La question que l'on vient de traiter est la première que nous ayons résolue dans la théorie de la chaleur, ou plutôt dans la partie de cette théorie qui exige l'emploi de l'analyse. Elle fournit des applications numériques très-faciles, soit que l'on fasse usage des tables trigonométriques ou des séries convergentes, et elle représente exactement toutes les circonstances du mouvement de la chaleur. Nous passerons maintenant à des considérations plus générales.

SECTION VI.

Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques.

207.

La question de la propagation de la chaleur dans un solide rectangulaire a conduit à l'équation $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$; et si l'on suppose que tous les points de l'une des faces du solide ont une température commune, il faut déterminer les coëfficients $a, b, c, d, e,$ etc. de la série

$$a \cos. x + b \cos. 3x + c \cos. 5x + d \cos. 7x + \ldots \text{ etc.},$$

en sorte que la valeur de cette fonction soit égale à une constante toutes les fois que l'arc x est compris entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. On vient d'assigner la valeur de ces coëfficients; mais on n'a traité qu'un seul cas d'un problème plus général, qui consiste à développer une fonction quelconque en une suite infinie de sinus ou de cosinus d'arcs multiples. Cette question est liée à la théorie des équations aux différences partielles et a été agitée dès l'origine de cette analyse. Il était nécessaire de la résoudre pour intégrer convenablement les équations de la propagation de la chaleur; nous allons en exposer la solution.

On examinera, en premier lieu, le cas où il s'agit de réduire en une série de sinus d'arcs multiples, une fonction dont le développement ne contient que des puissances impaires de la variable. Désignant une telle fonction par φx, on posera l'équation

$$\varphi x = a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x + \ldots \text{ etc.}$$

et il s'agit de déterminer la valeur des coëfficients $a, b, c, d,$ etc. On écrira d'abord l'équation

$$\varphi x = x\varphi' o + \frac{x^2}{2}\varphi'' o + \frac{x^3}{2.3}\varphi''' o + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{\text{iv}} o + \frac{x^5}{2.3.4.5}\varphi^{\text{v}} o + \ldots \text{ etc.}$$

dans laquelle $\varphi' o$, $\varphi'' o$, $\varphi''' o$, $\varphi^{\text{iv}} o$, etc. désignent les valeurs que prennent les coëfficients

$$\frac{d.\varphi x}{dx}, \frac{d^2.\varphi x}{dx^2}, \frac{d^3.\varphi x}{dx^3}, \frac{d^4.\varphi x}{dx^4}, \text{ etc.}$$

lorsqu'on y suppose $x = o$. Ainsi en représentant le développement selon les puissances de x par l'équation

$$\varphi x = A x - B\frac{x^3}{2.3} + C\frac{x^5}{2.3.4.5} - D\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + E\frac{x^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \text{etc.}$$

on aura

$$\begin{array}{ll} \varphi\,0=0 & \text{et } \varphi'\,0=\text{A} \\ \varphi''\,0=0 & \varphi'''\,0=\text{B} \\ \varphi^{\text{IV}}0=0 & \varphi^{\text{V}}\,0=\text{C} \\ \varphi^{\text{VI}}0=0 & \varphi^{\text{VII}}0=\text{D} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Si maintenant on compare l'équation précédente à celle-ci

$$\varphi x=a\sin.x+b\sin.2x+c\sin.3x+d\sin.4x+e\sin.5x+\text{etc.}$$

En développant le second membre par rapport aux puissances de x, on aura les équations

$$\begin{array}{l} \text{A}=a+2\,b+3\,c+4\,d+5\,e+\text{etc.} \\ \text{B}=a+2^3 b+3^3 c+4^3 d+5^3 e+\text{etc.} \\ \text{C}=a+2^5 b+3^5 c+4^5 d+5^5 e+\text{etc.} \\ \text{D}=a+2^7 b+3^7 c+4^7 d+5^7 e+\text{etc.} \\ \text{E}=a+2^9 b+3^9 c+4^9 d+5^9 e+\text{etc.} \\ \qquad\qquad\text{etc.} \end{array} \qquad (a)$$

Ces équations doivent servir à trouver les coëfficients $a, b, c, d, e,$ etc., dont le nombre est infini. Pour y parvenir, on regardera d'abord comme déterminé et égal à m le nombre des inconnues, et l'on conservera un pareil nombre m d'équations; ainsi l'on supprimera toutes les équations qui suivent les m premières, et l'on omettra dans chacune de ces équations tous les termes du second membre qui suivent les m premières que l'on conserve. Le nombre entier m étant donné, les coëfficients $a, b, c, d, e\ldots.$ etc.

ont des valeurs fixes que l'on peut trouver par l'élimination. On obtiendrait pour ces mêmes quantités des valeurs différentes, si le nombre des équations et celui des inconnues était plus grand d'une unité. Ainsi la valeur des coëfficients varie à mesure que l'on augmente le nombre de ces coëfficients et celui dss équations qui doivent les déterminer. Il s'agit de chercher quelles sont les limites vers lesquelles les valeurs des inconnues convergent continuellement à mesure que le nombre des équations devient plus grand. Css limites sont les véritables valeurs des inconnues qui satisfont aux équations précédentes lorsque leur nombre est infini.

208.

On considérera donc successivement les cas où l'on aurait à déterminer une inconnue par une équation, deux inconnues par deux équations, trois inconnues par trois équations, ainsi de suite à l'infini. Supposons que l'on designe comme il suit différents systèmes d'équations analogues à celles dont on doit tirer les valeurs des coëfficients:

$$a_1 = A_1 \qquad \begin{aligned} a_2 + 2\,b_2 &= A_2 \\ a_2 + 2^3 b_2 &= B_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_3 + 2\,b_3 + 3\,c_3 &= A_3 \\ a_3 + 2^3 b_3 + 3^3 c_3 &= B_3 \\ a_3 + 2^5 b_3 + 3^5 c_3 &= C_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_4 + 2\,b_4 + 3\,c_4 + 4\,d_4 &= A_4 \\ a_4 + 2^3 b_4 + 3^3 c_4 + 4^3 d_4 &= B_4 \\ a_4 + 2^5 b_4 + 3^5 c_4 + 4^5 d_4 &= C_4 \\ a_4 + 2^7 b_4 + 3^7 c_4 + 4^7 d_4 &= D_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 + 2\,b_5 + 3\,c_5 + 4\,d_5 + 5\,e_5 &= A_5 \\ a_5 + 2^3 b_5 + 3^3 c_5 + 4^3 d_5 + 5^3 e_5 &= B_5 \\ a_5 + 2^5 b_5 + 3^5 c_5 + 4^5 d_5 + 5^5 e_5 &= C_5 \\ a_5 + 2^7 b_5 + 3^7 c_5 + 4^7 d_5 + 5^7 e_5 &= D_5 \\ a_5 + 2^9 b_5 + 3^9 c_5 + 4^9 d_5 + 5^9 e_5 &= E_5 \\ \text{etc.} & \qquad (b) \end{aligned}$$

Si maintenant on élimine la dernière inconnue e_5, au moyen des cinq équations qui contiennent A_5 B_5 C_5 $D_5 E_5$, etc. on trouvera

$$a_5(5^2-1^2)+2\,b_5(5^2-2^2)+3\,c_5(5^2-3^2)+4\,d_5(5^2-4^2)=5^2 A_5-B_5$$

$$a_5(5^2-1)+2^3 b_5(5^2-2^2)+3^3 c_5(5^2-3^2)+4^3 d_5(5^2-4^2)=5^2 B_5-C_5$$

$$a_5(5^2-1)+2^5 b_5(5^2-2^2)+3^5 c_5(5^2-3^2)+4^5 d_5(5^2-4^2)=5^2 C_5-D_5$$

$$a_5(5^2-1)+2^7 b_5(5^2-2^2)+3^7 c_5(5^2-3^2)+4^7 d_5(5^2-4^2)=5^2 D_5-E_5$$

On aurait pu déduire ces quatre équations des quatre qui forment le système précédent, en mettant dans ces dernières au lieu de

$$\begin{array}{ll} a_4 & (5^2-1)\,a_5 \\ b_4 & (5^2-2^2)\,b_5 \\ c_4 & (5^2-3^2)\,c^5 \\ d_4 & (5^2-4^2)\,d_5 \end{array}$$

et au lieu de

$$\begin{array}{ll} A_4 & 5^2 A_5-B_5 \\ B_4 & 5^2 B_5-C_5 \\ C_4 & 5^2 C_5-D_5 \\ D_4 & 5^2 D_5-E_5 \end{array}$$

