Master de Mathématiques – Sorbonne Université (M1)

UE 4M039 : Histoire des mathématiques

(Alexandre Guilbaud et Laurent Mazliak)

Semaine 6

Le calcul différentiel et intégral et la notion de fonction au centre de l'édifice analytique

Prologue sur les Lumières : quelques repères

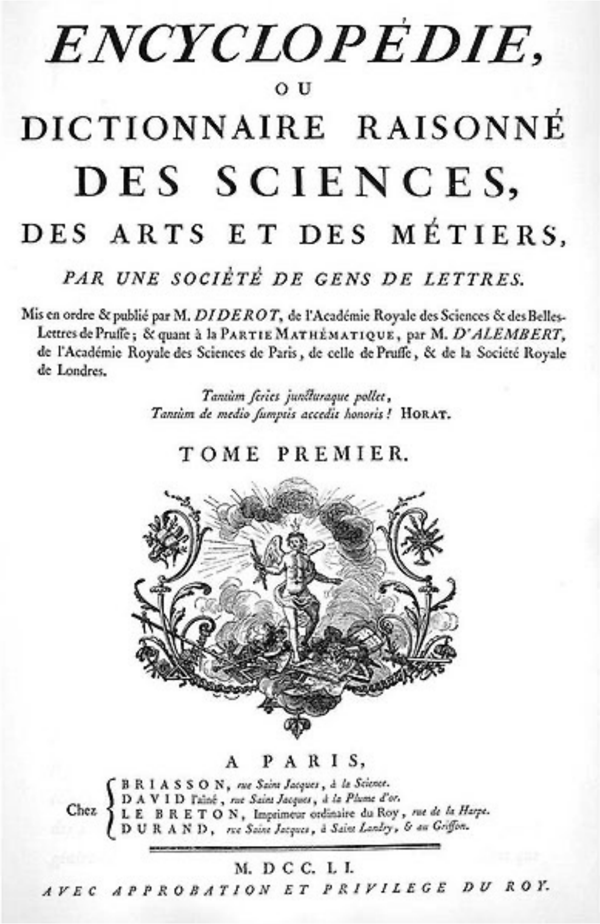
- 1687 : Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica.*
- 1689-1690 : John Locke, *Deux Traités sur le gouvernement*, *Lettre sur la tolérance*, *Essai sur l'entendement humain*.
- 1734 : Voltaire, *Lettres philosophiques*.
- 1738 : Voltaire, *Elémens de la philosophie de Neuton.*
- 1748 : Montesquieu, *De l'esprit des lois*.
- 1749 : Buffon, *Histoire naturelle*
Diderot, *Lettre sur les aveugles*.
- 1751 : 1er volume de l'*Encyclopédie* codirigée par Diderot et D'Alembert, contenant le « Discours préliminaire » de D'Alembert.
- 1755 : Jean-Jacques Rousseau, *Discours sur l'origine de l'inégalité parmi les hommes*.
- 1759 : Voltaire, *Candide*.
- 1762 : Jean-Jacques Rousseau, *Emile ou de l'éducation* / *Du contrat social*.
- 1763 : Voltaire, *Traité sur la tolérance.*
- 1771 : Bougainville, *Voyage autour du monde*.
- 1781 : Emmanuel Kant, *Critique de la raison pure*.
- 1784 : Emmanuel Kant, *Réponse à la question : « qu'est ce que les Lumières ? »*
- 1794 : Condorcet, *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain*.

Prologue sur les Lumières : l’*Encyclopédie* de Diderot et D’Alembert

« Le but d'une encyclopédie est de rassembler les connaissances éparses sur la surface de la terre; d'en exposer le système général aux hommes avec qui nous vivons, et de le transmettre aux hommes qui viendront après nous; afin que les travaux des siècles passés n'aient pas été inutiles pour les siècles qui succèderont ; que nos neveux devenant plus instruits, deviennent en même temps plus vertueux et plus heureux; et que nous ne mourions pas sans avoir bien mérité du genre humain. » (Diderot, article ENCYCLOPÉDIE)

- D'Alembert, article Géomètre, t. VII (1757) :

« Faites naître, s'il est possible, des géometres parmi ces peuples ; c'est une semence qui produira des philosophes avec le tems, & presque sans qu'on s'en aperçoive. L'orthodoxie la plus délicate & la plus scrupuleuse n'a rien à démêler avec la Géométrie. Ceux qui croiroient avoir intérêt de tenir les esprits dans les ténebres, fussent-ils assez prévoyans pour pressentir la suite des progrès de cette science, manqueroient toûjours de prétexte pour l'empêcher de se répandre. Bientôt l'étude de la Géométrie conduira à celle de la méchanique ; celle-ci menera comme d'elle-même & sans obstacle, à l'étude de la saine Physique ; & enfin la saine Physique à la vraie Philosophie, qui par la lumiere générale & prompte qu'elle répandra, sera bientôt plus puissante que tous les efforts de la superstition ; car ces efforts, quelque grands qu'ils soient, deviennent inutiles dès qu'une fois la nation est éclairée. »


