LE PREMIER LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Le point est ce dont la partie est nulle.

2. Une ligne est une longueur sans largeur.

3. Les extrémités d'une ligne sont des points.

4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.

5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.

6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.

7. La surface plane est celle qui est également placée entre ses droites.

8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.

9. Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l'angle se nomme rectiligne.

10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.

12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.

13. On appèle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.

14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.

15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence; toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.

16. Ce point se nomme le centre du cercle.

17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales.

18. Un demi-cercle est la figure comprise par le diamètre, et la portion de la circonférence, soutendue par le diamètre.

19. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par la circonférence du cercle ; le demi-cercle étant plus grand ou plus petit que le segment.

20. Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites.

21. Les figures trilatères sont terminées par trois droites.

22. Les quadrilatères, par quatre.

23. Les multilatères, par plus de quatre.

24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.

25. Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux.

26. Le triangle scalène, celle qui a ses trois côtés inégaux.

27. De plus, parmi les figures trilatères, le triangle rectangle est celle qui a un angle droit.

28. Le triangle obtusangle, celle qui a un angle obtus.

29. Le triangle acutangle, celle qui a ses trois angles aigus.

30. Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire.

31. Le rectangle, celle qui est rectangulaire, et non équilatérale.

32. Le rhombe, celle qui est équilatérale, et non rectangulaire.

33. Le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.

34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes.

35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.

2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.

3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.

4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.

5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

6. Deux droites ne renferment point un espace.

NOTIONS COMMUNES.

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux.
5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.
7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.
8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.

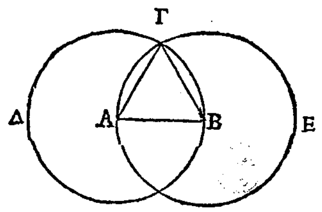
PROPOSITION PREMIÈRE.

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

Exposition. Soit AB une droite donnée et finie.

Détermination. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.

Construction. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BΓΔ (dem. 3); et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence AΓE; et du point Γ, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites ΓA, ΓB (dem. 1).

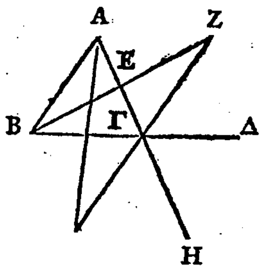


Démonstration. Car, puisque le point A est le centre du cercle BΓΔ, la droite AΓ est égale à la droite AB (déf. 15); de plus, puisque le point B est le centre du cercle AΓE, la droite BΓ est égale à la droite BA; mais on a démontré

PROPOSITION XVI.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.

Soit le triangle ABΓ, prolongeons le côté BΓ vers Δ; je dis que l'angle extérieur AΓΔ est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés ΓBA, BAΓ.



Partageons la droite AΓ en deux parties égales en E (10); et ayant joint la droite BE, prolongeons-la vers Z, faisons EZ égal à BE (3), joignons la droite ZΓ, et prolongeons AΓ vers H.

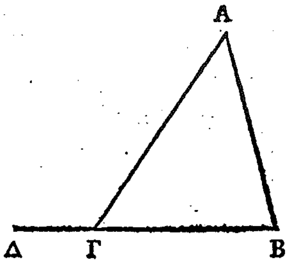
Puisque AE est égal à EΓ, et BE égal à EZ, les deux droites AE, EB sont égales aux deux droites ΓE, EZ, chacune à chacune; mais l'angle AEB est égal à l'angle ZEΓ (15), puisqu'ils sont au sommet; donc la base AB est égale à la base ZΓ (4); le triangle ABE est égal au triangle ZEΓ, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, sont égaux chacun à chacun; donc l'angle BAE est égal à l'angle EΓZ (not. 9); mais l'angle EΓΔ est plus grand que l'angle EΓZ; donc l'angle AΓΔ est plus grand que l'angle BAE. Si on partage le côté BΓ en deux parties égales, on démontrera semblablement que l'angle BΓH, c'est-à-dire AΓΔ, est plus grand que l'angle ABΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

Deux angles d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Soit le triangle ABΓ; je dis que deux angles du triangle ABΓ, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Prolongeons ΒΓ vers Δ (dem. 2).

