Pierre de Fermat, *Sur la transformation et la simplification des équations de lieux*, 1636.

SUR LA TRANSFORMATION ET LA SIMPLIFICATION DES ÉQUATIONS DE LIEUX,

POUR LA COMPARAISON SOUS TOUTES LES FORMES DES AIRES CURVILIGNES, SOIT ENTRE ELLES, SOIT AVEC LES RECTILIGNES,

ET EN MÊME TEMPS

SUR L'EMPLOI DE LA PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE

POUR LA QUADRATURE DES PARABOLES ET HYPERBOLES A L'INFINI.

Archimède n'a employé la progression géométrique que pour la seule quadrature de la parabole; dans ses autres comparaisons entre quantités hétérogènes, il s'est borné à la seule progression arithmétique. Est-ce parce qu'il avait trouvé que la progression géométrique se prêtait moins bien à la quadrature? Est-ce parce que l'artifice particulier dont il s'est servi pour carrer avec cette progression la première parabole peut difficilement s'appliquer aux autres? Quoi qu'il en soit, j'ai reconnu et éprouvé cette progression comme très féconde en quadratures, et je communique volontiers aux géomètres modernes mon invention qui permet de carrer, par une méthode absolument identique, et paraboles et hyperboles.

Toute cette méthode dérive d'une seule propriété bien connue de la progression géométrique, c'est-à-dire du théorème suivant :

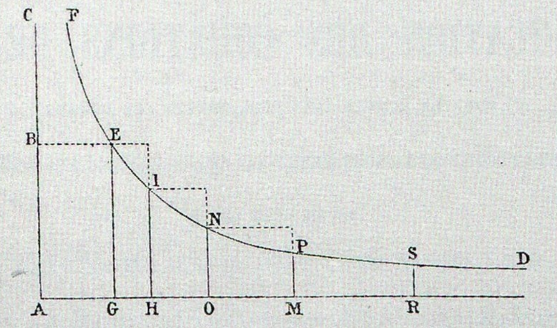
Étant donnée une progression géométrique dont les termes décroissent indéfiniment, la différence des deux termes de la raison de cette progres-

sion est au plus petit des deux comme le plus grand de tous les termes de la progression est à la somme de tous les autres jusqu'à l'infini [1].

Cela posé, soit d'abord proposée la quadrature des hyperboles :

Je définis hyperboles des courbes d'espèces variant à l'infini, qui, comme DSEF (*fig.* 142), ont cette propriété que, si l'on suppose, sous

Fig. 142.



un angle donné quelconque RAC, les asymptotes RA, AC que l'on peut prolonger indéfiniment comme la courbe elle-même, et que si l'on mène parallèlement à l'une des asymptotes et comme on le voudra les droites GE, HI, ON, MP, RS, etc., on aura toujours le même rapport entre une puissance déterminée de AH et la même puissance de AG d'une part, et une puissance de GE (semblable ou différente par rapport à la précédente) et la même puissance de HI, d'autre part. J'entends par puissances, non seulement les carrés, cubes, bicarrés, etc., dont les exposants sont 2, 3, 4, etc., mais aussi les racines simples dont l'exposant est 1.

Je dis que toutes ces hyperboles à l'infini, sauf une seule, celle d'Apollonius ou la première, peuvent être carrées au moyen d'une progression géométrique par une méthode uniforme et constante.

Soit par exemple l'hyperbole dont la propriété est définie par l'égalité constante des rapports $\frac{HA^2}{AG^2} = \frac{GE}{HI}$ et $\frac{OA^2}{AH^2} = \frac{HI}{ON}$, etc. Je dis que l'espace indéfini qui a pour base GE et qui est limité d'un côté par la courbe ES, de l'autre par l'asymptote indéfinie GOR, est égal à une aire rectiligne donnée.

Imaginons les termes d'une progression géométrique décroissant indéfiniment; soient AG le premier, AH le second, AO le troisième, etc. Supposons que ces termes soient assez rapprochés les uns des autres pour que, suivant la méthode d'Archimède, on puisse *adégaler,* comme dit Diophante, ou égaler par approximation le parallélogramme rectiligne $GE \times GH$ au quadrilatère mixtiligne GHIE; nous supposerons de plus que les premiers intervalles GH, HO, OM, etc. des termes progressifs soient suffisamment égaux entre eux, pour que l'on puisse facilement employer la méthode d'Archimède de réduction à l'impossible, par circonscriptions et inscriptions. Il suffit de faire cette remarque une fois pour ne pas s'obliger à revenir et à insister constamment sur un artifice bien connu de tous les géomètres.

Cela posé, puisque $\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AO} = \frac{AO}{AM}$, on aura aussi $\frac{AG}{AH} = \frac{GH}{HO} = \frac{HO}{OM}$, pour les intervalles. Mais, pour les parallélogrammes,

$$\frac{EG \times GH}{HI \times HO} = \frac{HI \times HO}{NO \times OM};$$

en effet, le rapport des parallélogrammes $\frac{GE \times GH}{HI \times HO}$ est composé des rapports $\frac{GE}{HI}$ et $\frac{GH}{HO}$; mais, comme nous l'avons indiqué, $\frac{GH}{HO} = \frac{AG}{AH}$; donc le rapport $\frac{EG \times GH}{HI \times HO}$ est composé des rapports $\frac{GE}{HI}$ et $\frac{AG}{AH}$. D'autre part, par construction, $\frac{GE}{HI} = \frac{HA^2}{GA^2}$ ou $\frac{AO}{GA}$, par suite de la proportionnalité des termes; donc le rapport $\frac{EG \times GH}{HI \times GO}$ est composé des rapports $\frac{AO}{AG}$ et $\frac{AG}{AH}$; mais $\frac{AO}{AH}$ est composé des mêmes rapports; on aura donc pour le rapport des parallélogrammes : $\frac{GE \times GH}{HI \times HO} = \frac{OA}{AH} = \frac{HA}{AG}$.

On prouvera de même que $\frac{HI \times HO}{ON \times OM} = \frac{AO}{HA}$.

Mais les droites AO, HA, GA qui constituent les rapports des parallélogrammes, forment, par construction, une proportion géométrique; donc les parallélogrammes en nombre indéfini $GE \times GH$, $HI \times HO$, $ON \times NM$, etc. formeront une progression géométrique continue dont la raison sera $\frac{HA}{AG}$. Par suite, selon le théorème constitutif de notre méthode, GH, différence des deux termes de la raison, sera au plus petit terme GA, comme le premier terme de la progression des parallélogrammes, c'est-à-dire comme le parallélogramme $EG \times GH$, à la somme de tous les autres parallélogrammes en nombre indéfini, ou autrement, suivant l'*adéquation* d'Archimède, à la figure limitée par HI, par l'asymptote HR et la courbe IND prolongée indéfiniment.

Mais, si l'on multiplie les deux termes par GE, $\frac{HG}{GA} = \frac{GE \times GH}{GE \times GA}$; donc $GE \times GH$ est à cette figure indéfinie dont la base est HI comme $GE \times GH$ est à $GE \times GA$. Donc le parallélogramme $GE \times GA$, qui est une aire rectiligne donnée, est *adégal* à la figure précitée; si l'on ajoute de part et d'autre le parallélogramme $GE \times GH$, qui, par suite des divisions indéfiniment poursuivies, s'évanouira et se réduira à rien, on arrive à cette vérité qu'il serait facile de confirmer par une démonstration plus prolixe, menée à la façon d'Archimède : que dans ce genre d'hyperbole, le parallélogramme AE est équivalent à la figure comprise sous la base GE, l'asymptote GR et la courbe ED indéfiniment prolongée.