ENCYCLOPÉDIE,
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS,
PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.
Mis en ordre & publié par M. DIDEROT, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Prusse ; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, & de la Société Royale de Londres.
Tantùm series juncturaque pollet,
Tantùm de medio sumptis accedit honoris ! HORAT.
TOME PREMIER.
A PARIS,
Chez BRIASSON, rue Saint Jacques, à la Science.
DAVID l'aîné, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.
LE BRETON, Imprimeur ordinaire du Roy, rue de la Harpe.
DURAND, rue Saint Jacques, à Saint Landry, & au Griffon.
M. DCC. LI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Prologue sur les Lumières : l'*Encyclopédie* de Diderot et D'Alembert

- 1745 – Association de libraires pour traduire la *Cyclopaedia or an Universal dictionary of arts and sciences d'Ephraim Chambers* (2 vol., 1728). Gua de Malves, académicien, organise le travail et recrute Diderot et D'Alembert.

- 1747 – Diderot et D'Alembert remplacent Gua de Malves comme éditeurs et mettent en place un projet plus ambitieux (28 volumes au final, dont 17 de textes)

- 1749 – Diderot emprisonné à Vincennes (suite à la parution de sa *Lettres sur les aveugles à l'usage de ceux qui voient*), puis libéré.

- 1750 – Publication du *Prospectus*, rédigé par Diderot, qui lance une souscription pour la vente d'une *Encyclopédie ou dictionnaire universel des arts et des sciences* en dix volumes dont deux de planches.

- 1751 – Parution du premier tome contenant le *Discours préliminaire* de D'Alembert suivi du « Système figuré des connaissances humaines ».

- 1752 – Violentes attaques des jésuites et des jansénistes suivies d'un arrêt du conseil d'Etat. La publication reprend cependant.

- 1757-1759 – Après une violente campagne (contre l'article GENÈVE de D'Alembert, notamment), nouvelle interdiction (définitive), suivie d'une condamnation papale.

Prologue sur les Lumières : l'*Encyclopédie* de Diderot et D'Alembert

- 1765 – Parution des dix derniers volumes de textes, sans privilège et sous une adresse étrangère.
- 1762-1772 : parution des onze volumes de planches.

Diderot (1713-1784)

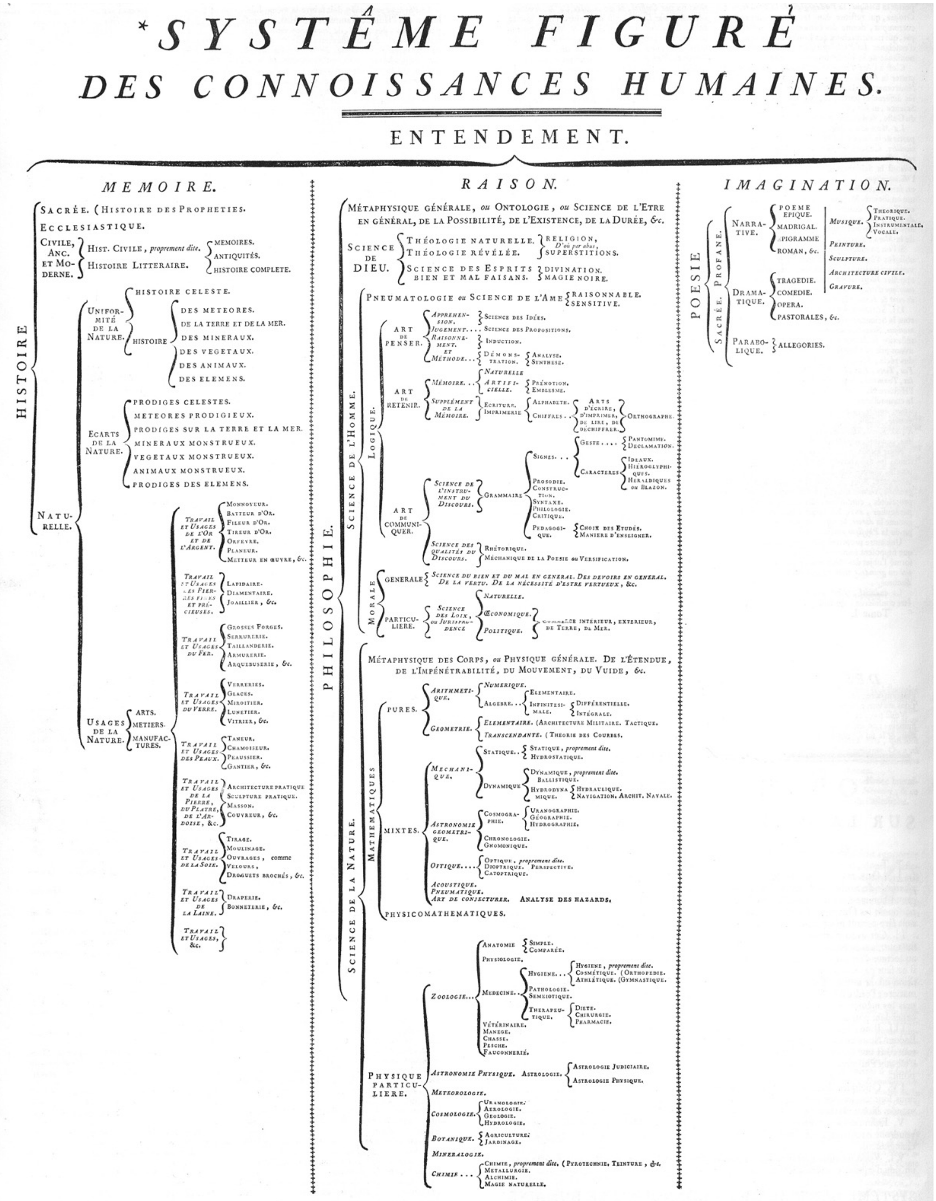
D'Alembert (1717-1783)