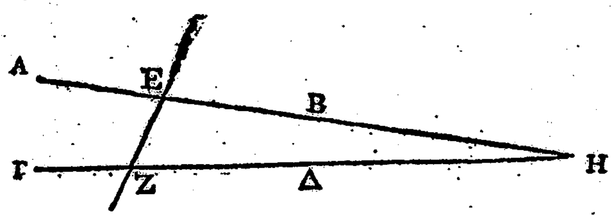


Puisque l'angle ΑΓΔ du triangle ΑΒΓ est extérieur, il est plus grand que l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ (16). Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ, les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront plus grands que les angles ΑΒΓ, ΒΓΑ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits (13); donc les angles ΑΒΓ, ΒΓΑ sont moindres que deux droits. Nous démontrerons semblablement que les angles ΒΑΓ, ΑΓΒ, et les angles ΓΑΒ, ΑΒΓ sont moindres que deux droits. Donc, etc.

[...]

PROPOSITION XXVII.

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles alternes égaux entr'eux, ces deux droites seront parallèles.



Que la droite EZ tombant sur les deux droites AB, ΓΔ fasse les angles alternes AEZ, EZΔ égaux entr'eux; je dis que la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ.

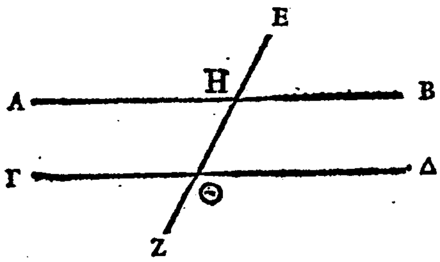
Car si elle ne lui est pas parallèle, les droites ΑΒ, ΓΔ étant prolongées se rencontreront, ou du côté ΒΔ, ou du côté ΑΓ. Qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent du côté ΒΔ, au point Η.

L'angle extérieur ΑΕΖ du triangle ΕΗΖ est égal à l'angle intérieur et opposé ΕΖΗ, ce qui est impossible (16); donc les droites ΑΒ, ΓΔ prolongées du côté ΒΔ ne se rencontreront point. On démontrera de la même manière qu'elles ne se rencontreront pas non plus du côté ΑΓ; mais les droites qui ne se rencontrent d'aucun côté sont parallèles (déf. 35); donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVIII.

Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur, opposé, et placé du même côté, ou bien si elle fait les angles intérieurs et placés du même côté égaux à deux droits, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite ΕΖ tombant sur les droites ΑΒ, ΓΔ fasse l'angle extérieur ΕΗΒ égal à l'angle intérieur ΗΘΔ, opposé, et placé du même côté, ou bien les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ intérieurs, et placés du même côté, égaux à deux droits; je dis que la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ.



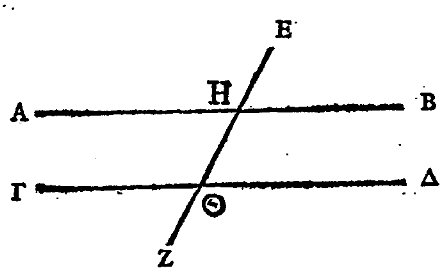
Car puisque l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΗΘΔ, et que l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΑΗΘ (15), l'angle ΑΗΘ est égal à l'angle ΗΘΔ; mais ces angles sont alternes; donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ (27).

De plus, puisque les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ sont égaux à deux droits, et que les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ sont aussi égaux à deux droits (13), les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ seront égaux aux angles ΒΘΗ, ΗΘΔ. Retranchons l'angle commun ΒΗΘ; l'angle restant ΑΗΘ sera égal à l'angle restant ΗΘΔ; mais ces deux angles sont alternes; donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ. (27). Donc, etc.

PROPOSITION XXIX.