On pourra toujours, par des substitutions semblables, passer du cas qui répond à un nombre m d'inconnues à celui qui répond à un nombre $m+1$. En écrivant par ordre toutes ces relations entre les quantités qui répondent à l'un des cas et celles qui répondent au cas suivant, on aura

$$
\begin{array}{llllll}
a_1=a_2(2^2-1) & & & & & (c) \\
a_2=a_3(2^2-1) & b_2=b_3(3^2-2^2) & & & & \\
a_3=a_4(4^2-1) & b_3=b_4(4^2-2^2) & c_3=c_4(4^2-3^2) & & & \\
a_4=a_5(5^2-1) & b_4=b_5(5^2-2^2) & c_4=c_5(5^2-3^2) & d_4=d_5(5^2-4^2) & & \\
a_5=a_6(6^2-1) & b_5=b_6(6^2-2^2) & c_5=c_6(6^2-3^2) & d_5=d_6(6^2-4^2) & e_5=e_6(6^2-5^2) & \\
a_6=a_7(7^2-1) & b_6=b_7(7^2-2^2) & c_6=c_7(7^2-3^2) & d_6=d_7(7^2-4^2) & e_6=e_7(7^2-5^2) & f_6=f_7(7^2-6^2)\ ;
\end{array}
$$

etc.

on aura aussi

$$
\begin{array}{llll}
A_1=2\,A_2-B_2 & & & (d) \\
A_2=3\,A_3-B_3 & B_2=3\,B_3-C_3 & & \\
A_3=4\,A_4-B_4 & B_3-4\,B_4-C_4 & C_3=4\,C_4-D_4 & \\
A_4=5\,A_5-B_5 & B_4=5\,B_5-C_5 & C_4=5\,C_5-D_5 & D_4=5\,D_5-E_5\ ,
\end{array}
$$

etc.

On conclut des équations (c) qu'en représentant par $a, b, c, d, e, \ldots$ etc., les inconnues dont le nombre est infini, on doit avoir

$$a=\frac{a_1}{(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(6^2-1)\ldots\ldots}$$

$$b=\frac{b_2}{(3^2-2^2)(4^2-2^2)(5^2-2^2)(6^2-2^2)\ldots\ldots}$$

$$c=\frac{c_3}{(4^2-3^2)(5^2-3^2)(6^2-3^2)(7^2-3^2)\ldots\ldots}$$

$$d=\frac{d_4}{(5^2-4^2)(6^2-4^2)(7^2-4^2)(8^2-4^2)\ldots\ldots}$$

etc. (e)

209.

Il reste donc à déterminer les valeurs de $a_1\ b_2\ c_3\ d_4\ e_5$ etc.: la première est donnée par une équation, dans laquelle entre A_1; la seconde est donnée par deux équations dans lesquelles entrent $A_2\ B_2$; la troisième est donnée par trois équations, dans lesquelles entrent $A_3 B_3 C_3$, ainsi de suite. Il suit de là que si l'on connaissait les valeurs de

$$A_1 \quad A_2 B_2 \quad A_3 B_3 C_3 \quad A_4 B_4 C_4 D_4 \ldots \text{ etc.},$$

on trouverait facilement a_1 en résolvant une équation, $a_2\ b_2$ en résolvant deux équations, $a_3\, b_3\, c_3$ en résolvant trois équations, ainsi de suite; après quoi on déterminerait $a, b, c, d, e,$ etc. Il s'agit maintenant de calculer les valeurs de

$$A_1 \quad A_2 B_2 \quad A_3 B_3 C_3 \quad A_4 B_4 C_4 D_4 \quad A_5 B_5 C_5 D_5 E_5 \text{ etc.},$$

au moyen des équations (d). 1° on trouvera la valeur de A_1 en A_2 et B_2; 2° par deux substitutions on trouvera cette valeur de A_1 en $A_3 B_3 C_3$; 3° par trois substitutions on trouvera la même valeur de A_1 en $A_4 B_4 C_4 D_4$, ainsi de suite. Ces valeurs successives de A_1 sont :

$$A_1 = A_2\, 2^2 - B_2$$
$$A_1 = A_3\, 2^2.3^2 - B_3 (2^2 + 3^2) + C_3$$
$$A_1 = A_4\, 2^2.3^2.4^2 - B_4 (2^2.3^2 + 2^2.4^2 + 3^2.4^2) + C_4 (2^2 + 3^2 + 4^2) - D_4$$
$$A_1 = A_5\, 2^2.3^2.4^2.5^2 - B_5 (2^2.3^2.4^2 + 2^2.3^2.5^2 + 2^2.4^2.5^2 + 3^2.4^2.5^2)$$
$$+ C_5 (2^2.3^2 + 2^2.4^2 + 2^2.5^2 + 3^2.4^2 + 3^2.5^2 + 4^2.5^2) - D_5 (2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + E_5,$$

etc.,

dont il est aisé de remarquer la loi. La dernière de ces valeurs, qui est celle que l'on veut déterminer, contient les quantités A, B, C, D, E, etc. avec un indice infini, et ces quantités sont connues; elles sont les mêmes que celles qui entrent dans les équations (a).

En divisant cette dernière valeur de A_1 par le produit infini

$$2^2.3^2.4^2.5^2.6^2\ldots\ldots \text{ etc.},$$

on a

$$\begin{aligned} A-B\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.}\right)+C\left(\frac{1}{2^2.3^2}+\frac{1}{2^2.4^2}+\frac{1}{3^2.4^2}+\text{etc.}\right)& \\ +D\left(\frac{1}{2^2.3^2.4^2}+\frac{1}{2^2.3^2.5^2}+\frac{1}{3^2.4^2.5^2}+\text{etc.}\right)& \\ +E\left(\frac{1}{2^2.3^2.4^2.5^2}+\frac{1}{2^2.3^2.4^2.6^2}+\text{etc.}\right)& \\ +\text{etc.}& \end{aligned}$$

Les coëfficients numériques sont les sommes des produits que l'on formerait par les diverses combinaisons des fractions $\frac{1}{1^2}$ $\frac{1}{2^2}$ $\frac{1}{3^2}$ $\frac{1}{4^2}$ $\frac{1}{5^2}$ $\frac{1}{6^2}\ldots\ldots$ et, après avoir séparé la première fraction $\frac{1}{1^2}$. Si l'on représente ces différentes sommes de produits par $P_1 Q_1 R_1 S_1 T_1 \ldots$ etc., et si l'on emploie la première des équations (e) et la première des équations (b), on aura, pour exprimer la valeur du premier coëfficient a, l'équation

$$a\,\frac{(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(5^2-1)\ldots}{2^2.3^2.4^2.5^2\ldots}=A-BP_1+CQ_1-DR_1+ES_1-FT_1+\text{etc.};$$

or les quantités $P, Q, R, S, T, \ldots$ etc., peuvent être facilement déterminées comme on le verra plus bas; donc le premier coëfficient a sera entièrement connu.

210.

Il faut passer maintenant à la recherche des coëfficients suivants $bcdef$... etc., qui d'après les équations (e) dépendent des quantités $b_2 c_3 d_4 e_5 f_6$... etc. On reprendra pour cela les équations (b); la première a déja été employée pour trouver la valeur de a_1; les deux suivantes donnent la valeur de b_2; les trois suivantes la valeur de c_3; les quatre suivantes la valeur de d_4, ainsi de suite.

En effectuant le calcul, on trouvera, à la seule inspection des équations, pour les valeurs de $b_2 c_3 d_4 e_5$... etc, les résultats suivants :

$$2\,b_2(1^2-2^2)=A_2\,1^2-B_2$$

$$3\,c_3(1^2-3^2)(2^2-3^2)=A_3\,1^2.2^2-B_3(1^2+2^2)+C_3$$

$$4\,d_4(1^2-4^2)(2^2-4^2)(3^2-4^2)=A_4\,1^2.2^2.3^2-B_4(1^2.2^2+1^2.3^2+2^2.3^2)+C_4(1^2+2^2+3^2)-D_4$$

$$5\,e_5(1^3-5^2)(2^2-5^2)(3^2-5^2)(4^2-5^2)=A_5\,1^2.2^2.3^2.4^2-B_5(1^2.2^2.3^2+1^2.2^2.4^2+1^2.3^2.4^2+2^2.3^2.4^2)$$
$$+C_5(1^2.2^2+1^2.3^2+1^2.4^2+2^2.3^2+2^2.4^2+3^2.4^2)-D_5(1^2+2^2+3^2+4^2)+E_5$$

etc.