- La plus vaste entreprise éditoriale du siècle :
  - plus de 200 contributeurs
  - plus de 74 000 articles
  - 17 volumes de texte
  - 11 volumes de planches
- Diderot et D'Alembert codirigent l'entreprise jusqu'au septième tome, paru en 1757. En 1758, D'Alembert abandonne sa charge de co-directeur (suite à la campagne de 1757 contre son article Genève) mais reste responsable des articles mathématiques et physicomathématiques.

Pour plus d'informations sur l'*Encyclopédie*, voir le site :
http://enccre.academie-sciences.fr

I. Les mathématiques au milieu du XVIII^{e} siècle

Le « Système figuré des connaissances humaines », publié à la suite du *Discours préliminaire* de D'Alembert dans le premier tome de l'*Encyclopédie* (1751).



I. Les mathématiques au milieu du XVIII^{e} siècle

I. Les mathématiques au milieu du XVIIIe siècle

- D'Alembert, article MATHÉMATIQUE, ou MATHÉMATIQUES, *Encyclopédie*, vol. 10, 1765, p. 188b-189a :

> « Les *Mathématiques* se divisent en deux classes ; la premiere, qu'on appelle *Mathématiques pures*, considere les propriétés de la grandeur d'une maniere abstraite ; or la grandeur sous ce point de vûe, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue ; dans le premier cas les *Mathématiques* pures s'appellent Arithmétiques ; dans le second, Géométrie. […]
> La seconde classe s'appelle *Mathématiques mixtes* ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrete, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrete, c'est-à-dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers. […]
> Du nombre des *Mathématiques* mixtes, sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, &c. *Voyez* ces mots. *Voyez* aussi le *système figuré* des connoissances humaines, qui est à la tête de cet ouvrage, & l'explication de ce système, immédiatement à la suite du discours préliminaire, toutes les divisions des *Mathématiques* y sont détaillées, ce qui nous dispense de les rappeller ici. »

L'*Encyclopédie méthodique* de *Mathématiques*

(3 vol., 1784-1789)

DISCOURS PRÉLIMINAIRE,

PAR M. L'ABBÉ BOSSUT.

LE NOM SEUL des Mathématiques, qui, dans ſon étymologie, veut dire *Inſtruction*, *Science*, peint d'une manière juſte & préciſe l'idée noble qu'on doit s'en former. En effet, elles ne ſont qu'un enchaînement de principes, de raiſonnemens & de concluſions, que la certitude & l'évidence accompagnent toujours: caractère propre des connoiſſances ſcientifiques.

On ſait que les Mathématiques ont pour objet de meſurer, ou plutôt de comparer les grandeurs; par exemple, les diſtances, les ſurfaces, les vîteſſes, *&c.* Elles ſe diviſent en *Mathématiques pures* & *Mathématiques mixtes*, autrement appellées *Sciences Phyſico-Mathématiques*.

ENCYCLOPÉDIE MÉTHODIQUE.

MATHÉMATIQUES,

Par MM. D'ALEMBERT, *l'Abbé* BOSSUT, DE LA LANDE, *le Marquis de* CONDORCET, &c.

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez PANCKOUCKE, Libraire, hôtel de Thou, rue des Poitevins;

A LIÈGE,

Chez PLOMTEUX, Imprimeur des Etats.

M. DCC. LXXXIV.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILÈGE DU ROI.

I. Les mathématiques dans l'*Encyclopédie méthodique* (1784-1789)

TABLE DE LECTURE.

On peut & même on doit se proposer trois objets dans un Dictionnaire de Mathématiques ;

1.° Un ouvrage de cette nature doit suppléer à la mémoire des personnes déjà savantes, & exercées dans les Mathématiques, mais qui néanmoins auroient pu oublier quelques termes, quelques définitions, ou même quelques théorêmes d'un usage peu fréquent.

2.° Il doit, autant que possible, satisfaire la curiosité de ceux qui, n'étant point versés dans les Mathématiques & ne voulant point se livrer à l'étude de cette science, sont cependant bien aises, dans certains cas, de connoître la valeur de quelques termes, ou de répondre à une question proposée.

3.° Et ce qui importe le plus, il doit servir d'élémens à ceux qui n'auroient sous la main que ce Dictionnaire pour toute bibliothèque Mathématique, & cela arrive souvent dans les petites villes de province.

Nous avons rempli le premier de ces objets, en rendant le vocabulaire autant complet qu'il nous étoit possible.

Nous avons rempli le second, en rendant nos articles indépendans autant que nous l'avons pu. On conçoit que souvent la chose a dû être impossible.