Une droite qui tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entr'eux, l'angle extérieur, égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits.

Que la droite EZ tombe sur les droites parallèles AB, ΓΔ; je dis que cette droite fait les angles alternes AHΘ, HΘΔ égaux entr'eux, l'angle extérieur EHB, égal à l'angle HΘΔ intérieur opposé et placé du même côté, et les angles BHΘ, HΘΔ intérieurs et placés du même côté, égaux à deux droits.



Car si l'angle AHΘ n'est pas égal à l'angle HΘΔ, l'un d'eux est plus grand. Que l'angle AHΘ soit plus grand que HΘΔ. Ajoutons l'angle commun BHΘ, les angles AHΘ, BHΘ seront plus grands que les angles BHΘ, HΘΔ; mais les angles AHΘ, BHΘ sont égaux à deux droits (13); donc les angles BHΘ, HΘΔ sont moindres que deux droits. Mais si deux droites sont prolongées à l'infini du côté où les angles intérieurs sont plus petits que deux droits, ces droites se rencontrent (dem. 5); donc les droites AB, ΓΔ prolongées à l'infini se rencontreront. Mais elles ne se rencontreront pas, puisqu'elles sont parallèles; donc les angles AHΘ, HΘΔ ne sont point inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle AHΘ est égal à l'angle EHB (15); donc l'angle EHB est égal à l'angle HΘΔ.

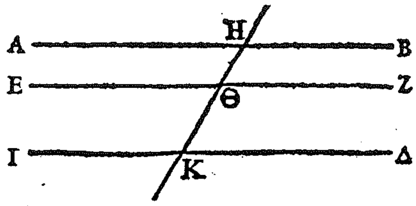
Ajoutons l'angle commun BHΘ, les angles EHB, BHΘ seront égaux aux angles BHΘ, HΘΔ; mais les angles EHB, BHΘ sont égaux à deux droits (13); donc les angles BHΘ, HΘΔ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXX.

Les droites parallèles à une même droite sont parallèles entr'elles.

Que chacune des droites AB, ΓΔ soit parallèle à EZ; je dis que AB est parallèle à ΓΔ.

Que la droite HK tombe sur les droites AB, ΓΔ.

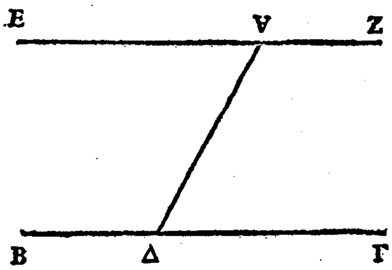


Puisque la droite HK tombe sur les droites parallèles AB, EZ, l'angle AHΘ est égal à l'angle HΘZ (27). De plus, puisque la droite HK tombe sur les droites parallèles EZ, ΓΔ, l'angle HΘZ est égal à l'angle HKΔ (28). Mais on a démontré que l'angle AHK est égal à l'angle HΘZ; donc l'angle AHK est égal à l'angle HKΔ; mais ces angles sont alternes; donc AB est parallèle à ΓΔ (29). Donc, etc.

PROPOSITION XXXI.

Par un point donné, conduire une ligne droite parallèle à une droite donnée.

Soit A le point donné, et BΓ la droite donnée; il faut par le point A conduire une ligne droite parallèle à la droite BΓ.



Prenons sur la droite BΓ un point quelconque Δ, et joignons AΔ; construisons sur la droite ΔA, et au point A de cette droite, l'angle ΔAE égal à l'angle AΔΓ (23), et prolongeons la droite AZ dans la direction de EA.

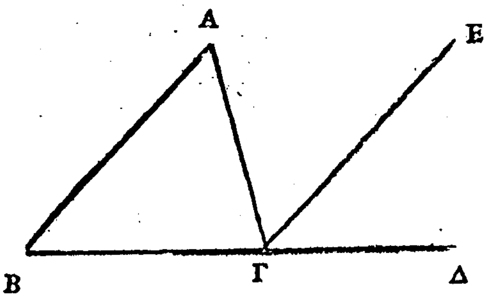
Puisque la droite AΔ, tombant sur les deux droites BΓ, EZ, fait les angles alternes EAΔ, AΔΓ égaux entr'eux, la droite EZ est parallèle à droite BΓ (27).

