ACM0769
UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 09/12/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B24957
035/2: : |a (CaOTULAS)160430348
040: : |a MiU |c MiU
041:1 : |a fre |h ger
100:1 : |a Du Bois-Reymond, Paul, |d 1831-1889.
245:00: |a Théorie générale des fonctions. |c Traduit de l'allemand par G. Milhard et A. Girot. |n Première partie. |p Métaphysique et théorie des concepts mathématiques fondamentaux: grandeur, limite, argument et fonction.
260: : |a Nice, |c 1887.
300/1: : |a 222, [2] p. |b il. |c 23 cm.
500/1: : |a No more published?
650/1: 0: |a Functions
700/1:1 : |a Milhaud, Georges, |e tr.
700/2:1 : |a Girot, A., |d 1855- |e joint tr.
998: : |c WFA |s 9124

THÉORIE GÉNÉRALE
DES FONCTIONS

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE GÉNÉRALE

DES FONCTIONS

DE

PAUL DU BOIS-REYMOND

TRADUIT DE L'ALLEMAND

PAR

G. MILHAUD

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE DU HAVRE

ET

A. GIROT

PROFESSEUR AGRÉGÉ D'ALLEMAND AU LYCÉE DU HAVRE

PREMIÈRE PARTIE

**Métaphysique et Théorie des Concepts mathématiques fondamentaux :
Grandeur, Limite, Argument et Fonction**

NICE
IMPRIMERIE NIÇOISE, DESCENTE CROTTI, 8

1887

Quand MM. Milhaud et Girot m'ont fait part de leur intention de traduire ma *Théorie Générale des Fonctions* qui, publiée en 1882, avait même été rédigée environ cinq ans auparavant, j'ai voulu profiter d'une aussi belle occasion pour remanier quelques passages, pour insister sur plusieurs points qui ont acquis aujourd'hui plus d'actualité, enfin, pour faire quelques additions. Ces changements ne touchent d'ailleurs nullement au fond des matières exposées dans mon livre. Au contraire, les critiques assez nombreuses qui en ont paru, plus souvent encore contradictoires entre elles qu'en opposition avec mes vues, m'ont convaincu plus que jamais que j'ai réussi à mettre au jour la vraie nature de la connaissance exacte et des concepts métaphysiques sur lesquels elle se fonde.

PAUL DU BOIS-REYMOND.

Berlin, 15 Mai 1887.

Le souci trop exclusif de la rigueur donne à l'enseignement des mathématiques une forme souvent dogmatique. Ceux qui ont reçu cet enseignement dans les lycées ou les facultés sont longtemps sans comprendre qu'il puisse y avoir, à propos de ces sciences, des questions capables de diviser les penseurs, et toute discussion philosophique sur les notions essentielles des mathématiques est souvent mal accueillie par la simple raison qu'on en sent difficilement la nécessité.

Or, voici précisément un livre, écrit par un éminent géomètre de Berlin, rempli de discussions savantes sur les concepts fondamentaux de grandeur, limite, fonction. Que la manière de voir de l'auteur soit juste ou inexacte, peu importe : il met en question des problèmes philosophiques du plus haut intérêt touchant ainsi à ce que les mathématiciens considèrent trop d'ordinaire comme une arche sainte : Voilà pourquoi, il nous a paru utile d'en publier une traduction.

Nous n'entrerons pas dans les débats que soulève ce livre. Nous voulons seulement, pour préparer à sa lecture ceux qui ont puisé leur instruction mathématique dans des traités ou cours spéciaux, faire comprendre à grands traits comment les mathématiques peuvent donner lieu à des discussions intéressantes sur l'origine et la formation de leurs concepts. Nous ferons voir pour cela que l'enchaînement rigoureux des déductions auquel tend l'enseignement est, en réalité, postérieur au développement normal de ces sciences et qu'il n'atteint cet idéal de rigueur que pour devenir de plus en plus formel et, par cela même, de plus en plus subjectif.

