EXEMPLE.

Si la progression 2, 4, 16, 256, &c. dont chaque terme est le quarré du précédent, est continuée jusqu'au vingt-cinquieme terme; on demande la grandeur de ce dernier terme. Il sera plus commode d'exprimer les termes de cette progression par des exposans, de cette maniere $2^1, 2^2, 2^4, 2^8$, &c. Il est évident que les exposans forment une progression géométrique, & que celui du vingt-cinquieme terme sera $2^{24} = 16777216$; de sorte que le terme cherché $= 2^{16777216}$. Son logarithme sera donc $= 16777216\, l2$; & comme $l2 = 0, 30102999566398119$, le logarithme du nombre demandé sera $= 5050445, 25973367$; dont la caractéristique nous apprend que le nombre en question exprimé de la maniere ordinaire sera composé de 5050446 chiffres. La partie décimale 259733675932 cherchée dans la table des logarithmes donnera les premiers chiffres du nombre demandé, qui seront 181858. Quoique ce nombre ne puisse aucunement être exprimé, au moins est-il certain qu'il est composé de 5050446 chiffres, & que les six premiers sont 181858, lesquels doivent être encore suivis vers la droite de 5050440 autres, dont quelques-uns pourroient être déterminés avec des tables de logarithmes plus étendues; c'est ainsi qu'on trouveroit pour les onze premiers chiffres 18185852986.

CHAPITRE VII.

Du Développement des Quantités exponentielles & logarithmiques en Séries.

114. Puisqu'on a $a^0 = 1$, & qu'à mesure que l'exposant de a augmente, la valeur de la puissance augmente aussi, pourvu que a soit un nombre plus grand que l'unité; il

s'ensuit que si l'exposant surpasse infiniment peu zéro, la puissance surpassera l'unité aussi infiniment peu. Soit ω un nombre infiniment petit, ou une fraction si petite, qu'elle differe infiniment peu de zéro, on aura $a^{\omega} = 1 + \psi$, ψ étant un nombre infiniment petit; car il est constant par le Chapitre précédent, que si ψ n'étoit pas infiniment petit, ω ne pourroit pas l'être non plus. ψ sera donc ou $= \omega$, ou $> \omega$, ou $< \omega$, rapport qui dépendra toujours de la valeur de la lettre a. Comme ce rapport est encore inconnu, faisons $\psi = k\omega$, de maniere que $a^{\omega} = 1 + k\omega$; si nous prenons a pour la base logarithmique, nous aurons $\omega = l(1 + k\omega)$.

Exemple.

Pour faire voir plus clairement comment le nombre k dépend de la base a; supposons $a = 10$, & cherchons au moyen des tables ordinaires, le logarithme d'un nombre qui excede de très-peu l'unité, par exemple, celui de $1 + \frac{1}{1000000}$, de maniere que $k\omega = \frac{1}{1000000}$; nous trouverons $l\left(1 + \frac{1}{1000000}\right)$ $= l\,\frac{1000001}{1000000} = 0{,}00000043429 = \omega$. Donc à cause de $k\omega$ $= 0{,}00000100000$, $\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000}$ & $k = \frac{100000}{43429} = 2{,}30258$. On voit par-là que k est un nombre fini dépendant de la valeur de la base a; car si nous eussions pris un autre nombre pour la base a, le logarithme du même nombre $1 + k\omega$, auroit eu un rapport donné avec le premier, & il en seroit résulté une autre valeur pour k.

115. Puisque $a^{\omega} = 1 + k\omega$, on aura $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^{i}$, quelque nombre qu'on prenne pour i. Donc $a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1} k\omega$ $+ \frac{i(i-1)}{1.\,2} k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.\,2.\,3} k^3\omega^3 + \&c.$ Si l'on fait i $= \frac{z}{\omega}$, & que z représente un nombre quelconque fini, à

cause de ω infiniment petit, i deviendra un nombre infiniment grand, & par conséquent $\omega = \frac{z}{i}$, étant une fraction dont le dénominateur est infini, sera une quantité infiniment petite, telle qu'elle a été supposée. Écrivons donc $\frac{z}{i}$ à la place de ω, & nous aurons $a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1} kz$ $+ \frac{1(i-1)}{1.\ 2i} k^2 z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1.\ 2i.\ 3i} k^3 z^3 + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1.\ 2i.\ 3i.\ 4i} k^4 z^4$ $+$ &c; équation, qui sera vraie, si l'on prend pour i un nombre infiniment grand, & alors k sera un nombre déterminé dépendant de la valeur de a, comme nous venons de le voir.