La loi que suivent ces équations est facile à saisir; il ne reste plus qu'à déterminer les quantités

$$A_2 B_2 \quad A_3 B_3 C_3 \quad A_4 B_4 C_4 \text{ etc.}$$

Or, les quantités $A_2 B_2$ peuvent être exprimées en $A_3 B_3 C_3$, ces dernières en $A_4 B_4 C_4 D_4$ etc. Il suffit pour cela d'opérer les substitutions indiquées par les équations (d); ces changements successifs réduiront les seconds membres des équations précédentes à ne contenir que les quantités $ABCD$ etc., avec un indice infini, c'est-à-dire, les quantités connues

ABCD etc. qui entrent dans les équations (a); les coëfficients seront les différents produits que l'on peut faire en combinant les quarrés des nombres $1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2$ à l'infini. Il faut seulement remarquer que le premier de ces quarrés 1^2 n'entrera point dans les coëfficients de la valeur de a_1; que le second quarré 2^2 n'entrera point dans les coëfficients de la valeur de b_2; que le troisième quarré 3^2 sera seul omis parmi ceux qui servent à former les coëfficients de la valeur de c_3, ainsi du reste à l'infini. On aura donc pour les valeurs de $b_2\,c_3\,d_4\,e_5$ etc., et par conséquent pour celles de $b\,c\,d\,e$ etc., des résultats entièrement analogues à celui que l'on a trouvé plus haut pour la valeur du premier coëfficient a_1.

211.

Si maintenant on représente

$$\text{par } P_2 \text{ les quantités } \left\{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right\}$$

$$Q_2 \qquad \left\{\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{1^2.4^2}+\frac{1}{1^2.5^2}+\frac{1}{3^2.4^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\ldots\right\}$$

$$R_2 \qquad \left\{\frac{1}{1^2.3^2.4^2}+\frac{1}{1^2.3^2.5^2}+\frac{1}{3^2.3^2.4^2}+\frac{1}{3^2.4^2.5^2}+\ldots\right\}$$

$$S_2 \qquad \left\{\frac{1}{1^2.3^2.4^2 5^2}+\frac{1}{1^2.4^2.5^2.6^2}+\ldots\right\}$$

etc.,

que l'on forme par les combinaisons des fractions

$$\frac{1}{1^2}\,\frac{1}{2^2}\,\frac{1}{3^2}\,\frac{1}{4^2}\,\frac{1}{5^2}\ldots \text{ etc.},$$

à l'infini, en omettant la seconde de ces fractions $\frac{1}{2^2}$; on aura, pour déterminer la valeur de b, l'équation

$$2\, b_2\, \frac{(1^2-2^2)}{1^2.3^2.4^2.5^2.6^2\ldots} = A_2 - BP_2 + CQ_2 - DR_2 + ES_2 - FT_2 + \text{etc.}$$

En représentant en général par $P_n\, Q_n\, R_n\, S_n\, T_n \ldots\ldots$ les sommes des produits que l'on peut faire en combinant diversement toutes les fractions $\frac{1}{1^2}\, \frac{1}{2^2}\, \frac{1}{3^2}\, \frac{1}{4^2}\, \frac{1}{5^2} \ldots\ldots$ à l'infini, après avoir seulement omis la fraction $\frac{1}{n^2}$; on aura en général, pour déterminer les quantités $a_1\, b_2\, c_3\, d_4\, e_5 \ldots$ etc., les équations suivantes :

$$A_1 - BP_1 + CQ_1 - DR_1 + ES_1 - \text{etc.} = a_1\, \frac{1}{2^2.3^2.4^2.5^2\ldots}$$

$$A_2 - BP_2 + CQ_2 - DR_2 + ES_2 - \text{etc.} = 3\, b_2\, \frac{(1^2-2^2)}{1^2.3^2.4^2.5^2\ldots}$$

$$A_3 - BP_3 + CQ_3 - DR_3 + ES_3 - \text{etc.} = 3\, c_3\, \frac{(1^2-3^2)\,(2^2-3^2)}{1^2.2^2.4^2.5^2.6^2\ldots}$$

$$A_4 - BP_4 + CQ_4 - DR_4 + ES_4 - \text{etc.} = 4\, d_4\, \frac{(1^2-4^2)\,(2^2-4^2)\,(3^2-4^2)}{1^2.2^2.3^2.5^2.6^2\ldots}$$

etc.

212.

Si l'on considère maintenant les équations (e) qui donnent les valeurs des coëfficients $a\,b\,c\,d\ldots$ etc., on aura les résultats suivants :

$$a\,\frac{(2^2-1^2)(3^2-1^2)(4^2-1^2)(5^2-1^2)\ldots}{2^2.3^2.4^2.5^2\ldots}=A-BP_1+CQ_1-DR_1+ES_1-FT_1+\text{etc.}$$

$$2b\,\frac{(1^2-2^2)(3^2-2^2)(4^2-2^2)(5^2-2^2)\ldots}{1^2.3^2.4^2.5^2}=A-BP_2+CQ_2-DR_2+ES-\text{etc.}$$

$$3c\,\frac{(1^2-2^2)(3^2-2^2)(4^2-2^2)(5^2-2^2)\ldots}{1^2.2^2.4^2.5^2}=A-BP_3+CQ_3-DR_3+ES_3-\text{etc.}$$

$$4d\,\frac{(1^2-4^2)(2^2-4^2)(3^2-4^2)(5^2-4^2)\ldots}{1^2.2^2.3^2.5^2}=A-BP_4+CQ_4-DR_4+ES_4-\text{etc.}$$

etc.

En distinguant quels sont les facteurs qui manquent aux numérateurs et aux dénominateurs pour y compléter la double série des nombres naturels, on voit que la fraction se réduit, dans la première équation, à $\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}$; dans la seconde à $-\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{4}$; dans la troisième à $\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{6}$; dans la quatrième à $-\frac{4}{4}\cdot\frac{4}{8}$; en sorte que les produits qui multiplient

$$a,\ 2b,\ 3c,\ 4d,\ \text{etc.},$$

sont alternativement $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Il ne s'agit donc plus que de trouver les valeurs de

$$P_1Q_1R_1S_1\ \ P_2Q_2R_2S_2\ \ P_3Q_3R_3S_3\ldots\ \text{etc.}$$

Pour y parvenir, on remarquera que l'on peut faire dépendre ces valeurs de celles des quantités PQRST... etc., qui représentent les différents produits que l'on peut former avec les fractions $\frac{1}{1^2}\,\frac{1}{2^2}\,\frac{1}{3^2}\,\frac{1}{4^2}\,\frac{1}{5^2}\,\frac{1}{6^2}\ldots$ etc., sans en omettre aucune. Quant à ces derniers produits, leurs valeurs sont données par les séries des développements de sinus. Nous représenterons donc les séries

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.} \qquad \text{par P},$$

$$\frac{1}{1^2.2^2}+\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{1^2.4^2}+\frac{1}{2^2.3^2}+\frac{1}{2^2.4^2}+\frac{1}{3^2.4^2}+\text{etc.} \quad \text{par Q},$$

$$\frac{1}{1^2.2^2.3^2}+\frac{1}{1^2.2^2.4^2}+\frac{1}{1^2.3^2.4^2}+\frac{1}{2^2.3^2.4^2}+\text{etc.} \qquad \text{par R},$$

$$\frac{1}{1^2.2^2.3^2.4^2}+\frac{1}{2^2.3^2.4^2.5^2}+\frac{1}{1^2.2^2.3^2.5^2}+\text{etc.} \qquad \text{par S},$$

ainsi de suite.