Nous allons remplir le troisième objet, en donnant une table des principaux articles rangés selon l'ordre dans lequel ils doivent être lus ; par ce moyen, le Dictionnaire aura l'avantage d'un traité suivi.

Cependant nous prévenons le lecteur qu'il règne un enchaînement entre les articles qui, à une première lecture, lui interdira l'intelligence parfaite de quelques-uns, malgré le secours des précédens. Il y en a d'autres qu'il faudra couper pour intercaler un grand nombre d'autres, entre la première & la seconde division. J'indiquerai les principales. Au moyen de cela, le lecteur ne pourra, en général, se regarder comme maître de son sujet, qu'après la seconde lecture. Au reste, il ne pourroit guères se promettre plus d'un traité suivi.

Entrons en matière. Pour étudier les Mathématiques avec avantage, il faut en étudier les différentes parties dans un ordre tel que l'étude d'une partie quelconque suppose, seulement des connoissances qu'on ait pu acquérir dans l'étude des parties précédentes ; ainsi, nous proposerons l'ordre suivant :

1. Arithmétique.
2. Algèbre.
3. Application de l'Algèbre à la Géométrie. On y comprendra les sections coniques, plusieurs autres courbes, & la trigonométrie sphérique.
5. Analyse.
6. Méchanique des corps solides, ou Méchanique proprement dite.
7. Méchanique des fluides ou hydrodinamique.
8. Optique.
9. Astronomie.
10. Perspective.

ARITHMETIQUE.

Arithmétique.
Numération.
Addition.
Soustraction, } les premiers articles.
Multiplication, }
Division.
Fraction.
Décimales.
Diviseur.
Extraction, (premier article.)
Proportion.
Règle, (Arithmétique.)
Logarithme, (sept colonnes à lire.)

GÉOMÉTRIE ELEMENTAIRE,

ET TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

Géométrie.
Dimension.
Perpendiculaire.
Parallèles.
Angle.
Triangle, (ce qui concerne les rectilignes seulement.)
Hypothénuse.
Surface, (dans le Dictionnaire & dans le Supplément.)
Polygone.
Cercle, (l'article de Chambers seulement.)
Solide.
Solidité.
Prisme.
Cylindre.
Pyramide.
Cone, (trois colonnes.)
Sphère.
Régulier.
Sinus, (deux colonnes.)
Trigonométrie rectiligne.

ALGEBRE.

Algèbre.
Addition, }
Soustraction, }
Multiplication, } deuxièmes articles.
Division, }
Extraction, }
Fraction algébrique.
Exposant.
Progression.
Equation, (dans le Dictionnaire & dans le Supplément.)
Cas irréductible.
Racine.
Racines égales.
Racines commensurables en partie, (dans le Supplément.)
Approximation, (jusqu'à l'étoile ; le reste doit se réserver pour l'analyse.)
Indéterminé, (l'article marqué *O* seulement.)

APPLICATION DE L'ALGEBRE

A LA GÉOMÉTRIE.

Application de l'Algèbre à la Géométrie, & de la Géométrie à l'Algèbre.
Conique.
Conjugué.
Construction.
Courbes, (jusqu'aux courbes à doubles courbures, exclusivement.)
Parabole.
Ellipse.
Hyperbole.
Assymptote.
Lieu géométrique.
Trigonométrie sphérique.

ANALYSE.

Analyse.
Analytique.
Synthèse.
Calcul aux différences finies. (Après le mot différences, Arithmétique.)
Différentiel.
Calcul différentiel. } à la suite du mot différentiel.
Equation différentielle, }
Logarithme, (le reste de l'article.)
Exponentiel.
Tangente.
Rayon osculateur.
Série.
Maximum.
Indéterminé, (les deux autres articles.)
Intégral, (les premier, troisième & quatrième articles.)
Rectification.
Quadrature, (le dernier article.)
Tangente, (méthode inverse des)
Quadrature, (l'avant dernier article.)
Substitution, (calcul intégral.)
Homogène.
Linéaire, (calcul intégral.)
Possible, (équations possibles, calcul intégral.)
Ricati.
Equations aux différences finies.
Maximum, (calcul intégral.)
Variation.
Intégral, (le cinquième article.)
Partielle.
Arbitraire, (dans le Supplément.)

MECHANIQUE.

Méchanique.
Statique.
Puissance, (Méchanique.)
Composition du mouvement.
Moment.
Equilibre.
Gravité.
Poids.
Centre de gravité.
Machine funiculaire, (au mot Funiculaire.)
Lévier.
Poulie.
Treuil.
Plan incliné.
Coin.
Vis.
Dynamique.
Elasticité.
Elastique.
Mouvement.
Percussion.
Pesanteur.
Pendule.
Oscillation.
Tautochrone.
Tractoire.
Gravitation.
Trajectoire, (Méchanique.)
Frottement.

HYDRODINAMIQUE.

Fluide.
Spécifique.
Hydrostatique.
Hydrodinamique.
Hydraulique ; & de suite machines hydrauliques.
Contraction de la veine fluide.
Résistances des fluides.
Aubes.
Air.
Ecoulement.
Pompe.

I. Les mathématiques dans l'*Encyclopédie méthodique* (1784-1789)

ANALYSE.