116. Comme i est un nombre infiniment grand; il s'ensuit que $\frac{i-1}{i} = 1$; car il est évident que plus le nombre qu'on substituera à i sera grand, plus la valeur de la fraction $\frac{i-1}{i}$ approchera de l'unité; donc si i est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable, la fraction $\frac{i-1}{i}$ égalera l'unité. Par une raison semblable; $\frac{i-2}{i} = 1$; $\frac{i-3}{i}$ $= 1$ &c. Concluons de-là que $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$; $\frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$; ainsi des autres. Ces valeurs étant donc substituées, il en résultera $a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2 z^2}{1.\ 2} + \frac{k^3 z^3}{1.2.3} + \frac{k^4 z^4}{1.2.3.4} +$ &c. à l'infini. Cette équation exprime en même-temps la relation entre les nombres a & k; car, en supposant $z = 1$, on aura $a = 1$ $+ \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.\ 2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} +$ &c, & pour que $a = 10$, il faut que k soit environ $= 2{,}30258$; comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

117. Supposons $b = a^n$, en prenant le nombre a pour la base logarithmique, nous aurons $lb = n$; & puisque $b^z =$

a^{nz}, nous obtiendrons par une série infinie $b^{z} = 1 + \frac{knz}{1} + \frac{k^2 n^2 z^2}{1.\ 2} + \frac{k^3 n^3 z^3}{1.2.3} + \frac{k^4 n^4 z^4}{1.2.3.4} +$ &c, & en écrivant lb au lieu de n, $b^{z} = 1 + \frac{kz}{1} \cdot lb + \frac{k^2 z^2}{1.\ 2}(lb)^2 + \frac{k^3 z^3}{1.\ 2.\ 3}(lb)^3 + \frac{k^4 z^4}{1.2.3.4}(lb)^4 +$ &c. Ainsi, la valeur de la lettre k étant une fois connue par celle de la base a, une quantité exponentielle quelconque b^{z} pourra être exprimée par une série infinie, dont les termes marchent suivant les puissances de z. Cela posé, faisons voir à présent comment les logarithmes peuvent être développés en séries infinies.

118. Comme $a^{\omega} = 1 + k\omega$, ω étant une fraction infiniment petite, & que la relation entre a & k est donnée par cette équation: $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.\ 2.\ 3} +$ &c; en prenant a pour la base logarithmique, nous aurons $\omega = l(1 + k\omega)$ & $i\omega = l(1 + k\omega)^{i}$; or il est visible que plus le nombre substitué à i sera grand, plus la puissance $(1 + k\omega)^{i}$ surpassera l'unité, & qu'en faisant $i =$ à un nombre infini, la valeur de la puissance $(1 + k\omega)^{i}$ s'élevera au-dessus de l'unité. Donc si l'on suppose $(1 + k\omega)^{i} = 1 + x$, on aura $l(1 + x) = i\omega$. Il suit de-là que le nombre $i\omega$, étant fini, puisqu'il est le logarithme du nombre $1 + x$, i doit être un nombre infiniment grand; car autrement $i\omega$ ne pourroit avoir une valeur finie.

119. Ayant fait $(1 + k\omega)^{i} = 1 + x$; $1 + k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}}$, & $k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1$; d'où $i\omega = \frac{i}{k}\left[(1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1\right]$. Or $i\omega = l(1 + x)$; donc $l(1 + x) = \frac{i}{k}(1 + x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}$, i étant supposé

infiniment grand; mais $(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{i.\,2i}x^2 + \frac{1(i-1)(2i-1)}{i.\,2i.\,3i}x^3 - \frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i.\,2i.\,3i\,4i}x^4 +$ &c; & à cause de i infiniment grand $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3}$; $\frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}$ &c. Donc $i(1+x)^{\frac{1}{i}} = i + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$ &c, & par conséquent $l(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.\right)$, a étant toujours la base logarithmique, & k désignant le nombre relatif à cette base, de maniere qu'on ait l'équation $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} +$ &c.

