summe der $2n+1$ ersten Glieder der Reihe darstellen:

$$(20)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots+b_m\cos mx+\cdots \\ \qquad +a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_m\sin mx+\cdots, \end{cases}$$

wo die Coefficienten durch die Gleichungen:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\beta\varphi(\beta)\cos m\beta, \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\beta\varphi(\beta)\sin m\beta$$

zu bestimmen sind, so geht aus dem Vorhergehenden ganz streng hervor, dass diese Reihe immer convergirt, d. h. dass es immer einen gewissen Werth giebt, von dem die Summe der $2n+1$ ersten Glieder der Reihe, wenn n über alle Grenzen hinaus wachsend gedacht wird, zuletzt immerfort um weniger als jede angebbare Grösse verschieden sein wird, und dass dieser Werth oder die Summe der unendlichen Reihe, wenn x zwischen $-\pi$ und π liegt, durch $\frac{1}{2}[\varphi(x+0)+\varphi(x-0)]$, für $x=\pi$ und $x=-\pi$ aber durch $\frac{1}{2}[\varphi(\pi-0)+\varphi(-\pi+0)]$ dargestellt wird.

Dieses Resultat umfasst alle Fälle: ist x keiner von den besondern Werthen, für welche die Stetigkeit von $\varphi(x)$ unterbrochen wird, so sind $\varphi(x+0)$ und $\varphi(x-0)$ einander gleich, und der Werth der Reihe wird also $\varphi(x)$. Wo eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt und also die Function $\varphi(x)$ eigentlich zwei Werthe hat, stellt die Reihe, welche ihrer Natur nach für jedes x einwerthig ist, die halbe Summe dieser Werthe dar. An den Grenzen des Intervalls von $-\pi$ bis $+\pi$, d. h. für diese Werthe selbst, ist die Summe der unendlichen Reihe gleich der halben Summe der beiden Werthe $\varphi(\pi)$ und $\varphi(-\pi)$. Man sieht daraus, dass die Reihe die Function $\varphi(x)$ an den Grenzen des Intervalls nur dann richtig darstellt, wenn $\varphi(\pi)=\varphi(-\pi)$ ist.

Wir haben schon früher bemerkt, dass die eben untersuchte Reihe (20) oder (15) die Reihen (13) und (14) als specielle Fälle in sich begreift. Man braucht sich nur die Function $\varphi(x)$ für den halben Umfang des Intervalls, nämlich $x=0$ bis $x=\pi$, als ganz beliebig gegeben zu denken und für die Werthe zwischen 0 und $-\pi$ fortgesetzt zu denken, wie es die Gleichungen $\varphi(-x)=\varphi(x)$ oder $\varphi(-x)=-\varphi(x)$ vorschreiben, um respective zu (14) und (13) zu gelangen. Ich will dies noch mit zwei Worten für den ersten Fall zeigen, weil sich aus dieser Ableitung eine Eigenschaft der Reihe (14) ergiebt, welche bei der frühern Behandlung nicht hervortrat.

Setzt man die von 0 bis π beliebige Function $\varphi(x)$ nach der Gleichung $\varphi(-x)=\varphi(x)$ fort, so ist klar, dass für $x=0$ keine Unterbrechung der Stetigkeit eintreten und dass $\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)$ sein wird. Die Reihe (20) wird also $\varphi(0)$ für $x=0$, und $\varphi(\pi)$ für $x=\pi$. Die Gleichungen für die Coefficienten werden durch Zerlegung der darin enthaltenen Integrale:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} d\beta\varphi(\beta)\cos m\beta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d\beta\varphi(\beta)\cos m\beta,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} d\beta\varphi(\beta)\sin m\beta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d\beta\varphi(\beta)\sin m\beta.$$

Wendet man auf die beiden von $-\pi$ bis 0 genommenen Integrale nach einander (5) und (2) an und berücksichtigt, dass:

$$\varphi(-\beta) = \varphi(\beta), \quad \cos(-m\beta) = \cos m\beta, \quad \sin(-m\beta) = -\sin m\beta,$$

so erhält man:

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} d\beta\varphi(\beta)\cos m\beta, \quad a_m = 0.$$

Die von $x = 0$ bis $x = \pi$ ganz beliebig gegebene Function $\varphi(x)$ wird also durch die Reihe:

$$\tfrac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots + b_m\cos mx + \cdots$$

dargestellt, welche auch für die das Intervall begrenzenden Werthe 0 und π noch gültig ist. Es versteht sich dabei von selbst, dass, wenn $\varphi(x)$ zwischen 0 und π eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, die Reihe für jeden solchen Werth von x die halbe Summe der entsprechenden Werthe von $\varphi(x)$ ausdrückt. Auf ganz ähnliche Weise gelangt man zu der Reihe (13) und findet, dass diese im Allgemeinen für $x = 0$ und $x = \pi$ nicht mehr richtig ist, was sich aber in diesem Fall ganz von selbst versteht, da die Reihe, wie auch ihre Coefficienten beschaffen sein mögen, für die genannten Werthe verschwindet.