Analyse.
Analytique.
Synthèse.
Calcul aux différences finies. (Après le mot différences, Arithmétique.)
Différentiel.
Calcul différentiel. } à la suite du mot différentiel.
Equation différentielle, }
Logarithme, (le reste de l'article.)
Exponentiel.
Tangente.
Rayon osculateur.
Série.
Maximum.
Indéterminé, (les deux autres articles.)
Intégral, (les premier, troisième & quatrième articles.)
Rectification.
Quadrature, (le dernier article.)
Tangente, (méthode inverse des)
Quadrature, (l'avant dernier article.)
Substitution, (calcul intégral.)
Homogène.
Linéaire, (calcul intégral.)
Possible, (équations possibles, calcul intégral.)
Ricati.
Equations aux différences finies.
Maximum, (calcul intégral.)
Variation.
Intégral, (le cinquième article.)
Partielle.
Arbitraire, (dans le Supplément.)

L'*Encyclopédie ou*
Dictionnaire raisonné des
sciences, des arts et des métiers,
vol. VII, **1757**,

article FONCTION, p. 50b

FONCTION, ſ. f. (*Algebre.*) les anciens géometres, ou plûtôt les anciens analyſtes ont appellé *fonctions* d'une quantité quelconque x les différentes *puiſſances* de cette quantité (*voyez* PUISSANCE); mais aujourd'hui on appelle *fonction* de x, ou en général d'une quantité quelconque, une quantité algébrique compoſée de tant de termes qu'on voudra, & dans laquelle x ſe trouve d'une maniere quelconque, mêlée, ou non, avec des conſtantes; ainſi $x^2 + x^3$, $\sqrt{aa+xx}$, $\sqrt{\frac{aa+x^3}{bb+x^4}}$, $\int dx\sqrt{a^2-x^2}$, &c. ſont des fonctions de x.

De même $x^2 y + a y^3$, &c. eſt une *fonction* de x & de y, & ainſi des autres.

I. Les mathématiques dans l'*Encyclopédie méthodique* (1784-1789)

L'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers,* vol. VII, **1757**,

article FONCTION, p. 50b

L'*Encyclopédie méthodique,* dictionnaire de *Mathématiques,* vol. 2, **1785**,

D'Alembert, article FONCTION, p. 78b

FONCTION, ſ. f. (*Algebre.*) les anciens géometres, ou plûtôt les anciens analyſtes ont appellé *fonctions* d'une quantité quelconque x les différentes *puiſſances* de cette quantité (*voyez* PUISSANCE); mais aujourd'hui on appelle *fonction* de x, ou en général d'une quantité quelconque, une quantité algébrique compoſée de tant de termes qu'on voudra, & dans laquelle x ſe trouve d'une maniere quelconque, mêlée, ou non, avec des conſtantes; ainſi x^2+x^3, $\sqrt{aa+xx}$, $\sqrt{\frac{aa+x^3}{bb+x^4}}$, $\int dx\sqrt{a^2-x^2}$, &c. ſont des fonctions de x.

De même $x^2 y + a y^3$, &c. eſt une *fonction* de x & de y, & ainſi des autres.

FONCTION, ſ. f. (*Analyſe.*) Les anciens géomètres, ou plutôt les anciens analyſtes ont appellé *fonctions* d'une quantité quelconque x les différentes *puiſſances* de cette quantité (*voy.* PUISSANCE); mais aujourd'hui on appelle *fonction* de x, ou en général d'une quantité quelconque, une quantité compoſée de tant de termes qu'on voudra & dans laquelle x ſe trouve d'une manière quelconque, mêlée, ou non, avec des conſtantes; ainſi, x^2+x^3, $\sqrt{aa+xx}$, $\sqrt{\frac{aa+x^3}{bb+x^4}}$, $\int dx\sqrt{a^2-x^2}$, &c. ſont des fonctions de x.

De même $x^2 y + a y^3$, &c. eſt une fonction de x & de y, ainſi des autres.

2. *Une quantité variable eſt une quantité indéterminée, ou, ſi l'on veut, une quantité univerſelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*

Une valeur déterminée quelconque pouvant être exprimée en nombre, il s'enſuit qu'une quantité variable comprend tous les nombres de quelque nature qu'ils ſoient. Il en eſt de la quantité variable, comme du genre & de l'eſpece à l'égard des individus ; on peut la concevoir comme embraſſant toutes les quantités déterminées. Au reſte, on a coutume de repréſenter les quantités variables par les dernieres lettres de l'Alphabet z, y, x, &c.

3. *Une quantité variable devient déterminée, lorſqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*

Elle peut donc le devenir d'une infinité de manieres, puiſqu'on peut lui ſubſtituer tous les nombres imaginables. La ſignification d'une quantité variable ne peut être cenſée épuiſée, qu'autant qu'on aura conçu en ſa place toutes les valeurs déterminées. Ainſi une telle quantité comprend tous les nombres tant poſitifs que négatifs, les nombres entiers & fractionnaires, ceux qui ſont rationnels, irrationnels & tranſcendants ; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

4. *Une fonction de quantité variable eſt une expreſſion analytique compoſée, de quelque maniere que ce ſoit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités conſtantes.*

Ainſi toute expreſſion analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités conſtantes, eſt une fonction de z. Par exemple, $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{aa - zz}$; c^z; &c, ſont des fonctions de z.