120. Puisque nous avons trouvé une série égale au logarithme du nombre $1+x$, nous pourrons à son aide, la base a étant donnée, représenter la valeur du nombre k. En effet, supposons $1 + x = a$, à cause de $la = 1$, nous aurons $1 = \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \&c.\right)$ & par conséquent $k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} +$ &c. Série infinie, dont la valeur, en faisant $a = 10$, devra être à-peu-près $= 2{,}30258$, quoiqu'il soit difficile de concevoir que $2{,}30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} +$ &c; parce que les termes de cette série vont toujours en augmentant, & qu'il ne suffit pas par conséquent d'en calculer quelques-uns pour en obtenir une valeur approchée. Nous remédierons tout-à-l'heure à cet inconvénient.

121. Si $l(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \&c.\right)$; en faisant x négative, $l(1-x) = -\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \&c.\right)$; & ôtant la seconde suite de la premiere; $l(1+x) - l(1-x) = l\frac{1+x}{1-x} =$

$\frac{2}{k}$

$\frac{2}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\&c.\right)$. Soit maintenant $\frac{1+x}{1-x}=a$, de maniere que $x=\frac{a-1}{a+1}$, à cauſe de $la=1$, $k=2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+\&c.\right)$; équation qui donne la valeur du nombre k, lorſqu'on connoît celle de la baſe a. Ainſi en faiſant $a=10$, on aura $k=2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3.11^3}+\frac{9^5}{5.11^5}+\frac{9^7}{7.11^7}+\&c.\right)$; ſérie aſſez convergente, pour qu'on en puiſſe tirer promptement la valeur approchée de k.

122. Comme on peut prendre à volonté la baſe a pour établir un ſyſtême de logarithmes, nous pourrons la prendre telle, que k devienne $=1$. Suppoſons donc $k=1$; la ſérie trouvée ci-deſſus (*art.* 116) deviendra $a=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\&c$, dont les termes convertis en décimales, & ajoutés donnent pour a cette valeur $2{,}71828182845904523536028$, dont le dernier chiffre eſt encore exact. Les logarithmes calculés ſur cette baſe, s'appellent Logarithmes *naturels* ou *hyperboliques*, parce qu'ils peuvent repréſenter la quadrature (q) de l'hyperbole. Au reſte, pour abréger nous déſignerons conſtamment ce nombre $2{,}718281828459$ &c. par la lettre e, qui indiquera par conſéquent la baſe des logarithmes naturels ou hyperboliques, à laquelle répond la valeur de $k=1$; c'eſt-à-dire, que cette lettre e exprimera la ſomme de la ſérie $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\&c.$ continuée à l'infini.

123. Telle eſt donc la propriété des logarithmes hyperboliques, que celui du nombre $1+\omega=\omega$; ω ſignifiant une quantité infiniment petite, &, comme en vertu de cette propriété, $k=1$, on pourra obtenir les logarithmes hyperboliques de tous les nombres. Ainſi, en écrivant e à la place du nombre trouvé ci-deſſus, on aura toujours $e^z=1+\frac{z}{1}$

vertie en une férie infinie, à l'aide des logarithmes hyperboliques; mais auffi, i défignant un nombre infiniment grand, les quantités exponentielles & les logarithmes peuvent être repréfentés par des puiffances. En effet, $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$, & par conféquent $a^y = \left(1 + \frac{y\,l\,a}{i}\right)^i$; d'ailleurs, on a pour les logarithmes hyperboliques $l(1+x) = i\left[(1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\right]$. Au furplus, l'ufage des logarithmes eft démontré plus en détail dans le calcul intégral.

CHAPITRE VIII.

Des Quantités tranfcendantes qui naiffent du Cercle.

126. Après la confidération des logarithmes & des quantités exponentielles, vient celle des arcs de cercle, & de leurs finus & cofinus, tant parce qu'ils forment une autre efpece de quantités tranfcendantes, que parce qu'ils dérivent des quantités logarithmiques mêmes & des quantités exponentielles, lorfqu'elles renferment des imaginaires, ce qu'on verra plus clairement ci-après.