Quand on ouvre un traité de mathématiques, on est frappé de l'importance du rôle que jouent les définitions. Chacune d'elles sert de base à un développement plus ou moins long formant tout un chapitre nouveau. Ce sont, pour ainsi dire, les éléments vitaux des mathématiques : la puissance de déduction de l'esprit semblait épuisée sur les premiers objets de ses études ; une définition survient et apporte un nouvel aliment à son activité. C'est ainsi que les définitions semblent chaque fois assurer une prolongation de vie aux mathématiques de manière à en reculer les bornes à l'infini. — Or que renferme une définition ? — A quelle condition est-elle acceptable ?

Une définition a pour objet de construire une chose ou un fait à l'aide de certaines propriétés reliant l'élément nouveau à ceux déjà connus ; et la seule condition imposée à ces propriétés paraît être qu'elles ne présentent entre elles aucune contradiction logique. C'est le seul point sur lequel on juge utile d'insister, quand, en mathématiques, on sent le besoin de *justifier* une définition. Mais alors la première impression que donne la lecture d'un traité spécial est des plus étranges. Il semble que l'esprit puisse se donner libre carrière : n'a-t-il pas, pour créer ses définitions, un champ sans limites ? — et non seulement on sent bien que la science mathématique ne saurait avoir de bornes, mais encore on se demande s'il ne pourrait exister une infinité de mathématiques distinctes de celles qui sont enseignées, si enfin celles-ci ne sont pas dues à un caprice de l'intelligence humaine qui se serait plu à suivre une voie parmi tant d'autres également accessibles ? — En géométrie, passe encore ! On se sent vaguement guidé par des corps, par des formes, semblables à ce que nous montre le monde extérieur, mais que dire de l'analyse, maintenant surtout que, grâce aux travaux de reconstruction des Lagrange, Cauchy, Abel, etc.... il est facile de parvenir aux notions les plus élevées sans faire intervenir d'autre donnée expérimentale que le nombre. (*)

Pour se rassurer et voir disparaître le caractère capricieux et arbitraire des mathématiques il faut remonter à la genèse des notions qu'elles étudient et regarder un peu par-dessous cet arrangement parfait qu'on nous présente aujourd'hui.

On distingue ordinairement les mathématiques pures et les mathématiques appliquées, les premières étant la géométrie et l'analyse, les autres étant des applications de celles-là. C'est mal indiquer qu'une seule question de degré justifie cette distinction. La géométrie et l'analyse sont les premières et les plus simples applications de la *mathématique*, c'est-à-dire de ces suites spéciales de déductions, de ces méthodes logiques particulières qui appartiennent à toutes les sciences mathématiques, abstration faite de leurs objets. On sait d'abord que les données premières de la géométrie et de l'analyse sont puisées dans le monde extérieur. La géométrie lui emprunte l'étendue,

(*) Voir l'Introduction à l'étude des fonctions d'une variable de M. J. Tannery.

le point, la ligne droite, avec toutes leurs propriétés intuitives. L'analyse est fondée sur le nombre, dont l'idée nous est fournie par l'expérience, et sur ses propriétés. Ce sont là des vérités naïves sur lesquelles il est inutile d'insister. Mais les points de départ ainsi fixés, l'indétermination du chemin à suivre n'en subsisterait pas moins, si la géométrie ou l'analyse ne se laissaient guider par des données extérieures, et c'est précisément, en dépit des apparences, ce qu'elles font sans cesse. Nous ne voulons pas parler ici seulement du postulat d'Euclide qui, loin d'être un axiome logique, est nettement déjà l'affirmation d'un fait expérimental. On peut le joindre aux données initiales. Celles-ci sont si complexes qu'il importe peu de penser ou non que ce fait nouveau est impliqué dans les notions intuitives sur lesquelles est fondée la géométrie. D'ailleurs, il n'y a eu d'arrangement d'aucune espèce dissimulant le fait tout nu, et il y aurait peu d'intérêt à dénoncer cet emprunt à l'expérience.