La série $\sin.x = x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}+\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}+\text{etc.};$

nous fournira les quantités P Q R S T etc. En effet, la valeur du sinus étant exprimée par l'équation

$$\sin.x = x\left(1-\frac{x^2}{1^2.\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2.\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2.\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2.\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{5^2.\pi}\right)\text{ etc.}$$

on aura $1-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6.7}+\text{etc.}$

$$=\left(1-\frac{x^2}{1^2.\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2.\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2.\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2.\pi^2}\right)\ldots\text{ etc.},$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$P = \frac{\pi^2}{2.3}$$

$$Q = \frac{\pi^4}{2.3.4.5}$$

$$R = \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}$$

$$S = \frac{\pi^7}{2.3.4.5.6.7.8.9}$$

etc.

213.

Supposons maintenant que $P_n Q_n R_n S_n$... etc., représentent les sommes de produits différents que l'on peut faire avec les fractions $\frac{1}{1^2} \frac{1}{2^2} \frac{1}{3^2} \frac{1}{4^2} \frac{1}{5^2} \ldots$ etc., dont on aura séparé la fraction $\frac{1}{n^2}$, n étant un nombre entier quelconque; il s'agit de déterminer $P_n Q_n R_n S_n$... etc., au moyen de $PQRS$... etc. Si l'on désigne par $1 - q P_n + q^2 Q_n - q^3 R_n + q^4 S_n -$ etc., les produits des facteurs

$$\left(1 - \frac{q}{1^2}\right) \left(1 - \frac{q}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{q}{4^2}\right) \ldots \text{ etc.},$$

parmi lesquels on aurait omis le seul facteur $1 - \frac{q}{n^2}$: il faudra qu'en multipliant par $1 - \frac{q}{n^2}$ la quantité

$$1 - q P_n + q^2 Q_n - q^3 R_n + q^4 S_n - \text{etc.},$$

on trouve $1 - q P + q^2 Q - q^3 R + q^4 S -$ etc.

Cette comparaison donne les relations suivantes :

$$P_n + \frac{1}{n^2} = P$$

$$Q_n + P_n \cdot \frac{1}{n^2} = Q$$

$$R_n + Q_n \cdot \frac{1}{n^2} = R$$

$$S_n + R_n \cdot \frac{1}{n^2} = S$$

etc.

$$\text{ou } P_n = P - \frac{1}{n^2}$$

$$Q_n = Q - \frac{1}{n^2} P + \frac{1}{n^4}$$

$$R_n = R - \frac{1}{n^2} Q + \frac{1}{n^4} P - \frac{1}{n^6}$$

$$S_n = S - \frac{1}{n^2} R + \frac{1}{n^4} Q - \frac{1}{n^6} P + \frac{1}{n^8}$$

etc.

En employant les valeurs connues de $PQRS$, et faisant successivement $n = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ etc., on aura les valeurs de $P_1 Q_1 R_1 S_1 \ldots$ etc.; celles de $P_2 Q_2 R_2 S_2 \ldots$ etc.; celles de $P_3 Q_3 R_3 S_3 \ldots$ etc.

214.

Il résulte de tout ce qui précède que les valeurs de $a\,b\,c\,d\,e \ldots$ etc., déduites des équations

$$a + 2\,b + 3\,c + 4\,d + 5\,e + \text{etc.} = A$$
$$a + 2^3 b + 3^3 c + 4^3 d + 5^3 e + \text{etc.} = B$$
$$a + 2^5 b + 3^5 c + 4^5 d + 5^5 e + \text{etc.} = C$$
$$a + 2^7 b + 3^7 c + 4^7 d + 5^7 e + \text{etc.} = D$$
$$a + 2^9 b + 3^9 c + 4\,d^9 + 5\,e^9 + \text{etc.} = E$$

etc.

sont exprimées ainsi,

$$\tfrac{1}{2}\,a=A-B\left(\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{1^2}\right)+C\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5}-\frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3}+\frac{1}{1^4}\right)$$
$$-D\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}-\frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5}+\frac{1}{1^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{1^6}\right)$$
$$+E\left(\frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9}-\frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^6}{2.3.4.5.7}+\frac{1}{1^4}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5}-\frac{1}{1^6}\cdot\frac{\pi^2}{2.3}+\frac{1}{1^8}\right)$$
$$-\text{ etc.}$$

$$-\tfrac{1}{2}\,2b=A-B\left(\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{2^2}\right)+C\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3}+\frac{1}{2^4}\right)$$
$$-D\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^4}{1.3.4.5}+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{2^6}\right)$$
$$+E\left(\frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^6}{2.3.4.5.7}+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5}-\frac{1}{2^6}\cdot\frac{\pi^2}{2.3}+\frac{1}{2^8}\right)$$
$$-\text{ etc.}$$

$$\tfrac{1}{2}\,3c=A-B\left(\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{3^2}\right)+C\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5}-\frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3}+\frac{1}{3^4}\right)$$
$$-D\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}-\frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5}+\frac{1}{3^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{3^6}\right)$$
$$+E\left(\frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9}-\frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^6}{2.3.4.5.7}+\frac{1}{3^4}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5}-\frac{1}{3^6}\cdot\frac{\pi^2}{2.3}+\frac{1}{3^8}\right)$$
$$-\text{ etc.}$$

$$-\tfrac{1}{2}\,4d=A-B\left(\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{4^2}\right)+C\left(\frac{\pi^4}{3.3.4.5}-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3}+\frac{1}{4^4}\right)$$
$$-D\left(\frac{2.3.4.5.6.7}{\pi^6}-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5}+\frac{1}{4^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{4^6}\right)$$
$$+E\left(\frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9}-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^6}{2.3.4.5.7}+\frac{1}{4^4}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5}-\frac{1}{4^6}\cdot\frac{\pi^2}{2.3}+\frac{1}{4^8}\right)$$
$$-\text{ etc.}$$

etc.

215.

Connaissant les valeurs de $a\,b\,c\,d\,e\,f\ldots$ etc., on les substituera dans l'équation proposée

$$\varphi x = a\sin. x + b\sin. 2x + d\sin. 3x + e\sin. 4x + \text{etc.};$$

et mettant aussi au lieu des quantités ABCDE, etc. leurs valeurs $\varphi'\mathrm{o}$, $\varphi'''\mathrm{o}$, $\varphi^{\mathrm{v}}\mathrm{o}$, $\varphi^{\mathrm{vii}}\mathrm{o}$, $\varphi^{\mathrm{ix}}\mathrm{o}\ldots$ etc., on aura l'équation générale

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\pi\varphi x = {} & \sin. x\Big\{\varphi'\mathrm{o} + \varphi'''\mathrm{o}\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{1^2}\right) + \varphi^{\mathrm{v}}\mathrm{o}\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{1^4}\right) \\
& \qquad + \varphi^{\mathrm{vii}}\mathrm{o}\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{1^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{1^6}\right) + \text{etc.}\Big\} \\
& - \tfrac{1}{2}\sin. 2x\Big\{\varphi'\mathrm{o} + \varphi'''\mathrm{o}\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{2^2}\right) + \varphi^{\mathrm{v}}\mathrm{o}\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{2^4}\right) \\
& \qquad + \varphi^{\mathrm{vii}}\mathrm{o}\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{2^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{2^6}\right) + \text{etc.}\Big\} \\
& + \tfrac{1}{3}\sin. 3x\Big\{\varphi'\mathrm{o} + \varphi'''\mathrm{o}\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{3^2}\right) + \varphi^{\mathrm{v}}\mathrm{o}\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{3^4}\right) \\
& \qquad + \varphi^{\mathrm{vii}}\mathrm{o}\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{3^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{3^6}\right) + \text{etc.}\Big\} \\
& - \tfrac{1}{4}\sin. 4x\Big\{\varphi'\mathrm{o} + \varphi'''\mathrm{o}\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{4^2}\right) + \varphi^{\mathrm{v}}\mathrm{o}\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{4^4}\right) \\
& \qquad + \varphi^{\mathrm{vii}}\mathrm{o}\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{4^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{4^6}\right) + \text{etc.}\Big\} \quad (A) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

On peut se servir de la série précédente pour réduire en séries de sinus, d'arcs multiples une fonction proposée dont le développement ne contient que des puissances impaires de la variable.

216.

Le cas qui se présente le premier est celui où l'on aurait $\varphi x = x$; on trouve alors $\varphi' o = 1$, $\varphi''' o = o$, $\varphi^{v} o = o \ldots$, ainsi du reste. On aura donc la série

$$\frac{1}{2} x = \sin. x - \frac{1}{2} \sin. 2x + \frac{1}{3} \sin. 3x - \frac{1}{4} \sin. 4x + \text{etc.},$$

qui a été donnée par Euler.