Suppofons donc le rayon du cercle ou le finus total $= 1$, il paroît affez clair que la circonférence de ce cercle ne peut être exprimée exactement en nombres rationnels *, mais on a trouvé par approximation la demi-circonférence de ce cercle $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384446 +. Pour abréger j'é-

* Cette propofition a été démontrée par Lambert, *Mémoires de Berlin*; mais on en trouvera une démonftration plus fimple dans les *Élémens de Géométrie* du C. Legendre, qui ont paru depuis peu.

ecrirai π au lieu de ce nombre, de sorte que $\pi =$ à la demi circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$; ou π sera la longueur d'un arc de 180 degrés.

127. Soit z un arc quelconque de cercle dont je suppose toujours le rayon $= 1$; on a coutume de considérer plus particuliérement les sinus & cosinus de cet arc z. Pour représenter dans la suite le sinus d'un arc z, j'écrirai *sin.* $A.z$, ou simplement *sin.* z. Et pour représenter le cosinus j'écrirai *cos.* $A.z$, ou seulement *cos.* z. Ainsi comme π exprime un arc de 180°, $\sin. 0\pi = 0$; $\cos. 0\pi = 1$; $\sin. \frac{1}{2}\pi = 1$; $\cos. \frac{1}{2}\pi = 0$; $\sin. \pi = 0$, $\cos. \pi = -1$; $\sin. \frac{3}{2}\pi = -1$, $\cos. \frac{3}{2}\pi = 0$; $\sin. 2\pi = 0$, & $\cos. 2\pi = 1$. Tous les sinus & cosinus sont donc renfermés dans les limites $+1$ & -1. Or $\cos. z = \sin. (\frac{1}{2}\pi - z)$ & $\sin. z = \cos. (\frac{1}{2}\pi - z)$; & $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1$. Outre ces dénominations il faut distinguer celles-ci: *tang.* z, qui désigne la tangente de l'arc z, & *cot.* z, qui désigne la cotangente de l'arc z; on sait d'ailleurs que $\tang. z = \frac{\sin. z}{\cos. z}$, & que $\cot. z = \frac{\cos. z}{\sin. z} = \frac{1}{\tang. z}$. Tout cela est connu par la Trigonométrie.

128. On sait aussi qu'étant donnés les deux arcs y & z, $\sin. (y + z) = \sin. y. \cos. z + \cos. y. \sin z$, & $\cos. (y + z) = \cos. y. \cos. z - \sin. y. \sin z$; de même $\sin. (y - z) = \sin. y. \cos. z - \cos. y. \sin. z$; & $\cos. (y - z) = \cos. y. \cos. z + \sin. y. \sin. z$.

Par conséquent, en substituant à y les arcs $\frac{1}{2}\pi$, π; $\frac{3}{2}\pi$, &c. nous obtiendrons

$\sin. (\frac{1}{2}\pi + z) = + \cos. z$	$\sin. (\frac{1}{2}\pi - z) = + \cos. z$
$\cos. (\frac{1}{2}\pi + z) = - \sin. z$	$\cos. (\frac{1}{2}\pi - z) = + \sin. z$
$\sin. (\pi + z) = - \sin. z$	$\sin. (\pi - z) = + \sin. z$
$\cos. (\pi + z) = - \cos. z$	$\cos. (\pi - z) = - \cos. z$
$\sin. (\frac{3}{2}\pi + z) = - \cos. z$	$\sin. (\frac{3}{2}\pi - z) = - \cos. z$
$\cos. (\frac{3}{2}\pi + z) = + \sin. z$	$\cos. (\frac{3}{2}\pi - z) = - \sin. z$
$\sin. (2\pi + z) = + \sin. z$	$\sin. (2\pi - z) = - \sin. z$
$\cos. (2\pi + z) = + \cos. z$	$\cos. (2\pi - z) = + \cos. z$