Donc la ligne droite EAZ a été menée, par le point donné A, parallèle à la droite donnée BΓ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXII.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés; et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.

Soit le triangle ΑΒΓ; et prolongeons le côté ΒΓ en Δ; je dis que l'angle extérieur ΑΓΔ est égal aux angles intérieurs et opposés ΓΑΒ, ΑΒΓ; et que les trois angles intérieurs ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits.



Menons, par le point Γ, la droite ΓΕ parallèle à ΑΒ (31).

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΕ, et que ΑΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΒΑΓ, ΑΓΕ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΕ, et que la droite ΒΔ tombe sur ces droites, l'angle extérieur ΕΓΔ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ. Mais on a démontré que l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΒΑΓ; donc l'angle extérieur ΑΓΔ est égal aux deux angles intérieurs et opposés ΒΑΓ, ΑΒΓ.

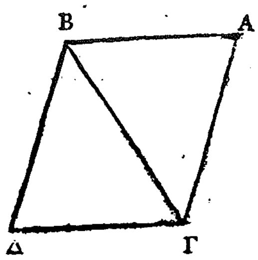
Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ; les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront égaux aux trois angles ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits (13); donc les angles ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXXIII.

Les droites qui joignent, des mêmes côtés, des droites égales et parallèles, sont elles-mêmes égales et parallèles.

Soient ΑΒ, ΓΔ deux droites égales et parallèles; que les droites ΑΓ, ΒΔ les joignent des mêmes côtés; je dis que les droites ΑΓ, ΒΔ sont égales et parallèles.

Joignons ΒΓ.



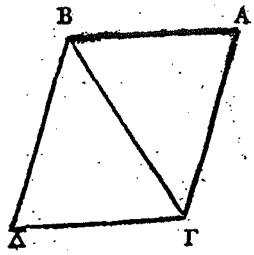
Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΒ est égale à ΓΔ, et que la droite ΒΓ est commune, les deux droites ΑΒ, ΒΓ sont égales aux deux droites ΓΔ, ΒΓ; mais l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ; donc la base ΑΓ est égale à la base ΒΔ, le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΒΓΔ, et les angles restants, opposés à des côtés égaux, seront égaux, chacun à chacun (4); donc l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΓΒΔ. Mais la droite ΒΓ tombant sur les deux droites ΑΓ, ΒΔ fait les angles alternes ΑΓΒ, ΓΒΔ égaux entr'eux; donc la droite ΑΓ est parallèle à la droite ΒΔ (27). Mais on a démontré qu'elle lui est égale; donc, etc.

PROPOSITION XXXIV.

Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux, et la diagonale les partage en deux parties égales.

Soit le parallélogramme ΑΓΔΒ, et que ΒΓ soit sa diagonale; je dis que les côtés et les angles opposés du parallélogramme ΑΓΔΒ sont égaux entr'eux, et que la diagonale ΒΓ le partage en deux parties égales.

Car puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que la droite ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΓ est parallèle à ΒΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΓΒ, ΓΒΔ sont égaux entr'eux; donc les deux triangles ΑΒΓ, ΒΓΔ ont les deux angles ΑΒΓ, ΒΓΑ égaux aux deux angles ΒΓΔ, ΓΒΔ, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, savoir, le côté commun ΒΓ, qui est adjacent aux angles égaux; ils auront donc les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun (26), et l'angle restant égal à l'angle restant; donc le côté ΑΒ est égal au côté ΓΔ, le côté ΑΓ égal au côté ΒΔ, et l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΒΔΓ. Puisque l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ, et l'angle ΓΒΔ égal à l'angle ΑΓΒ, l'angle total ΑΒΔ est égal à l'angle total ΑΓΔ. Mais on a démontré que l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΓΔΒ;



Donc les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux.