Mais il y a plus : tous les éléments nouveaux qu'étudie la géométrie, angle, angle droit, cercle, longueur de circonférence, etc., ne sont suggérés que par le monde extérieur. Il en est de même en analyse du nombre fractionnaire, du nombre incommensurable, de la limite, etc. Les nombres imaginaires eux-mêmes sont apportés par l'expérience, quoique cela paraisse paradoxal. C'est qu'ici cette expérience s'est affinée, pour ainsi dire, et est devenue la constatation du résultat d'un calcul ou d'une transformation algébrique. Mais tout cela est loin d'être évident. Chaque fois qu'un nouvel objet d'étude est suggéré, les mathématiques se l'assimilent au point d'en dissimuler l'origine, ou plutôt, à l'occasion de cet élément, elles construisent logiquement un être nouveau, elles le créent de toutes pièces, et si l'unique souci qui les guide paraît-être la non contradiction des propriétés dont elles l'affublent, et la possibilité de les exprimer à l'aide des éléments anciens, en réalité la préoccupation première a été que cette création logique correspondît exactement à l'objet concret. Cette préoccupation est peu visible, parce qu'elle importe peu à la rigueur des raisonnements ; mais, si on ne veut pas laisser aux mathématiques une beauté purement platonique, s'il faut qu'elles méritent leur titre de science, tous ces développements logiques sont destinés à être utilisés dans la connaissance générale du monde physique, et alors, pour la solution du problème le plus simple, on sera bien obligé d'admettre l'identité de l'objet extérieur et du concept purement logique : A cet instant précis se trouve dénoncée l'origine expérimentale de toute définition : Si on a pu la dissimuler, c'est à la seule condition d'y substituer, pour l'instant de l'application, une proposition indémontrable, un véritable postulat, par lequel nous affirmons que nos théories logiques peuvent donner l'explication d'un fait objetif.

Quelques exemples simples aideront à éclaircir ces idées. Après l'étude de quelques propriétés des lignes droites considérées ensemble, la géométrie utilise ces propriétés à l'occasion d'un élément nouveau : le cercle. La définition qui lui sert, pour ainsi dire, de passe-port est la suivante : La circonférence de cercle est le lien géométrique d'un point situé à une distance donnée d'un point déterminé. Traduisez : Que par le point déterminé on mène une droite quelconque, qu'on prenne sur cette droite, à partir du point, une longueur égale à la distance donnée : l'extrémité de cette longueur est ce qu'on appelle un point de cercle. La possibilité de construire ainsi autant de points de cercle qu'on voudra, voilà tout ce que contient la notion de lieu géométrique qui entre dans cette définition. On déduit de celle-ci toutes sortes de propriétés ; par exemple, une droite qui a un point commun avec un cercle en a un second ; un diamètre partage le cercle en deux parties symétriques, en d'autres termes, à tout point de cercle on peut en faire correspondre un second symétrique par rapport à un diamètre quelconque, etc. — La considération des polygones inscrits, c'est-à-dire dont les sommets sont points de cercle, permet de définir la longueur de la circonférence, ce sera la limite des périmètres des polygones inscrits dont le nombre des côtés augmente indéfiniment.

Dans tout ce développement il n'entre en aucune façon l'idée de la forme du cercle, de ce rond parfait que nous tirons par abstration de ceux que fournit l'expérience. Ce rond est formé par un contour continu ; il divise le plan en deux parties, l'une qu'il limite et que nous disons intérieure et une autre extérieure : toutes notions absolument distinctes de la définition et des déductions géométriques. De même le concept purement logique de la longueur de la circonférence est essentiellement distinct de ce que par intuition nous entendons par la longueur d'un rond, le tour d'une roue, par exemple, ou la longueur d'un fil d'abord exactement appliqué sur la conférence de la roue, puis déroulé. C'est ainsi que là même où les mathématiques semblent être le plus voisines des objets concrets de l'intuition expérimentale, elles se développent parallèlement à ces objets, et sans jamais faire disparaître la dualité qu'offrent la donnée des sens, affinée même par l'abstraction, et la construction logique de l'esprit. Mais ici du moins ce parallélisme est assez parfait pour que nous sentions fort bien comment a procédé la géométrie. L'expérience a d'abord fourni non seulement la notion du cercle, mais une foule de ses propriétés; parmi celles-ci à une époque de beaucoup postérieure, le géométre a choisi celles qui, tout en ne s'exprimant qu'à l'aide de droites, de points, et de longueurs, lui paraissaient le mieux caractériser le cercle concret et il a construit avec elle la théorie du cercle. Mais qu'on demande seulement, par exemple, quel est le tour d'une roue dont on donne le rayon, comment résoudre le problème à l'aide de la géométrie, si on n'admet l'identité entre la limite des périmètres des polygones inscrits et le tour même de la roue? L'arrangement par lequel on a chassé l'expérience est trahi à cet instant par un postulat, celui précisément qui, en réalité, avait conduit à la définition logique.