Si l'on suppose que la fonction proposée soit x^3, on aura

$$\varphi' o = o, \; \varphi''' o = 2.3, \; \varphi^{v} o = o, \; \varphi^{vii} o = o \ldots \text{ etc.},$$

ce qui donne l'équation

$$\frac{1}{2} x^3 = \left(\pi^2 - \frac{2.3}{1^2}\right) \sin. x - \left(\pi^2 - \frac{2,3}{2^2}\right) \frac{1}{2} \sin. 2x + \left(\pi^2 - \frac{2.3}{3^2}\right) \frac{1}{.3} \sin. 3x + \text{etc.}$$

On parviendrait à ce même résultat en partant de l'équation précédente,

$$\frac{1}{2} x = \sin. x - \frac{1}{2} \sin. 2x + \frac{1}{3} \sin. 3x - \frac{1}{4} \sin. 4x + \text{etc.}$$

En effet, en multipliant chaque membre par dx, et intégrant, ou aura

$$C - \frac{x^2}{4} = \cos. x - \frac{1}{2^2} \cos. 2x + \frac{1}{3^2} \cos. 3x - \frac{1}{4^2} \cos. 4x + \text{etc.};$$

la valeur de la constante c est

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \text{etc.};$$

série dont on sait que la somme est $+\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{2.3}$. Multipliant par dx les deux membres de l'équation

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{x^2}{4}=\cos.x-\frac{1}{2^2}\cos.2x+\frac{1}{3^2}\cos.3x-\text{etc.}$$

et intégrant, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{\pi^2.x}{2.3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{2.3}=\sin.x-\frac{1}{2^2}\cdot\sin.2x+\frac{1}{3^2}\sin.3x-\text{etc.}$$

Si maintenant on met au lieu de x, sa valeur tirée de l'équation

$$\frac{1}{2}x=\sin.x-\frac{1}{2}\sin.2x-\frac{1}{3}\sin.3x-\frac{1}{4}\sin.4x+\text{etc.},$$

on obtiendra la même équation que ci-dessus, savoir :

$$\frac{1}{2}\frac{x^3}{2.3}=\sin.x\left(\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{1^2}\right)-\frac{1}{2}\sin.2x\left(\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{2^2}\right)$$
$$+\frac{1}{3}\sin.3x\left(\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4}\sin.4x\left(\frac{\pi^2}{2.3}-\frac{1}{4^2}\right)-\text{etc.}$$

On parviendrait de la même manière à développer en séries de sinus multiples, les puissances $x^5\,x^7\,x^9\ldots$ etc., et en général toute fonction dont le développement ne contiendrait que des puissances impaires de la variable.

217.

L'équation (A) (art. 216) peut être mise sous une forme plus simple que nous allons faire connaître. On remarque d'abord qu'une partie du coëfficient de sin. x, est la série

$$\varphi'o+\frac{\pi^2}{2.3}\varphi'''o+\frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{\text{v}}o+\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}\varphi^{\text{vii}}o+\text{etc.},$$

qui représente la quantité $\frac{1}{\pi}\varphi\pi$. En effet, on a en général

$$\varphi x = \varphi o + x\varphi' o + \frac{x^2}{2}\varphi'' o + \frac{x^3}{2.3}\varphi''' o + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{\text{IV}} o + \frac{x^5}{2.3.4.5}\varphi^{\text{V}} o + \ldots \text{etc.}$$

Or, la fonction φx ne contenant par hypothèse que des puissances impaires; on doit avoir $\varphi o = o$, $\varphi'' o = o$, $\varphi^{\text{IV}} o = o$, ainsi de suite. Donc

$$\varphi x = x\varphi' o + \frac{x^3}{2.3}\varphi''' o + \frac{x^5}{2.3.4.5}\varphi^{\text{V}} o + \text{etc.};$$

une seconde partie du coëfficient de sin. x se trouve, en multipliant par $-\frac{1}{2}$, la série

$$\varphi''' o + \frac{\pi^2}{2.3}\varphi^{\text{V}} o + \frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{\text{V}} o + \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}\cdot\varphi^{\text{VII}} o + \text{etc.},$$

dont la valeur est $\frac{1}{\pi}\varphi''\pi$. On déterminera de cette manière les différentes parties du coëfficient de sin. x, et celles qui composent les coëfficients de sin. $2x$, sin. $3x$, sin. $4x$, sin. $5x$. etc. On emploiera pour cela les équations:

$$\varphi' o + \frac{\pi^2}{2.3}\varphi^{\text{VII}} o + \frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{\text{V}} o + \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}\varphi^{\text{VII}} o + \text{etc.} = \frac{1}{\pi}\varphi\,\pi$$

$$\varphi''' o + \frac{\pi^2}{2.3}\varphi^{\text{V}} o + \frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{\text{VII}} o + \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}\varphi^{\text{IX}} o + \text{etc.} = \frac{1}{\pi}\varphi''\pi$$

$$\varphi^{\text{V}} o + \frac{\pi^2}{2.3}\varphi^{\text{VII}} o + \frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{\text{IX}} o + \text{etc.} = \frac{1}{\pi}\varphi^{\text{IV}}\pi$$

$$\varphi^{\text{VII}} o + \frac{\pi^2}{2.3}\varphi^{\text{IX}} o + \text{etc.} = \frac{1}{\pi}\varphi^{\text{VI}}\pi$$

au moyen de cette réduction on donnera à l'équation (A) la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\pi\varphi x = {} & \sin. x \left\{ \varphi\pi - \tfrac{1}{1^2}\varphi''\pi + \tfrac{1}{1^4}\varphi^{\text{iv}}\pi - \tfrac{1}{6^6}\varphi^{\text{vi}}\pi + \text{etc.} \right\} \\
& - \tfrac{1}{2}\sin. 2x \left\{ \varphi\pi - \tfrac{1}{2^2}\varphi''\pi + \tfrac{1}{2^4}\varphi^{\text{iv}}\pi - \tfrac{1}{2^6}\varphi^{\text{vi}}\pi + \text{etc.} \right\} \\
& + \tfrac{1}{3}\sin. 3x \left\{ \varphi\pi - \tfrac{1}{3^2}\varphi''\pi + \tfrac{1}{3^4}\varphi^{\text{iv}}\pi - \tfrac{1}{3^6}\varphi^{\text{vi}}\pi + \text{etc.} \right\} \\
& - \tfrac{1}{4}\sin. 4x \left\{ \varphi\pi - \tfrac{1}{4^2}\varphi''\pi + \tfrac{1}{4^4}\varphi^{\text{iv}}\pi - \tfrac{1}{4^6}\varphi^{\text{vi}}\pi + \text{etc.} \right\} \\
& + \text{etc.} \qquad\qquad \text{(B)}
\end{aligned}
$$

ou celle-ci

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\pi\varphi x = {} & \varphi\ \pi \left\{ \sin. x - \tfrac{1}{2}\sin. 2x + \tfrac{1}{3}\sin. 3x - \text{etc.} \right\} \\
& - \varphi''\pi \left\{ \sin. x - \tfrac{1}{2^3}\sin. 2x + \tfrac{1}{3^3}\sin. 3x - \text{etc.} \right\} \\
& + \varphi^{\text{iv}}\pi \left\{ \sin. x - \tfrac{1}{2^5}\sin. 2x + \tfrac{1}{3^5}\sin. 3x - \text{etc.} \right\} \\
& - \varphi^{\text{vi}}\pi \left\{ \sin. x - \tfrac{1}{2^7}\sin. 2x - \tfrac{1}{3^7}\sin. 3x - \text{etc.} \right\} \\
& + \text{etc.} \qquad\qquad \text{(C)}
\end{aligned}
$$

218.