Je dis de plus que la diagonale partage les parallélogrammes en deux parties égales. Car puisque ΑΒ est égal à ΓΔ, et que la droite ΒΓ est commune, les deux droites ΑΒ, ΒΓ sont égales aux droites ΔΓ, ΓΒ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ; donc la base ΑΓ est égale à la base ΒΔ (4), et le triangle ΑΒΓ égal au triangle ΒΔΓ.

Donc la diagonale ΒΓ partage le parallélogramme ΑΓΔΒ en deux parties égales; ce qu'il fallait démontrer.

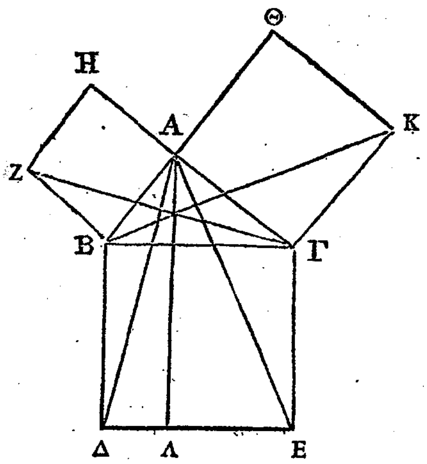
[...]

PROPOSITION XLVII.

Dans les triangles rectangles, le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ABΓ un triangle rectangle, que BAΓ soit l'angle droit; je dis que le quarré du côté BΓ est égal aux quarrés des côtés BA, AΓ.

Décrivons avec BΓ le quarré BΔEΓ, et avec BA, AΓ les quarrés HB, ΘΓ; et par le point A conduisons AΛ parallèle à l'une ou à l'autre des droites BΔ, ΓE; et joignons AΔ, ZΓ.



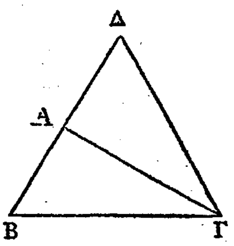
Puisque chacun des angles BAΓ, BAH est droit, les deux droites AΓ, AH, non placées du même côté, font avec la droite BA au point A de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΓA est dans la direction de AH; la droite BA est dans la direction AΘ, par la même raison. Et puisque l'angle ΔBΓ est égal à l'angle ZBA, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ABΓ, l'angle entier ΔBA sera égal à l'angle entier ZBΓ (not. 4). Et puisque ΔB est égal à BΓ, et ZB à BA, les deux droites ΔB, ΔA sont égales aux deux droites ΓB, BZ, chacune à chacune; mais l'angle ΔBA est égal à l'angle ZBΓ; donc la base AΔ est égale à la base ZΓ, et le triangle ABΔ égal au triangle ZBΓ (4). Mais le parallélogramme BΛ est double du triangle ABΔ (41), car ils ont la même base BΔ et ils sont entre les mêmes parallèles ΒΔ, ΑΛ; le quarré ΒΗ est double du triangle ΖΒΓ, car ils ont la même base ΒΖ et ils sont entre les mêmes parallèles ΖΒ, ΗΓ; et les grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales, sont égales entr'elles; donc le parallélograme ΒΛ est égal au quarré ΗΒ. Ayant joint ΑΕ, ΒΚ, nous démontrerons semblablement que le parallélogramme ΓΛ est égal au quarré ΘΓ; donc le quarré entier ΒΔΕΓ est égal aux deux quarrés ΗΒ, ΘΓ. Mais le quarré ΒΔΕΓ est décrit avec ΒΓ, et les quarrés ΗΒ, ΘΓ sont décrits avec ΒΑ, ΑΓ; donc le quarré du coté ΒΓ est égal aux quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ. Donc dans les triangles, etc.

PROPOSITION XLVIII.

Si le quarré d'un des côtés d'un triangle est égal aux quarrés des deux côtés restants de ce triangle, l'angle compris par les deux côtés restants est droit.