L'exemple précédent nous reportait à une époque reculée de l'histoire des mathématiques ; en voici un au contraire qui, bien qu'emprunté à l'arithmétique élémentaire, répond à des tendances actuelles. Au commencement du chapitre des fractions, en arithmétique, on accepte ordinairement un fait d'expérience : le partage de l'unité en parties égales. L'égalité de deux fractions ou la supériorité d'une fraction sur une autre s'expliquent par la considération de deux longueurs, par exemple, mesurées par les fractions. La donnée expérimentale qui rompt en arithmétique la chaîne des déductions n'a donc pas disparu. Mais cependant rien n'est plus aisé que de dissimuler ici l'origine du développement nouveau. Appelons fraction le symbole formel composé de deux nombres entiers écrits l'un au-dessus de l'autre $\left(\frac{a}{b}\right)$. Convenons de dire que deux fractions sont égales quand les termes de l'une sont des équimultiples de ceux de l'autre, définissons somme, différence, produit, quotient des fractions les résultats auquels conduisait la considération des quantités concrètes, etc. Les définitions étant toujours conformes à ce qui résultait pour nous de la donnée expérimentale, rien ne sera changé à la suite du chapitre sur les fractions. Il est probable que tôt ou tard on exposera ainsi couramment ce chapitre. Mais qu'on trouve alors la solution $x = \frac{2}{3}$ au problème le plus simple, où l'inconnue est une longueur, il faudra bien admettre, pour l'interpréter, que $\frac{2}{3}$ représente deux fois le tiers de l'unité et, en somme, on rétablira ainsi tout ce qu'on aura paru supprimer.

Ces exemples suffiraient peut-être à montrer la marche des sciences mathématiques : elles se développent naturellement sous l'impulsion de l'expérience, mais cachent tôt ou tard sous des constructions logiques l'origine de leurs concepts. En voici une dernière et intéressante confirmation tirée de l'analyse supérieure.

Supposons qu'à un instant quelconque de l'histoire des mathématiques, on sente le besoin d'utiliser une propriété nouvelle des quantités concrètes : il ne sera pas toujours facile de l'énoncer simplement, de l'expliquer, de la ramener à d'autres connues, de débrouiller les éléments complexes qu'elle implique. Il se peut cependant que des esprits élevés devinent comme par instinct qu'il s'agit là d'une notion féconde, et qu'un développement fondé sur elle réalisera un grand progrès dans la connaissance générale des choses. A priori, nous n'avons pas de peine à admettre l'existence de tout un long chapitre mathématique construit sur des notions qu'on n'explique pas : la géométrie et l'arithmétique n'ont-elles pas pour données initiales des concepts impossibles à définir? Si nous supposons enfin que les chercheurs appliqués aux idées nouvelles, frappés de l'intérêt des résultats, se soient avant tout préoccupés d'en enrichir la liste, la reconstruction logique des données expérimentales risquera fort de rester longtemps inachevée ; longtemps, la branche analytique qui aura ainsi poussé brusquement semblera ne point se rattacher au tronc primitif. C'est précisément là ce qui s'est passé pour l'analyse supérieure, pour cette partie de l'analyse qui traite des incommensurables, des limites, des séries et produits infinis, des infiniments petits, des différentielles, etc. Le fait expérimental qui en est le point de départ, et dont l'introduction dans l'analyse remonte à une époque impossible à fixer est la notion *du devenir de la quantité concrète*, du passage continu d'un état à un autre. Après avoir suggéré bien des travaux, cette notion parvint à sa dernière et complète consécration dans les méthodes qu'inaugurèrent Newton et Leibnitz. Mais l'exposé de ces méthodes est loin d'avoir toujours présenté l'enchaînement dont les traités nous donnent aujourd'hui le tranquille spectacle. Ce n'est que difficilement et au prix de longs efforts qu'a été définitivement arrêté chez nous, depuis Cauchy et Duhamel, l'exposé de l'analyse infinitésimale. Le problème de reconstruction logique qui devait en faire une suite rigoureuse des chapitres antérieurs est-il complètement résolu ? Nous allons faire voir qu'il ne l'est pas d'une façon absolue dans l'enseignement actuel, sauf à montrer ensuite comment un pur formalisme peut fournir cette solution.