$$cos. a + cos. b = 2\, cos. \frac{a+b}{2}\; cos. \frac{a-b}{2}$$

$$cos. b - cos. a = 2\, fin. \frac{a+b}{2}\; fin. \frac{a-b}{2}.$$

Ces résultats nous donneront, à l'aide de la division, ces théoremes :

$$\frac{fin. a + fin. b}{fin. a - fin. b} = tang. \frac{a+b}{2}. cot. \frac{a-b}{2} = \frac{tang. \frac{a+b}{2}}{tang. \frac{a-b}{2}}$$

$$\frac{fin. a + fin. b}{cos. a + cos. b} = tang. \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{fin. a + fin. b}{cos. b - cos. a} = cot. \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{fin. a - fin. b}{cos. a + cos. b} = tang. \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{fin. a - fin. b}{cos. b - cos. a} = cot. \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{cos. a + cos. b}{cos. b - cos. a} = cot. \frac{a+b}{2}. cot. \frac{a-b}{2}$$

Enfin de ces derniers théoremes nous déduirons ceux-ci :

$$\frac{fin. a + fin. b}{cos. a + cos. b} = \frac{cos. b - cos. a}{fin. a - fin. b}$$

$$\frac{fin. a + fin. b}{fin. a - fin. b} \times \frac{cos. a + cos. b}{cos. b - cos. a} = \left(cot. \frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$\frac{fin. a + fin. b}{fin. a - fin. b} \times \frac{cos. b - cos. a}{cos. a + cos. b} = \left(tang. \frac{a+b}{2}\right)^2$$

132. Puisque $(fin. z)^2 + (cos. z)^2 = 1$, en décomposant en facteurs, on aura $(cos. z + \sqrt{-1}. fin. z)\,(cos. z - \sqrt{-1}\, fin. z) = 1$. Ces facteurs, quoique imaginaires, sont d'un grand usage dans la combinaison & dans la multiplication des arcs. En effet, cherchons le produit de ces facteurs $(cos. z + \sqrt{-1}. fin. z)\,(cos. y + \sqrt{-1}. fin. y)$, nous trouverons $cos. y. cos. z - fin. y. fin. z + (cos. y. fin. z + fin. y. cos. z)\sqrt{-1}$; mais comme $cos. y. cos. z - fin. y. fin. z = cos. (y + z)$, & $cos. y. fin. z + fin. y. cos. z = fin. (y + z)$; nous obtiendrons ce produit $(cos. y + \sqrt{-1}. fin. y)$ $(cos. z$

$(\cos. z + \sqrt{-1}.\,\sin. z) = \cos.(y+z) + \sqrt{-1}.\,\sin.(y+z)$.

Semblablement

$(\cos. y - \sqrt{-1}.\,\sin. y)(\cos. z - \sqrt{-1}.\,\sin. z) = \cos.(y+z) - \sqrt{-1}.\,\sin.(y+z)$.

De même

$(\cos. x \pm \sqrt{-1}.\,\sin. x)(\cos. y \pm \sqrt{-1}.\,\sin. y)(\cos. z \pm \sqrt{-1}.\,\sin. z) = \cos.(x+y+z) \pm \sqrt{-1}.\,\sin.(x+y+z)$.

133. Il suit de-là que $(\cos. z \pm \sqrt{-1}.\,\sin. z)^2 = \cos. 2z \pm \sqrt{-1}.\,\sin. 2z$, & $(\cos. z \pm \sqrt{-1}.\,\sin z)^3 = \cos. 3z \pm \sqrt{-1}.\,\sin. 3z$; & qu'en général $(\cos. z \pm \sqrt{-1}.\,\sin. z)^n = \cos. nz \pm \sqrt{-1}.\,\sin. nz$: d'où nous tirerons à cause du double signe,

$$\cos. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}.\,\sin. z)^n + (\cos. z - \sqrt{-1}.\,\sin. z)^n}{2} \quad \&$$

$$\sin. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}.\,\sin. z)^n - (\cos. z - \sqrt{-1}.\,\sin. z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Donc en développant ces binomes en séries, nous aurons

$$\cos. nz = (\cos. z)^n - \frac{n.(n-1)}{1.\ 2}(\cos. z)^{n-2}(\sin z)^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}(\cos. z)^{n-4}(\sin. z)^4 - \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}(\cos. z)^{n-6}(\sin. z)^6 + \&c.$$

$$\&\ \sin. nz = \frac{n}{1}(\cos. z)^{n-1}\sin. z - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}(\cos. z)^{n-3}(\sin. z)^3 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}(\cos. z)^{n-5}(\sin. z)^5 - \&c.$$