Que le quarré du côté ΒΓ du triangle ΑΒΓ soit égal aux quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ; je dis que l'angle ΒΑΓ est droit.

Du point Α, conduisons la droite ΑΔ perpendiculaire à ΑΓ (11), faisons ΑΔ égal à ΒΑ, et joignons ΔΓ.



Car puisque ΔΑ est égal à ΑΒ, le quarré de ΔΑ est égal au quarré de ΑΒ. Ajoutons le quarré commun de ΑΓ; les quarrés des droites ΔΑ, ΑΓ seront égaux aux quarrés des droites ΒΑ, ΑΓ. Mais le quarré de ΔΓ est égal aux quarrés des droits ΔΑ, ΑΓ (47), car l'angle ΔΑΓ est droit, et le quarré de ΒΓ est supposé égal aux quarrés des droites ΒΑ, ΑΓ; donc le quarré de ΔΓ est égal au quarré de ΒΓ; donc le côté ΔΓ est égal au côté ΒΓ; mais ΑΔ est égal à ΑΒ, et ΑΓ est commun; donc les deux droites ΔA, AΓ sont égales aux deux droites BA, AΓ; mais la base ΔΓ est égale à la base BΓ; donc l'angle ΔAΓ est égal à l'angle BAΓ (8). Mais l'angle ΔAΓ est droit; donc l'angle BAΓ est droit aussi. Donc, etc.

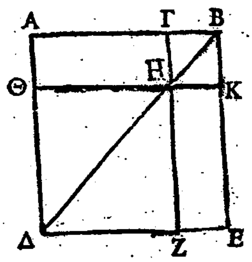
FIN DU PREMIER LIVRE.

[...]

PROPOSITION IV.

Si la droite est coupée à volonté, le quarré de la droite entière est égal aux quarrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments.

Que la droite AB soit coupée à volonté au point Γ ; je dis que le quarré de AB est égal aux quarrés des segments AΓ, ΓB, et à deux fois le rectangle contenu sous AΓ, ΓB.

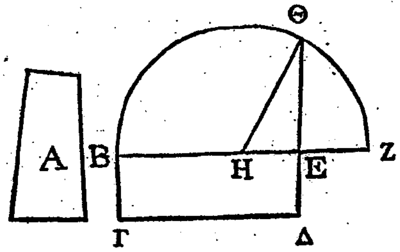


Avec AB décrivons le quarré AΔEB (46. 1); joignons BΔ ; par le point Γ conduisons ΓHZ parallèle à l'une ou à l'autre des droites AΔ, EB (31. 1), et par le point H conduisons ΘK parallèle à l'une ou à l'autre des droites AB, ΔE.

PROPOSITION XIV.

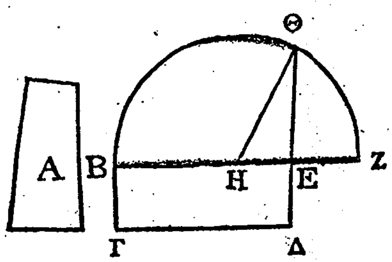
Construire un quarré égal à une figure rectiligne donnée.

Soit A la figure rectiligne donnée ; il faut construire un quarré égal à cette figure rectiligne.



Construisons un parallélogramme rectangle BΔ égal à la figure rectiligne donnée A (45. 1). Si BE était égal à EΔ, on aurait fait ce qui était proposé ; car le quarré BΔ aurait été construit égal à la figure rectiligne A. Si cela n'est point, l'un des côtés BE, EΔ est plus grand que l'autre. Que BE soit le plus grand, prolongeons-le vers Z, et faisons EZ égal à EΔ (3. 1); coupons BZ en deux parties égales au point H; du centre H et d'un intervalle égal à l'une des droites HB, HZ, décrivons la demi-circonférence BΘZ (dem. 3); prolongeons ΔE vers Θ, et joignons HΘ.