L'exposé que présentent aujourd'hui les cours d'analyse et qui a pour point de départ la définition mathématique de la limite, réduit le fait expérimental que nous avons signalé à un simple postulat indémontrable, le principe des limites, qui s'énonce ainsi : Si une quantité variable croît sans cesse, tout en restant inférieure à une quantité déterminée, elle a une limite.

Duhamel en donne la démonstration suivante : (*)

« Soit A la valeur au-dessous de laquelle est toujours la
« variable, et B une de celles qu'elle prendra ; qu'on partage
« l'intervalle de B à A en parties égales aussi petites que l'on
« voudra : la variable pourra bien dépasser tous les points de
« division, mais ne peut aller jusqu'à l'extrémité ; il pourra
« aussi se faire qu'elle ne les dépasse pas tous, et alors il y en
« aura un qui sera le dernier qu'elle dépasse ; elle restera
« donc toujours comprise entre celui-ci et le suivant, c'est-à-
« dire dans un intervalle aussi resserré que l'on aura voulu et
« dans lequel elle ira toujours en croissant. En subdivisant
« cet intervalle en un nombre aussi grand qu'on voudra de
« parties égales, on reconnaîtra de même que la grandeur ne
« peut se trouver que dans un nouvel intervalle fixe entre B et
« A, et d'une étendue aussi voisine de zéro qu'on le voudra.
« Il existe donc une certaine valeur fixe entre B et A, dont la
« variable s'approche indéfiniment ; elle a donc une limite. »

Le raisonnement est rigoureux jusqu'à la conclusion exclusivement : Quant à passer de ce que l'intervalle qui comprend la grandeur peut devenir aussi petite qu'on veut à l'existence de la limite, ce n'est pas moins difficile que d'admettre d'emblée la conclusion, sans démonstration aucune. Ainsi que le montre nettement M. Paul du Bois Reymond, la diminution de l'intervalle qui comprend la grandeur n'atténue pas la difficulté qu'il y a à concevoir la limite. Le raisonnement de Duhamel cache une illusion ; et cela est si vrai que souvent, au contraire, pour expliquer qu'une grandeur resserrée dans un intervalle de plus en plus petit a une limite, on se fonde sur ce que les valeurs qui la comprennent forment deux séries l'une croissante, l'autre décroissante, admettant chacune une limite d'après le principe en question, et il suffit ensuite de remarquer que les limites sont les mêmes.

M. Bertrand, à propos des séries à termes positifs, dit simplement : « Il est clair que si dans la somme $u_0 + u_1 + \ldots$
« $+ u_n$ on prend un nombre de termes toujours croissant,
« les résultats obtenus iront en augmentant et s'ils ne peuvent
« pas dépasser toute limite, ils approchent nécessairement

(*) Duhamel. — *Des méthodes dans les sciences du raisonnement.* 2[me] partie, page 413.

« autant qu'on veut du plus petit des nombres qu'il ne peuvent « pas dépasser. » C'est de la même manière que raisonne M. Briot. Mais qui ne sent que l'existence de ce minimum parmi les valeurs que ne peut dépasser la variable n'est rien moins que démontrée, et qu'en somme ce raisonnement se réduit à changer, sans l'expliquer, l'énonciation du fait intuitif.