On peut appliquer l'une ou l'autre de ces formules, toutes les fois que l'on aura à développer une fonction proposée, en une série de sinus d'arcs multiples. Si par exemple la fonction proposée est $e^{x} - e^{-x}$, dont le développement ne contient que des puissances impaires de x, on aura

$$\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}=\left(\sin.x-\frac{1}{2}\sin.2x+\frac{1}{3}\sin.3x-\text{etc.}\right)$$

$$-\left(\sin.x-\frac{1}{2^3}\sin.2x+\frac{1}{3^3}\sin.3x-\text{etc.}\right)$$

$$+\left(\sin.x-\frac{1}{2^5}\sin.2x+\frac{1}{3^5}\sin.3x-\text{etc.}\right)$$

$$-\left(\sin.x-\frac{1}{2^6}\sin.2x+\frac{1}{3^6}\sin.3x-\text{etc.}\right)$$

$$+\left(\sin.x-\frac{1}{2^9}\sin.2x+\frac{1}{3^9}\sin.3x-\text{etc.}\right)$$

$$-\text{etc.}$$

En distinguant les coëfficients de sin. x, sin. $2x$, sin. $3x$, sin. $4x$, etc., et mettant au lieu de $\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^7}+$ etc., sa valeur $\frac{n}{n^2+1}$, on aura

$$\frac{1}{2}\pi\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{e^{\pi}-e^{-\pi}}=\frac{\sin.x}{1+\frac{1}{1}}-\frac{\sin.2x}{2+\frac{1}{2}}+\frac{\sin.3x}{3+\frac{1}{3}}-\frac{\sin.4x}{4+\frac{1}{4}}+\text{etc.}$$

On pourrait multiplier ces applications et en déduire plusieurs séries remarquables. On a choisi l'exemple précédent parce qu'il se présente dans diverses questions relatives à la propagation de la chaleur.

219.

Nous avons supposé jusqu'ici que la fonction dont on demande le développement en séries de sinus d'arcs multiples, peut être développée en une série ordonnée, suivant les puissances de la variable x, et qu'il n'entre dans cette dernière série que des puissances impaires. On peut étendre les mêmes conséquences à des fonctions quelconques, même à celles qui seraient discontinues et entièrement arbitraires. Pour établir clairement la vérité de cette proposition, il est nécessaire de poursuivre l'analyse qui fournit l'équation précédente (B) et d'examiner quelle est la nature des coëfficents qui multiplient $\sin. x$, $\sin. 2x$, $\sin. 3x$, $\sin. 4x$. En désignant par $\frac{s}{n}$ la quantité qui multiplie dans cette équation $\frac{1}{n}\sin. nx$, si n est impair, et $-\frac{1}{n}\sin. nx$, si n est pair; on aura

$$s = \varphi\pi - \frac{1}{n^2}\varphi''\pi + \frac{1}{n^4}\varphi^{\text{IV}}\pi - \frac{1}{n^6}\varphi^{\text{VI}}\pi + \text{etc.}$$

Considérant s comme une fonction de π, différentiant deux fois, et comparant les résultats, on trouve $s + \frac{1}{n^2}\frac{d^2 s}{d\pi^2} = \varphi\pi$; équation à laquelle la valeur précédente de s doit satisfaire. Or, l'équation $s + \frac{1}{n^2}\frac{d^2 s}{dx^2} = \varphi x$, dans laquelle s est considérée comme une fonction de x, a pour intégrale

$$s = a\cos. nx + b\sin. nx + n\sin. nx\int\cos. nx.\varphi x.dx$$
$$- n\cos. nx\int\sin. nx.\varphi x\, dx.$$

n étant un nombre entier, et la valeur de x étant égale à π, on a $s = \pm n\int\varphi x.\sin. nx\, dx$. Le signe $+$ doit être choisi lorsque n est impair, et le signe $-$ lorsque ce nombre est pair. On doit supposer x égal à la demi-circonférence π, après l'intégration indiquée; ce résultat se vérifie, lorqu'on développe aû moyen de l'intégration par parties, le terme

$$\int\varphi x\sin. nx.dx$$

en remarquant que la fonction φx ne contient que des puissances impaires de la variable et en prenant l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$.

On en conclut immédiatement que ce terme équivaut à

$$\pm\left(\varphi\pi-\varphi''\pi\cdot\frac{1}{n^2}+\varphi^{\text{iv}}\pi\cdot\frac{1}{n^4}-\varphi^{\text{vi}}\pi\cdot\frac{1}{n^6}+\varphi^{\text{viii}}\pi\cdot\frac{1}{n^8}+\text{etc.}\right).$$

Si l'on substitue cette valeur de $\frac{s}{n}$ dans l'équation (B), en prenant le signe + lorsque le terme de cette équation est de rang impair, et le signe — lorsque n est pair; on aura en général $S(\varphi x.\sin.\, nx.dx)$ pour le coëfficient de $\sin.\, nx$; on parvient de cette manière à un résultat très-remarquable exprimé par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\pi\varphi x=&\sin.\, x\,S(\sin.\, x.\varphi x.dx)+\sin.\, 2x\,S(\sin.\, 2x\,\varphi x\, dx)\\&+\sin.\, 3x\,S(\sin.\, 3x.\varphi x\, dx).....+\sin.\, ix\,S(\sin.\, ix\,\varphi x\, dx)+\text{etc.};\end{aligned}\tag{D}$$

le second membre donnera toujours le développement cherché de la fonction φx, si l'on effectue les intégrations depuis $x=0$, jusqu'à $x=\pi$.

220.

On voit par-là que les coëfficients $a\,b\,c\,d\,e\,f$... etc., qui entrent dans l'équation

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x=a\sin.\, x+b\sin.\, 2x+c\sin.\, 3x+d\sin.\, 4x+\text{etc.}$$

et que nous avons trouvés précédemment par la voie des éliminations successives, sont des valeurs intégrales définies exprimées par le terme général $S(\sin.\, ix.\varphi x\, dx)$, i étant le numéro du terme dont on cherche le coëfficient. Cette remarque est importante, en ce qu'elle fait connaître comment les fonctions entièrement arbitraires peuvent aussi être développées en séries de sinus d'arcs multiples. En effet, si la fonction φx est représentée par l'ordonnée variable d'une courbe quelconque dont l'abscisse s'étend depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, et si l'on construit sur cette même partie de l'axe la courbe trigonométrique connue, dont l'ordonnée est $y=\sin. x$; il sera facile de se représenter la valeur d'un terme intégral. Il faut concevoir que pour chaque abscisse x, à laquelle répond une valeur de φx, et une valeur de $\sin. x$, on multiplie cette dernière valeur par la première, et qu'au même point de l'axe on élève une ordonnée proportionnelle au produit $\varphi x.\sin. x$. On formera, par cette opération continuelle, une troisième courbe, dont les ordonnées sont celles de la courbe trigonométrique, réduite proportionnellement aux ordonnées de la courbe arbitraire qui représente φx. Cela posé, l'aire de la courbe réduite étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, donnera la valeur exacte du coëfficient de $\sin. x$; et quelle que puisse être la courbe donnée qui répond à φx, soit qu'on puisse lui assigner une équation analytique, soit qu'elle ne dépende d'aucune loi régulière, il est évident qu'elle servira toujours à réduire d'une manière quelconque la courbe trigonométrique; en sorte que l'aire de la courbe réduite a, dans tous les cas possibles, une valeur déterminée qui donne celle du coëfficient de $\sin. x$ dans le développement de la fonction. Il en est de même du coëfficient suivant b ou $S(\varphi x.\sin. 2x\, dx)$.

Il faut en général, pour construire les valeurs des coëfficients $a\, b\, c\, d\, e \ldots$ etc., imaginer que les courbes, dont les équations sont

$$y = \sin.\, x,\ y = \sin.\, 2\,x,\ y = \sin.\, 3\,x,\ y = \sin.\, 4\,x,\ \text{etc.},$$

ont été tracées pour un même intervalle sur l'axe des x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$; et qu'ensuite on a changé ces courbes en multipliant toutes leurs ordonnées par les ordonnées correspondantes d'une même courbe, dont l'équation est $y = \varphi x$. Les équations des courbes réduites, sont:

$$y = \sin.x.\varphi x, y = \sin.2\,x.\varphi x, y = \sin.3x.\varphi x, y = \sin.4x.\varphi x..\text{etc.}$$

Les aires de ces dernières courbes, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, seront les valeurs des coëfficients $a\ b\ c\ d$ etc., dans l'équation

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = a\ \sin.\, x + b\ \sin.\, 2\,x + c\ \sin.\, 3\,x + d\ \sin.\, 4\,x + \text{etc.}$$

221.