5. *Une fonction de variable eſt donc auſſi une quantité variable.*

En effet, comme on peut mettre à la place de la variable toutes les valeurs déterminées, la fonction recevra elle-même

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Profeſſore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

6. La principale différence des fonctions consiste dans la combinaison de la variable & des quantités constantes, qui les forment.

Elle dépend donc des opérations par lesquelles les quantités peuvent être composées & combinées entr'elles. Ces opérations sont l'Addition & la Soustraction ; la Multiplication & la Division ; l'Elévation aux Puissances & l'Extraction des Racines ; à quoi il faut ajouter encore la Résolution des Équations. Outre ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a plusieurs autres qu'on nomme transcendantes : comme les exponentielles, les logarithmiques, & d'autres sans nombre, que le Calcul Intégral fait connoître.

Distinguons cependant certaines especes de fonctions ; savoir, les Multiples $2z$; $3z$; $\frac{1}{3}z$; az, &c. & les Puissances de z ; comme z^2 ; z^3 ; $z^{\frac{1}{2}}$; z^{-1} ; &c, quantités formées par une seule opération, & qui, comme celles qui résultent de la combinaison de plusieurs, ne laissent pas de porter de même le nom de fonctions.

7. Les fonctions se divisent en algébriques & en transcendantes ; les premieres sont formées par des opérations algébriques

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII

II. La notion de fonction : la définition d'Euler de 1748

- Dans son ***Introductio in analysin infinitorum* (1748)**, Euler définit une fonction comme :

> « *une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes*. »

- Le terme **« analytique »** désigne ici une expression obtenue à partir d'une combinaison d'opérateurs et d'opérations algébriques usuelles (exponentielle, logarithme, passage d'un arc à ses lignes trigonométriques, etc.), certaines de ces opérations pouvant être itérées un nombre infini de fois

→ toute fonction peut être développée en série.

Leonhard Euler (1707-1783)

- Partant de là, Euler classe les fonctions selon les opérations et modes de calcul utilisés :

> « *Je les ai d'abord divisées en algébriques et transcendantes. Les premières sont composées de quantités variables combinées entre elles par les opérations ordinaires de l'algèbre, et les secondes dépendent d'autres opérations ou des mêmes combinaisons que les précédentes, mais répétées une infinité de fois* ».

II. L'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler (1748)

TABLE DES CHAPITRES

du Tome premier.

II. L'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler (1748)

TABLE DES CHAPITRES

du Tome second.

INTRODUCTION A L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

TRAITÉ ABRÉGÉ DES SURFACES.

II. La notion de fonction : la définition d'Euler de 1755

- Dans ses *Institutiones calculi differentialis*, publiés en 1755, Euler fait état d'une évolution importante de sa définition de la notion de fonction :

> « *Si des quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x* ».

Leonhard Euler (1707-1783)

Comment s'explique cette évolution de la définition eulérienne du concept ?...

→ Réponse complète dans deux semaines !

III. La querelle des logarithmes des quantités négatives

Nous terminerons celui-ci par une queſtion qui a été fort agitée entre MM. Léibnitz & Bernoulli. Les *logarithmes* des quantités négatives ſont-ils réels ou imaginaires ? M. Léibnitz tenoit pour le ſecond, M. Bernoulli pour le premier. On peut voir les lettres qu'ils s'écrivoient à ce ſujet ; elles ſont imprimées dans le *commercium epiſtolicum* de ces deux grands hommes, publié en 1745 à Lauſanne. J'eus autrefois (en 1747 & 1748) une controverſe par lettres avec le célebre M. Euler ſur le même ſujet ; il ſoutenoit l'opinion de M. Léibnitz, & moi celle de M. Bernoulli. Cette controverſe a occaſioné un ſavant mémoire de M. Euler, imprimé dans le volume de l'académie de Berlin pour l'année 1709. Depuis ce tems, M. de Foncenex a traité la même matiere dans le premier volume des mémoires de l'académie de Turin, & ſe déclare pour le ſentiment de M. Euler qu'il appuie de nouvelles preuves. J'ai compoſé ſur ce ſujet un écrit dans lequel je me déclare au contraire pour l'opinion de M. Bernoulli. Comme cet écrit

L'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*

D'Alembert, article LOGARITHME, vol. IX, **1765**, p. 632b

Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783)

Euler, « De la controverse entre Mrs Leibnitz & Bernoulli sur les Logarithmes des nombres negatifs et imaginaires », présenté à l'Académie des sciences de Berlin en 1749 et publié en 1751

Sentiment de Mr. Bernoulli.

Mr. Bernoulli ſoutint, que les logarithmes des nombres négatifs étoient les memes que ceux des nombres affirmatifs : ou que le logarithme du nombre negatif $-a$ *étoit égal au logarithme du nombre affirmatif* $+a$. *Ainſi le ſentiment de M. Bernoulli porte qu'il y a* $l-a = l+a$.

Sentiment de M. Leibniz.