Ces démonstrations et toutes celles qu'on peut rencontrer reviennent au fond aux deux que développe l'auteur de ce livre, montrant chaque fois l'illusion qu'elles dissimulent. D'autre part, si on rejette toute démonstration, acceptera-t-on le principe des limites au même titre qu'une proposition de ce genre : « La même chose ne peut pas être et ne pas être en même temps ? » Il est très clair, au contraire, que le principe des limites énonce un fait nouveau, une propriété particulière de la quantité concrète et continue. Le caractère d'évidence qu'il nous présente est dû à l'expérience seule. C'est bien un postulat que l'enseignement pose au début de l'analyse supérieure, réduisant ainsi à la vérité qu'il énonce comme à un minimum nécessaire la donnée qui lui sert de base. Est-il possible de dissimuler enfin ce postulat ? Il suffit, pour s'en convaincre, de lire l' « Introduction à l'étude des fonctions d'une variable », de M. J. Tannery. L'enchaînement rigoureux de définitions et déductions par lesquelles l'auteur nous conduit insensiblement du nombre entier à toutes les notions les plus élevées de l'analyse résout bien décidément le problème de reconstruction logique qui devait faire disparaître dans l'exposé formel des mathématiques toute lacune entre les chapitres anciens et les nouveaux. Pour comprendre par quel mécanisme simple il est possible d'atteindre ce résultat, qu'on se rappelle l'exemple des fractions déjà mentionné. A la condition de se résoudre à un pur formalisme, rien n'est plus aisé que d'appliquer ici une méthode identique. Nous sommes convaincus qu'une suite de valeurs croissantes mais ne croissant pas indéfiniment a une limite, quand sous ces valeurs nous avons en vue des états successifs d'une quantité concrète : laissons de côté cette dernière considération et créons, en vertu d'une définition, *la limite* de la suite des valeurs. Ce ne sera plus une chose concrète, vue par intuition sensible, ce sera un pur symbole. Nous *conviendrons* de dire qu'il est supérieur à toute valeur atteinte ou dépassée par la suite qui sert à le définir, — inférieur à toute valeur qu'elle n'atteint jamais ; — nous conviendrons des circonstances où deux symboles répondant à la définition nouvelle sont égaux, ainsi que des résultats d'opérations effectuées sur eux, et, grâce au souci constant de faire correspondre ces définitions ou conventions aux vérités qui résultent pour nous de l'existence de la limite, rien ne sera changé dans la suite des déductions. Le principe des limites aura disparu de l'analyse en tant que proposition à établir — et,avec lui, la dernière trace de tout donnée expérimentale autre que la donnée initiale de l'arithmétique,le nombre. Mais,pour appliquer à ce dernier exemple les idées indiquées à grandes lignes dans cette préface, il est bien entendu que dès qu'on touchera à l'outil ainsi affiné pour résoudre le plus enfantin des problèmes, ayant trait à des longueurs, par exemple, la solution ne sera justifiée et interprêtée que grâce à l'opinion que les symboles correspondent à des réalités.