134. Soit z un arc infiniment petit, alors $\sin. z = z$, & $\cos. z = 1$; soit en même temps n un nombre infiniment grand, pour que l'arc nz soit d'une grandeur finie, pour que nz, par exemple, $= v$; à cause de $\sin. z = z = \frac{v}{n}$, on aura

$$\cos. v = 1 - \frac{v^2}{1.\ 2} + \frac{v^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \frac{v^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} + \&c. \ \&$$

$$\textit{ſin.}\ v = v - \frac{v^3}{1.\,2.\,3} + \frac{v^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \frac{v^7}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7} + \&c.$$

Ainſi l'arc v étant donné, on pourra, à l'aide de ces ſéries, trouver ſon ſinus & ſon coſinus. Pour rendre l'uſage de ces formules plus général, ſuppoſons que l'arc v ſoit au quart de la circonférence ou a 90°, comme m eſt à n, ou que $v = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$; comme la valeur de π eſt connue, en la ſubſtituant dans tous les termes, on trouvera

$$\textit{ſin.}\ A\ \frac{m}{n}\ 90^\circ =$$

$$+ \frac{m}{n} \cdot 1,5707963267948966192313216916$$
$$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,6459640975062462536557565636$$
$$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,0796926262461670451205055488$$
$$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,0046817541353186881006854632$$
$$+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,0001604411847873598218726605$$
$$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0,0000035988432352120853404580$$
$$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0,0000000569217292196792681171$$
$$- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0,0000000006688035109811467224$$
$$+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0,0000000000060669357311061950$$
$$- \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0,0000000000000437706546731370$$
$$+ \frac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0,0000000000000002571422892856$$
$$- \frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0,0000000000000000012538995403$$
$$+ \frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0,0000000000000000000051564550$$
$$- \frac{m^{27}}{n^{27}} \cdot 0,0000000000000000000000181239$$
$$+ \frac{m^{29}}{n^{29}} \cdot 0,0000000000000000000000000549$$

& $cot.\ 2a = tang.\ (30 + 2b)$. Donc $tang.\ (30 + 2b) = \frac{cot.\ (30 - b) - tang.\ (30 - b)}{2}$; ce qui donne aussi les tangentes des arcs plus grands que 30°.

Quant aux sécantes & aux cosécantes, on les conclut des tangentes par la seule soustraction ; car on a $cosec.\ z = cot.\ \frac{1}{2} z - cot.\ z$, & partant $séc.\ z = cot.\ (45° - \frac{1}{2} z) - tang.\ z$. (r)
On voit clairement par-là comment on a pu construire des tables de sinus.

138. Supposons encore dans les formules précédentes (*art.* 133) l'arc z infiniment petit, & n un nombre infiniment grand i, afin d'obtenir pour iz une valeur finie v ; nous aurons donc $nz = v$, & $z = \frac{v}{i}$, & par conséquent $sin.\ z = \frac{v}{i}$, & $cos.\ z = 1$; ces substitutions faites donneront $cos.\ v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$ & $sin.\ v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}$. Or dans le Chapitre précédent, nous avons vu que $\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z$, e désignant la base des logarithmes hyperboliques ; ayant donc écrit pour z, d'une part $+ v\sqrt{-1}$ & d'une autre part $- v\sqrt{-1}$, on aura

$$cos.\ v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \ \&\ sin.\ v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

On comprend par-là comment les quantités exponentielles imaginaires se ramenent à des sinus & à des cosinus d'arcs réels. On aura aussi $e^{+v\sqrt{-1}} = cos.\ v + \sqrt{-1}\ sin.\ v$, & $e^{-v\sqrt{-1}} = cos.\ v - \sqrt{-1}\ sin.\ v$.

139. Supposons à présent dans les mêmes formules (*art.* 133) n