On peut aussi vérifier l'équation précédente (D) (art. 220), en déterminant immédiatement les quantités $a_1 a_2 a_3 \ldots a_j$ etc., dans l'équation

$$\varphi x = a_1 \sin.x + a_2 \sin.2x + a_3 \sin.3x + \ldots a_j \sin.jx + \ldots \text{etc.};$$

pour cela on multipliera chacun des membres de la dernière équation, par sin. $ix.dx$, i étant un nombre entier, et l'on prendra l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, on aura

$$\mathrm{S}(\varphi x.\sin.\, ix.dx) = a_1\,\mathrm{S}(\sin.\, x\ \sin.\, ix.dx) + a_2\,\mathrm{S}(\sin.\, 2\,x.\sin.\, ix.dx)$$
$$+ \ldots a_j\,\mathrm{S}(\sin.jx.\sin.\, ix.dx) + \ldots \text{etc.}$$

Or on peut facilement prouver, 1° que toutes les intégrales qui entrent dans le second membre, ont une valeur nulle, excepté le seul terme $a_i\,\mathrm{S}(\sin.\, ix.\sin.\, ix\,dx)$; 2° que la valeur de $\mathrm{S}(\sin.\, ix.\sin.\, ix.dx)$ est $\frac{1}{2}\pi$; d'où l'on conclura la valeur de a_i, qui est $\frac{S(\varphi x . \sin. ix . dx)}{\frac{1}{2}\pi}$. Tout se réduit à considérer la valeur des intégrales qui entrent dans le second membre, et à démontrer les deux propositions précédentes. L'intégrale $2\,S(\sin. jx . \sin. ix . dx)$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, et dans laquelle i et j sont des nombres entiers, est

$$\frac{1}{i-j}\sin.(\overline{i-j}.x) - \frac{1}{i+j}\sin.(\overline{i+j}\,x) + C.$$

L'intégrale devant commencer lorsque $x=0$, la constante C est nulle, et les nombres i et j étant entiers, la valeur de l'intégrale deviendra nulle lorsqu'on fera $x=\pi$; il s'ensuit que chacun des termes tels que

$$a_1 S(\sin. x \sin. ix.dx), a_2 S(\sin. 2x.\sin. ix.dx), a_3 S(\sin. 3x \sin. ix.dx) \text{ etc.}$$

s'évanouit, et que cela aura lieu toutes les fois que les nombres i et j seront différents. Il n'en est pas de même lorsque les nombres i et j sont égaux, car le terme $\frac{1}{i-j}\sin.(\overline{i-j}x)$ auquel se réduit l'intégrale, devient $\frac{0}{0}$, et sa valeur est π. On a parconséquent $2\,S(\sin. ix . \sin. ix . dx) = \pi$; on obtient ainsi de la manière la plus briève, les valeurs de $a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots a_i$ etc. qui sont :

$$a_1 = \frac{S(\varphi x . \sin. x . dx)}{\frac{1}{2}\pi},\ a_2 = \frac{S(\varphi x . \sin. 2x . dx)}{\frac{1}{2}\pi},$$
$$a_3 = \frac{S(\varphi x . \sin. 3x . dx)}{\frac{1}{2}\pi} \ldots\ a_i = \frac{S(\varphi x . \sin. ix . dx)}{\frac{1}{2}\pi}.$$

En les substituant on a

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = \sin. x\, S(\varphi x \sin. x . dx) + \sin. 2x\, S(\varphi x . \sin. 2x . dx)$$
$$+ \sin. 3x\, S(\varphi . x \sin. 3x . dx) \ldots + \sin. ix\, S(\varphi x \sin. ix . dx)$$
$$+ \text{etc.}$$

222.

Le cas le plus simple est celui où la fonction donnée a une valeur constante pour toutes les valeurs de la variable x comprises entre o et π; dans ce cas, l'intégrale $\int \sin. ix\, dx$ est égale à $\frac{2}{i}$ si le nombre i est impair, et égal à o si le nombre i est pair. On en déduit l'équation

$$\frac{1}{2}\pi = \sin. x + \frac{1}{3}\sin. 3x + \frac{1}{5}\sin. 5x + \frac{1}{7}\sin. 7x + \frac{1}{9}\sin. 9x + \text{etc.}$$

que l'on a trouvée précédemment.

Il faut remarquer que lorsqu'on a développé une fonction φx en une suite de sinus d'arcs multiples la valeur de la série $a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x +$ etc. est la même que celle de la fonction φx tant que la variable x est comprise entre o et π; mais cette égalité cesse en général d'avoir lieu lorsque la valeur de x surpasse le nombre π.

Supposons que la fonction dont on demande le développement soit x, on aura, d'après le théorême précédent,

$$\frac{1}{2}\pi x = \sin. x \int x \sin. x\, dx + \sin. 2x \int x \sin. 2x\, dx$$
$$+ \sin. 3x \int x \sin. 3x\, dx + \sin. 4x \int x \sin. 4x\, dx + \text{etc.}$$

L'intégrale $\int_0^\pi x \sin. ix\, dx$ équivaut à $\pm \frac{\pi}{i}$, les indices o et π qui sont joints au signe $\int$ font connaître les limites de l'intégrale ; le signe + doit être choisi lorsque i est impair, et le signe — lorsque i est pair. On aura donc l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}x=\sin.x-\frac{1}{2}\sin.2x+\frac{1}{3}\sin.3x-\frac{1}{4}\sin.4x+\frac{1}{5}\sin.5x-\frac{1}{7}\sin.7x+\text{etc.}$$

223.

On développera aussi en séries de sinus d'arcs multiples les fonctions différentes de celles où il n'entre que des puissances impaires de la variable. Pour apporter un exemple qui ne laisse aucun doute sur la possibilité de ce développement, nous choisirons la fonction $\cos.\,x$, qui ne contient que des puissances paires de x, et qu'on développera sous la forme suivante :

$$a\sin.x+b\sin.2x+c\sin.3x+d\sin.4x+e\sin.5x+\text{etc.}$$

quoiqu'il n'entre dans cette dernière série que des puissances impaires de la même variable. On aura en effet, d'après le théorême précédent,

$$\frac{1}{2}\pi\cos.x=\sin.x\int\cos.x\sin.x\,dx$$
$$+\sin.2x\int\cos.x\sin.2x\,dx+\sin.3x\int\cos.x\sin.3x\,dx+\text{etc.}$$

L'intégrale $\int\cos.x\sin.ix\;dx$, équivaut à zéro lorsque i est un nombre impair, et à $\frac{2i}{i^2-1}$, lorsque i est un nombre pair. En supposant successivement $i=2, 4, 6, 8$, etc. on aura la série toujours convergente :

$$\frac{1}{4}\pi\cos.x=\frac{2}{1.3}\sin.2x+\frac{4}{3.5}\sin.4x+\frac{6}{5.7}\sin.6x$$
$$+\frac{8}{7.9}\sin.8x+\frac{10}{9.11}\sin.10x+\text{etc.}$$

$$\text{ou } \cos. x = \frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)\sin. 2x + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\sin. 4x\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\sin. 6x + \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)\sin. 8x + \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)\sin. 10x + \text{etc.}\right.$$

Ce résultat a cela de remarquable qu'il offre le développement du cosinus en une suite de fonctions dont chacune ne contient que des puissances impaires. Si l'on fait dans l'équation précédente $x = \frac{1}{4}\pi$, on trouvera :

$$\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\text{etc.}\right)$$

Cette dernière série est connue (*introd. ad analysin. infinit. cap. X*).

224.