La tendance à éliminer toute donnée expérimentale autre que les données initiales est-elle une simple manie des mathématiciens ? — Manie dangereuse en ce cas, puisqu'elle a pour conséquence de donner à leur science une allure capricieuse et l'apparence d'un simple jeu d'esprit ? — Cette tendance répond au contraire à une haute nécessité philosophique. Les éléments de notre connaissance, qu'elle qu'en soit l'origine, expérimentale ou rationnelle, se combinent dans notre esprit de telle sorte que le degré et la nature de la certitude qu'ils comportent sont souvent fort difficiles à préciser. Or, la reconstruction logique des faits mathématiques a pour résultat de séparer nettement d'une part ce qui, en eux, présente le caractère de la certitude, sinon absolue, du moins la plus haute à laquelle nous puissions atteindre, et d'autre part ce qui n'est qu'une vérité d'induction. En d'autres termes, elle a pour effet de créer une mathématique idéale planant au-dessus de toute expérience : c'est celle que connaissent surtout les mathématiciens. Derrière leurs échafaudages logiques, ils sont bien réellement à l'abri de toute objection ; et c'est avec raison que l'évidence de leurs conclusions est prise pour le type de la plus complète qu'il y ait à nos yeux. Stuart Mill prétend que la certitude des vérités mathématiques est inductive. Cette thèse n'atteint que les vérités mathématiques *objectivées*, pour ainsi dire,énoncées à l'occasion des êtres concrets que suggère l'expérience. Elle nous paraît en ce cas absolument juste, car elle revient à dénoncer l'éternel postulat qui se cache, pour reparaître au moment de l'application, derrière toute création du géomètre ou de l'analyste. Mais elle ne saurait porter sur les vérités logiques de cette mathématique idéale que nous venons de définir. Celle-ci semble, il est vrai, n'être point débarrassée des données initiales : si on y regarde de près, on voit cependant qu'elle n'affirme rien sur ces données ellesmêmes, et montre seulement quelles en sont les conséquences si on les accepte comme hypothèses. Enfin la confection de cette mathématique toute formelle nous donne néanmoins sur les choses elles-mêmes une indication précieuse : elle nous apprend quel est le minimun de propriétés qu'il suffit de supposer dans ces choses pour justifier l'application des vérités logiques. Toutes les propriétés géométriques du cercle, par exemple, s'étendront aux ronds concrets, s'il en existe, dont tous les points sont à la même distance d'un centre. L'analyse supérieure s'appliquera aux quantités dont il existe des états correspondant à tous les symboles qu'elle a créés, etc. Et ainsi on apprend à connaître le minimum de propriétés caractéristiques par lesquelles un fait concret peut entrer dans l'engrenage des déductions de la mathématique pure.

Voilà d'où celle-ci tire sa raison d'être. Mais quel que soit l'intérêt qu'elle présente, nous croyons avoir suffisamment montré que, par son essence purement formelle, elle ne saurait donner la solution d'aucun problème de connaissance concrète. C'est pourquoi les traités de mathématiques, si rigoureux qu'ils soient, et précisément d'ailleurs en raison de leur rigueur extrême, ne pourront jamais rendre superflue l'étude des problèmes de la connaissance tels que ceux que traite ce livre.

Le Hâvre, ce 1er Avril 1887.

G. MILHAUD.

PRÉFACE

Le besoin de voir clair dans la nature intime des intégrales des équations aux différentielles partielles du second ordre me conduisit à l'étude des formules générales qui, comme celle de Fourier, servent à exprimer les fonctions arbitraires. Ces recherches m'obligèrent ensuite à considérer l'essence des fonctions indépendantes de toute hypothèse et celles de leurs intégrales. Sur ce point, je ne parvins et je ne pouvais parvenir à une intelligence parfaite, qu'en soumettant à l'épreuve de la critique de la connaissance les concepts analytiques fondamentaux de grandeur et de limite. Je veux maintenant, dans le travail dont ce livre contient la première partie, parcourir en sens inverse, mais en moins de temps, je l'espère, le chemin que j'ai suivi moi-même

Il s'agit, en effet, d'un ensemble de théories qui méritent d'être bien solidement établies dans un exposé spécial et dont l'idée fondamentale devient évidente, dès qu'on porte sa pensée sur la répartition des sciences médicales. Des théories générales s'opposent ici à des théories spéciales, comme à l'anatomie spéciale, à la pathologie spéciale, etc., s'opposent les sciences générales de même nom. De même il paraîtrait à propos de distinguer dans l'analyse une théorie spéciale des fonctions et une théorie générale.

La première, en étudiant d'une manière très générale les fonctions de variables complexes, a pour but de représenter des fonctions de propriétés déterminées et d'étudier la nature de grandes classes de transcendantes, en particulier de celles qui ont des relations avec les fonctions algébriques.