Puisque BZ est partagé en deux parties égales au point H, et en deux parties inégales au point E; le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE, est égal au quarré de HZ (5. 2). Mais HZ est égal à HΘ; donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE est égal au quarré de HΘ. Mais les quarrés des droites ΘE, EH sont égaux au quarré de HΘ (47. 1); donc le



rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE, est égal aux quarrés de droites ΘE, EH. Retranchons le quarré commun de HE; le rectangle restant compris sous BE, EZ sera égal au quarré de EΘ. Mais le rectangle compris sous BE, EZ est le rectangle compris sous BE, EΔ, puisque la droite EZ est égale à la droite EΔ; donc le parallélogramme BΔ est égal au quarré de ΘE. Mais BΔ est égal à la figure rectiligne A; donc la figure rectiligne A est égale au quarré de EΘ.

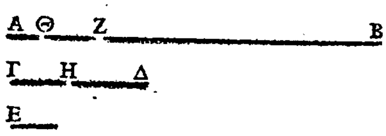
Donc le quarré décrit avec EΘ a été construit égal à la figure rectiligne donnée A; ce qu'il fallait faire.

FIN DU DEUXIÈME LIVRE.

[...]

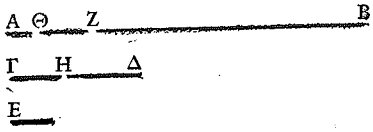
PROPOSITION PREMIÈRE.

Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entr'eux.



Soient les deux nombres inégaux ΑΒ, ΓΔ; que le plus petit étant toujours retranché du plus grand, le nombre restant ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité; je dis que les nombres ΑΒ, ΓΔ sont premiers entr'eux, c'est-à-dire que l'unité seule les mesure.

Car si les nombres AB, ΓΔ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit E; que ΓΔ mesurant AB laisse ZA plus petit que lui-même; que ZA mesurant ΔΓ laisse HΓ plus petit que lui-même; et qu'enfin HΓ mesurant ZA laisse l'unité ΘA.

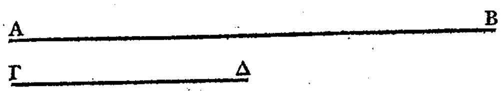


Puisque E mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure ZB, le nombre E mesure ZB. Mais il mesure AB tout entier; donc il mesurera le reste AZ. Mais AZ mesure ΔH; donc E mesurera ΔH. Mais il mesure ΓΔ tout entier; donc il mesurera le reste ΓH. Mais ΓH mesure ZΘ; donc E mesurera ZΘ. Mais il mesure ZA tout entier; donc un nombre mesurera l'unité restante AΘ, ce qui est impossible (déf. 3. 7). Donc, aucun nombre ne mesurera les nombres AB, ΓΔ. Donc les nombres AB, ΓΔ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II.

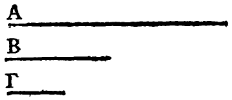
Deux nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient donnés les deux nombres AB, ΓΔ non premiers entr'eux, et que ΓΔ soit le plus petit; il faut trouver la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ.



Si ΓΔ mesure AB, le nombre ΓΔ sera une commune mesure des nombres ΓΔ, AB, parce que ΓΔ se mesure lui-même; et il est évident qu'il en sera la plus grande, car aucun nombre plus grand que ΓΔ ne peut mesurer ΓΔ.

Mais si ΓΔ ne mesure pas AB, et si on retranche toujours le plus petit des nombres AB, ΓΔ du plus grand, il restera quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. On n'aura pas l'unité pour reste; car si cela était, les nombres AB, ΓΔ seraient premiers entr'eux, ce qui n'est pas supposé;



PROPOSITION XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier.

Que A soit un nombre composé ; je dis que A est mesuré par quelque nombre premier.