M. Leibniz ſoutint que les logarithmes de tous les nombres negatifs, & à plus forte raiſon ceux des nombres imaginaires, etoient imaginaires : ou puisque $l-a = la + l-1$, *il ſoutint que* $l-1$ *etoit une quantité imaginaire.*

Euler, « De la controverse entre Mrs Leibnitz & Bernoulli sur les Logarithmes des nombres negatifs et imaginaires », présenté à l'Académie des sciences de Berlin en 1749 et publié en 1751

Denoüement des Difficultés précédentes.

Il faut d'abord avoüer, que ſi l'idée, que Mrs. Leibniz & Bernoulli ont attachée au terme de logarithme, & que tous les Mathematiciens ont eu jusqu'ici, étoit parfaitement juſte, il ſeroit abſolument impoſſible de délivrer la doctrine des logarithmes des contradictions, que je viens de propoſer. Or l'idée des logarithmes étant tirée de leur origine, dont nous avons une parfaite connoiſſance, comment ſeroit-il poſſible qu'elle fut défectueuſe ? Lorsqu'on dit que le logarithme d'un nombre propoſé eſt l'expoſant de la puiſſance d'un certain nombre pris à volonté, laquelle devient égale au nombre propoſé, il ſemble qu'il ne manque rien à la juſteſſe de cette idée. Cela eſt auſſi bien vrai ; mais on accompagne communément cette idée d'une circonſtance, qui ne lui convient point : c'eſt qu'on ſuppoſe ordinairement, presque ſans qu'on s'en apperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'un ſeul logarithme ; & pour peu qu'on y réfléchiſſe, on trouvera que toutes les difficultés & contradictions, dont la doctrine des loga-

III. La querelle des logarithmes des quantités négatives

Euler, « De la controverse entre Mrs Leibnitz & Bernoulli sur les Logarithmes des nombres negatifs et imaginaires », présenté à l'Académie des sciences de Berlin en 1749 et publié en 1751

rithmes ſembloit embaraſſée, ne ſubſiſtent qu'entant qu'on ſuppoſe, qu'à chaque nombre ne répond qu'un ſeul logarithme. Je dis donc, pour faire diſparoitre toutes ces difficultés & contradictions, qu'en vertu méme de la définition donnée il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes ; ce que je démontrerai dans le theoreme ſuivant.

Theoreme.

Il y a toujours une infinité de logarithmes, qui conviennent également à chaque nombre propoſé: ou, ſi y marque le logarithme du nombre x, je dis que y renferme une infinité de valeurs differentes.

- Pour tout $x < 0$, Euler obtient ce que nous écririons aujourd'hui :

$$\log x = \log|x| + (\pi + 2k\pi)\sqrt{-1} \ (k \in \mathbf{Z})$$

IV. Les fondements du calcul différentiel et intégral : l'*Analyste* de Berkeley

Georges Berkeley (1685-1753)

✓ Dans l'*Analyste* (1734), George Berkeley reprend l'essentiel des critiques de Michel Rolle concernant le manque de rigueur, mais vise à la fois le calcul fluxionnel de Newton et le calcul leibnizien :

> *« Je ne discute en rien vos conclusions, mais seulement votre logique et votre méthode. Comment démontrez-vous ? De quel objet vous occupez-vous et les concevez-vous clairement ? Avec quels principes progressez-vous ? Quel en est la validité ? Et comment les mettez-vous en œuvre ?*
>
> […]
>
> *En vérité, on doit reconnaître que les mathématiciens modernes ne considèrent pas ces points [les fluxions et les infinitésimaux] comme des mystères, mais comme conçus clairement et maîtrisés par leurs esprits étendus. Ils n'hésitent pas à dire qu'à l'aide de cette nouvelle analyse, ils peuvent pénétrer jusque dans l'infini lui-même, qu'ils peuvent même étendre leurs vues au-delà de l'infini.*
>
> […]
>
> *J'admets qu'on puisse créer des signes pour dénoter quelque chose ou rien ; et que, par conséquent, dans l'expression primitive x + o, o a pu représenter, soit un incrément, soit rien. Mais alors, quoi que vous lui fassiez représenter, vous devez raisonner en conformités avec notre convention et ne jamais recourir à une ambiguïté. »*

IV. Le *Treatise of Fluxions* de Maclaurin (1742)

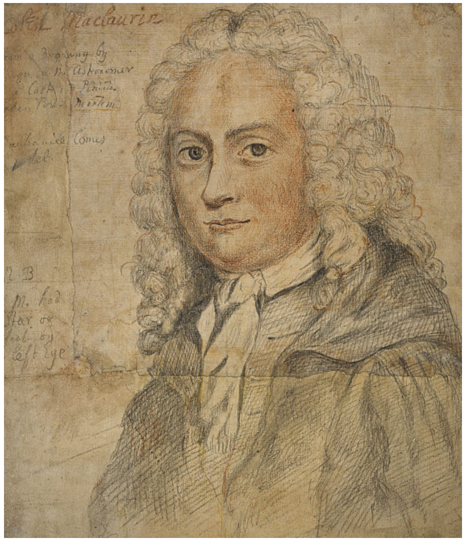
✓ Dès la parution de l'*Analyste*, de nombreux mathématiciens choqués répondent aux attaques de Berkeley. Parmi eux, James Jurin, John Walton et Benjamin Robins.