La théorie *générale* des fonctions embrasse, à mon avis, tout ce qui se rattache a l'idée la plus générale de fonction : En tête je place la métaphysique des concepts de grandeur et de limite, comme servant de base à la théorie de l'argument, de la fonction, et de la condition commune de convergence et de divergence des différentes opérations infinies. Ce sont là, soit dit en passant, les questions traitées dans la première partie de mon travail. Puis, on trouvera la théorie générale des séries, l'étude de l'intégrabilité et de la différentiabilité des fonctions et les propositions générales relatives à l'intégrale définie ; ensuite la théorie de l'expression de fonctions dites arbitraires à l'aide d'intégrales et de séries, mais en particulier les expressions de Fourier qui précisent davantage le concept de fonction, enfin différentes parties qui s'y rapportent dans la théorie des équations aux différentielles partielles du second ordre.

Ainsi, en peu de mots, ce que contient la théorie générale des fonctions, c'est la théorie des rapports de grandeurs et des opérations en général, c'est-à-dire sans qu'on ait essentiellement en vue la représentation de *dépendances* particulières.

Depuis que, pour la première fois en 1872, j'ai publié, sous un autre titre, il est vrai, une étude sur ce sujet, il a paru des ouvrages qui poursuivent le même but. Il pourra m'arriver de leur emprunter maintes choses de valeur, comme je fais pour Monsieur U. Dini, à qui j'emprunte des propositions importantes sur la non différentiabilité de certaines fonctions. On verra cependant que mon travail pour le plan comme pour le fond même du sujet est absolument original. Cela est vrai assurément en ce qui concerne cette 1re partie, mais aussi en ce qui concerne la suite, par exemple, le prochain fascicule dont le sujet est la théorie générale des séries, et où, en dehors de ce qu'on trouve déjà dans les traités, j'apporte plus d'un aperçu nouveau.

Comme je l'ai dit, cette première partie contient l'examen, au point de vue de la théorie de la connaissance, des concepts de grandeur et de limite et l'application des résultats de cette étude aux théories de l'argument et de la fonction. Le problème qui touche à la théorie de la connaissance, je crois l'avoir résolu ad-assem, et ce qui garantit entre autres choses la rigueur de la solution c'est qu'elle explique, de la façon la plus naturelle les paradoxes qui se sont montrés tout récemment dans l'analyse.

Le concept de la limite analytique, ou (car en définitive il ne s'agit que de cela) celui de la limite de la fraction décimale, naît de certaines successions de représentations, qui ont, comme je le montrerai dans une autre occasion, une signification bien plus large encore. Selon qu'on coupe, d'après certains principes, ces suites de représentations ou que l'on fait atteindre à la pensée leur terme idéal, il naît une double forme d'intuition dont on peut suivre la ligne de démarcation à travers toutes les spéculations de la théorie de la connaissance.

Les représentations, éléments simples de la pensée, et dont la succession accompagne et régit tout acte mental, étant les matériaux primitifs de toute étude qui porte sur la théorie de la connaissance, doivent être précédées, comme notre étude sur les concepts analytiques fondamentaux, d'une définition suffisante du mot « représentation » *(Vorstellung)*.

En effet le sens de ce mot, quoiqu'il soit d'un fréquent usage, ne paraît pas être établi avec la rigueur que demandent son importance fondamentale ainsi que la multitude et la variété immense des individus qu'il embrasse. Car il ne s'agit pas seulement des représentations visuelles, de celles de l'ouïe et des autres sens, mais aussi, par exemple, des représentations de douleur, de gaîté, de colère, de volonté, etc.. Bref, on peut dire que tout phénomène psychique, qu'on l'appelle perception, sensation, volition, est également une représentation, ou, pour parler plus exactement, fournit à l'esprit une représentation de lui-même. Or, comment préciser et délimiter ces concepts ? — Voici mon opinion :

Est une représentation toute aperception qui peut devenir un objet du souvenir, et sous la forme même quelle affecte, à l'instant où la mémoire la reçoit. Et je comprends naturellement aussi, dans la totalité des représentations, tout souvenir qui, par le travail de la pensée, s'offre à la conscience.

Ainsi se réunissent sous un même principe simple et bien défini les représentations qu'on peut nommer directes et qui sont les impressions immédiates de nos sens, devenues conscientes, et les représentions indirectes tirées du souvenir.

Tübingen, Février 1882.