Puisque A est un nombre composé, quelque nombre le mesurera (déf. 13. 7). Que quelque nombre le mesure, et que ce soit B. Si B est un nombre premier, on aura ce qui est proposé ; et si B est un nombre composé, quelque nombre le mesurera. Que quelque nombre le mesure, et que ce soit Γ. Puisque Γ mesure B, et que B mesure A, le nombre Γ mesurera A ; et si Γ est un nombre premier, on aura ce qui est proposé. Si Γ est composé, quelque nombre le mesurera ; d'après une telle considération, il restera quelque nombre premier qui mesurera le nombre qui est avant lui, et le nombre A. Car s'il ne restait pas de nombre premier, il y aurait une infinité de nombres qui mesureraient A, et qui seraient plus petits les uns que les autres, ce qui ne peut pas arriver dans les nombres (déf. 2. 7). Il restera donc quelque nombre premier qui mesurera le précédent, et le nombre A. Donc, etc.

PROPOSITION XX.

Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité proposée de nombres premiers.

Soient A, B, Γ les nombres premiers que l'on aura proposés; je dis que les nombres premiers sont en plus grande quantité que les nombres A, B, Γ.

A, 2.   B, 3.   Γ, 5.

E   38.   Δ Z

Soit pris le plus petit nombre qui est mesuré par les nombres A, B, Γ (38. 7); et que ce nombre soit ΔE; ajoutons l'unité ΔZ à ΔE; le nombre EZ sera un nombre premier, ou il ne le sera pas. Qu'il soit d'abord un nombre premier; on aura trouvé les nombres premiers A, B, Γ, EZ qui sont en plus grande quantité que les nombres A, B, Γ.

Mais que EZ ne soit pas un nombre premier; ce nombre sera mesuré par quelque nombre premier (33. 7). Qu'il soit mesuré par le nombre premier H; je dis que H n'est aucun des nombres A, B, Γ. Qu'il soit un de ces nombres, si cela est possible. Puisque les nombres A, B, Γ mesurent ΔE, le nombre H mesurera ΔE. Mais

A, 3. B, 5. Γ, 7.

E 105. Δ Z

H, 53.

H mesure EZ; donc H, qui est un nombre, mesurera l'unité restante ΔZ, ce qui est absurde; donc H n'est aucun des nombres A, B, Γ. Mais on a supposé qu'il est un nombre premier; les nombres premiers A, B, Γ, H, que l'on a trouvés, sont donc en plus grande quantité que les nombres A, B, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

LE DIXIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

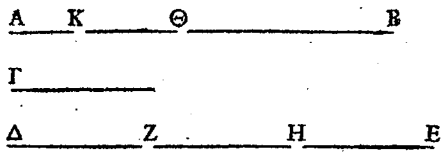
1. On appèle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.
2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

[...]

PROPOSITION I.

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Soient deux grandeurs inégales AB, Γ; que AB soit la plus grande; je dis que, si l'on retranche de AB une partie plus grande que sa moitié, et que si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la grandeur Γ.



Car Γ étant multiplié deviendra enfin plus grand que AB. Qu'il soit multiplié; que ΔE soit un multiple de Γ, et que ce multiple soit plus grand que AB. Partageons ΔE en parties ΔZ, ZH, HE égales chacune à Γ; retranchons de AB une partie BΘ plus grande que sa moitié, de AΘ une partie ΘK plus grande que sa moitié, et faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre des divisions de AB soit égal au nombre des divisions de ΔE; que le nombre des divisions AK, KΘ, ΘB soit donc égal au nombre des divisions ΔZ, ZH, HE.

Puisque ΔE est plus grand que AB, et qu'on a retranché de ΔE une partie EH plus petite que sa moitié, et qu'on a retranché de AB une partie BΘ plus grande que sa moitié, le reste HΔ est plus grand que le reste ΘA. Et puisque HΔ est plus grand que ΘA, qu'on a retranché de HΔ sa moitié HZ, et que de ΘA on a retranché ΘK plus grand que sa moitié, le reste ΔZ sera plus grand que le reste AK. Mais ΔZ est égal à Γ; donc Γ est plus grand que AK; donc AK est plus petit que Γ. Il reste donc de la grandeur AB une grandeur AK plus petite que la grandeur Γ, qui est la plus petite des grandeurs proposées. Ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés.

[...]