✓ Maclaurin décide également de répondre en rédigeant un ouvrage identifiant et démontrant rigoureusement les fondements du calcul des fluxions :

> « C'est pourquoi, dès que cette pièce [l'*Analyste*] fut tombée entre mes mains, (et avant que j'eus connaissance des Ouvrages que d'autres avoient entrepris pour la réfuter), je formai le dessein de démontrer ce élémens à la manière des Anciens, et de ne les appuyer que sur un petit nombre de principes incontestables, par les démonstrations les plus rigoureuses. »
> (*Traité des fluxions*, trad. par le Père Pézenas,1749, préface, p. ix.)

✓ Le *Treatise of Fluxions* de Maclaurin paraît en 1742.

- Premier Livre : « Sur les Fluxions des Grandeurs Géométriques »
- Second Livre : « Sur le calcul dans la méthode des fluxions »



Colin Maclaurin (1698-1746)

IV. L'article Calcul différentiel de D'Alembert dans l'*Encyclopédie* (1754)

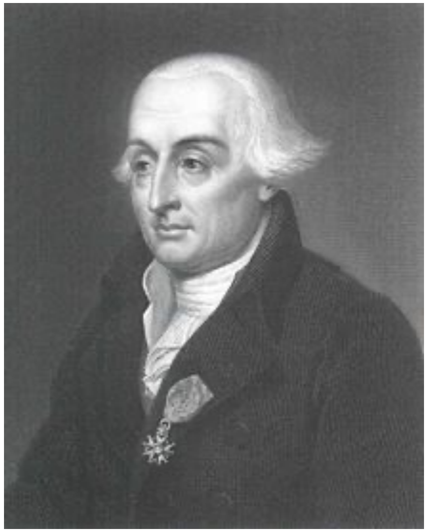
Jean le Rond D'Alembert (1717-1783)

« M. Newton […] n'a jamais regardé le calcul différentiel comme le calcul des quantités infiniment petites, mais comme la méthode des premieres & dernieres raisons, c'est-à-dire la méthode de trouver les limites des rapports. Aussi cet illustre auteur n'a-t-il jamais différentié des quantités, mais seulement des équations ; parce que toute équation renferme un rapport entre deux variables, & que la différentiation des équations ne consiste qu'à trouver les limites du rapport entre les différences finies des deux variables que l'équation renferme.

[…]

Quand une fois on l'aura bien comprise, on sentira que la supposition que l'on y fait de quantités infiniment petites, n'est que pour abréger & simplifier les raisonne-mens ; mais que dans le fond le calcul différentiel ne suppose point nécessairement l'existence de ces quantités ; que ce calcul ne consiste qu'à déterminer algébrique-ment la limite d'un rapport de laquelle on a déjà l'expression en lignes, & à égaler ces deux limites, ce qui fait trouver une des lignes que l'on cherche. Cette définition est peut-être la plus précise & la plus nette qu'on puisse donner du calcul différentiel »

IV. La *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange (1797 ; 2e éd., 1813)


Joseph-Louis Lagrange(1736-1813)

- Dans sa ***Théorie des fonctions analytiques***, publiée en **1797 (2e édition en 1813)**, **Lagrange** tente de fonder le calcul différentiel et intégral sur la base d'une approche radicalement différente de celles de Leibniz, Newton, Maclaurin, D'Alembert et Euler : réduire le calcul différentiel et intégral à l'algèbre en se dégageant « de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions ».

- Lagrange y évacue les notions de limite et d'infiniment petit pour ne conserver que celles de fonction et de séries entières : toute fonction d'une variable x considérée en $x+i$ au lieu de x (avec i quantité quelconque) peut être développée en une série entière

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots$$

où les coefficients p, q, r... sont de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction *f(x)* et indépendantes de i.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS CET OUVRAGE.

INTRODUCTION.

PREMIÈRE PARTIE.

Exposition de la théorie, avec ses principaux usages dans l'analyse.

SECONDE PARTIE.

Application de la théorie des fonctions à la géométrie.

TROISIÈME PARTIE.

Application de la théorie des fonctions à la mécanique.

IV. La synthèse de François-Sylvestre Lacroix (1797-1798)

- Les analystes du XIX^{e} siècle rejetteront le développement en séries de Taylor comme fondement du calcul différentiel et intégral, mais reconnaîtront la pertinence de l'approche de Lagrange en ce qu'elle :

  - permet, dans la droite ligne d'Euler, de faire de la fonction le concept central de l'analyse (voir le cours « Les sciences mathématiques 1750-1850 »),

  - constitue un nouveau tournant théorique dans la recherche de fondements rigoureux.

Sylvestre-François Lacroix(1765-1843)

- Autre signe d'un désir partagé de fonder le calcul différentiel et intégral : la parution en trois volumes, en 1797 et 1798, du ***Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*** de François-Sylvestre Lacroix, qui a pour but de

> « rassembler toutes les méthodes connues mais encore de les rapprocher tellement les unes des autres qu'elles paraissent sorties d'une même main et que les rapports qui les lient les unes aux autres soient mis dans la plus grande évidence » (Lettre à Prony, 1791 ou 1792, BI, ms. 2396, fol. 213-215).