On peut employer une analyse semblable pour développer une fonction quelconque en série de cosinus d'arcs multiples. Soit φx la fonction dont on demande le développement, on écrira :

$$\varphi x = a_0 \cos. 0x + a_1 \cos. x + a_2 \cos. 2x + a_3 \cos. 3x + \ldots a_i \cos. ix \ldots + \text{etc.} \quad (m)$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par $\cos. jx$ et que l'on intègre chacun des termes du second membre depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$; il est facile de s'assurer que la valeur de cette intégrale sera nulle, excepté pour le seul terme qui contient déja $\cos. jx$. Cette remarque donne immédiatement le coëfficient a_j; il suffira en général de considérer la valeur de l'intégrale $\int \cos. jx \cos. ix\, dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, en supposant que j et i sont des nombres entiers. On a

$$\int \cos. jx \cos. ix\, dx = \frac{1}{2(j+i)}\sin. \overline{j+i}\,x + \frac{1}{2(j-i)}\sin. \overline{j-i}\,x + c.$$

Cette intégrale, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, est évidemment nulle toutes les fois que j et i sont deux nombres différents. Il n'en est pas de même lorsque ces deux nombres sont égaux. Le dernier terme $\frac{1}{2(j-i)}\sin.\overline{j-i}\,x$ devient $\frac{0}{0}$, et sa valeur est $\frac{1}{2}\pi$, lorsque l'arc x est égal à π. Si donc on multiplie les deux termes de l'équation précédente (m) par cos. ix, et que l'on intègre depuis o jusqu'à π, on aura : $\int\varphi x\cos.\,ix\,dx=\frac{1}{2}\pi\,a_i$, équation qui fera connaître la valeur du coëfficient a_i. Pour trouver le premier coëfficient a_0, on remarquera que dans l'intégrale

$$\frac{1}{2(j+i)}\sin.\overline{j+i}\,x+\frac{1}{2(j-i)}\sin.\overline{j-i}\,x\,,$$

si $j=0$ et $i=0$ chacun des termes devient $\frac{0}{0}$, et la valeur de chaque terme est $\frac{1}{2}\pi$; ainsi l'intégrale $\int\cos.jx\cos.ix\,dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$ est nulle lorsque les deux nombres entiers j et i sont différents ; elle est $\frac{1}{2}\pi$ lorsque les deux nombres j et i sont égaux, mais différents de zéro, elle est égale à π lorsque j et i sont l'un et l'autre égaux à zéro, on obtient ainsi l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x=\frac{1}{2}\int_0^\pi\varphi x\,dx+\cos.x\int_0^\pi\varphi x\cos.x\,dx$$

$$+\cos.2x\int_0^\pi\varphi x\cos.2x\,dx+\cos.3x\int_0^\pi\varphi x\cos.3x\,dx+\text{etc.}\quad(\text{n})$$

Ce théorême et le précédent conviennent à toutes les fonctions possibles, soit que l'on en puisse exprimer la nature par les moyens connus de l'analyse, soit qu'elles correspondent à des courbes tracées arbitrairement.

225.

Si la fonction proposée dont on demande le développement en cosinus d'arcs multiples est la variable x elle-même; on écrira l'équation

$$\tfrac{1}{2}\pi x = a_0 + a_1 \cos. x + a_2 \cos. 2x + a_3 \cos. 3x + \ldots + a_i \cos. ix + \text{etc.}$$

et l'on aura, pour déterminer un coëfficient quelconque a_i, l'équation $a_i = \int_0^\pi x \cos. ix\,dx$. Cette intégrale a une valeur nulle lorsque i est un nombre pair, et est égal à $-\frac{2}{i^2}$ lorsque i est impair. On a en même temps $a_0 = \frac{1}{4}\pi^2$. On formera donc la série suivante,

$$x = \frac{1}{2}\pi - 4\frac{\cos. x}{\pi} - 4\frac{\cos. 3x}{3^2\pi} - 4\frac{\cos. 5x}{5^2\pi} - 4\frac{\cos. 7x}{7^2\pi} - \text{etc.}$$

On peut remarquer ici que nous sommes parvenus à trois développements différents de $\frac{1}{2}x$, savoir :

$$\frac{1}{2}x = \sin. x - \frac{1}{2}\sin. 2x + \frac{1}{3}\sin. 3x - \frac{1}{4}\sin. 4x + \frac{1}{5}\sin. 5x - \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{2}{\pi}\sin. x + \frac{2}{3^2\pi}\sin. 3x + \frac{2}{5^2\pi}\sin. 5x + \frac{2}{7^2\pi}\sin. 7x + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\cos. x - \frac{2}{3^2\pi}\cos. 3x - \frac{2}{5^2\pi}\cos. 5x - \text{etc.}$$

Il faut remarquer que ces trois valeurs de $\frac{1}{2}x$ ne doivent point être considérées comme égales, abstraction faite de toutes les valeurs de x; les trois développements précédents n'ont une valeur commune que lorsque la variable x est comprise entre o et $\frac{1}{2}\pi$. La construction des valeurs de ces trois séries et la comparaison des lignes dont elles expriment les ordonnées rendraient sensibles la coïncidence et la distinction alternatives des valeurs de ces fonctions.

Pour donner un second exemple du développement d'une fonction en série de cosinus d'arcs multiples, nous choisirons la fonction sin. x qui ne contient que des puissances impaires de la variable, et nous nous proposerons de la développer sous la forme

$$a + b\cos. x + c\cos. 2x + d\cos. 3x + \text{etc.}$$

En faisant à ce cas particulier l'application de l'équation générale, on trouvera, pour l'équation cherchée,

$$\frac{1}{4}\pi\sin. x = \frac{1}{2} - \frac{\cos. 2x}{1.3} - \frac{\cos. 4x}{3.5} - \frac{\cos. 6x}{5.7} - \frac{\cos. 8x}{7.9} - \text{etc.}$$

On parvient ainsi à développer une fonction qui ne contient que des puissances impaires en une série de cosinus dans laquelle il n'entre que des puissances paires de la variable. Si on donne à x la valeur particulière $\frac{1}{2}\pi$, on trouvera :

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \text{etc.}$$

Or, de l'équation connue

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

On tire

$$\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \text{etc.}$$

et aussi

$$\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.5} - \frac{1}{7.9} - \frac{1}{11.13} - \frac{1}{13.15} - \text{etc.}$$

en ajoutant ces deux résultats, on a, comme précédemment,

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} - \frac{1}{11.13} + \text{etc.}$$

226.

L'analyse précédente donnant le moyen de développer une fonction quelconque en série de sinus ou de cosinus d'arcs multiples, nous l'appliquerons facilement au cas où la fonction à développer a des valeurs déterminées, lorsque la variable est comprise entre de certaines limites et a des valeurs nulles, lorsque la variable est comprise entre d'autres limites. Nous nous arrêterons à l'examen de ce cas particulier, parce qu'il se présente dans les questions physiques qui dépendent des équations aux différences partielles, et qu'il avait été proposé autrefois comme un exemple des fonctions qui ne peuvent être développées en sinus ou cosinus d'arcs multiples. Supposons donc que l'on ait à réduire en une série de cette forme une fonction dont la valeur est constante, lorsque x est comprise entre o et α, et dont toutes les valeurs sont nulles lorsque x est comprise entre α et π. On emploiera l'équation générale (m) dans laquelle les intégrales doivent être prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$. Les valeurs de φx qui entrent sous le signe $\int$

étant nulles depuis $x=\alpha$ jusqu'à $x=\pi$; il suffira d'intégrer depuis $x=0$ jusqu'à $x=\alpha$. Cela posé, on trouvera, pour la série demandée, en désignant par h la valeur constante de la fonction,

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x=h\left\{\frac{1-\cos.\alpha}{2}\sin.x+\frac{1-\cos.2\alpha}{2}\sin.2x\right.$$
$$\left.+\frac{1-\cos.3\alpha}{2}\sin.3x+\frac{1-\cos.4\alpha}{2}\sin.4x+\text{etc.}\right\}$$

Si l'on fait $h=\frac{1}{2}\pi$, et que l'on représente le sinus verse de l'arc x par $\sin.\text{V}.x$, on aura :

$$\varphi x=\sin.\text{V}.\alpha\sin.x+\tfrac{1}{2}\sin.\text{V}.2\alpha\sin.2x+\tfrac{1}{3}\sin.\text{V}.3\alpha\sin.3x$$
$$+\tfrac{1}{5}\sin.\text{V}.4\alpha\sin.4x+\tfrac{1}{7}\sin.\text{V}.5\alpha\sin.5x+\text{etc.}$$

Cette série toujours convergente est telle que si l'on donne à x une valeur quelconque comprise entre 0 et α, la somme de ses termes sera $\frac{1}{2}\pi$; mais si l'on donne à x une valeur quelconque plus grande que α et moindre que $\frac{1}{2}\pi$ la somme des termes sera nulle.

Dans l'exemple suivant, qui n'est pas moins remarquable, les valeurs de φx sont égales à $\sin.x$ pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et α, et sont nulles pour toutes les valeurs de x comprises entre α et π. Pour trouver la série qui satisfait à cette condition, on emploiera l'équation (m).

Les intégrales doivent être prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$; mais il suffira, dans le cas dont il s'agit, de prendre ces intégrales depuis $x=0$ jusqu'à $x=\alpha$, puisque les valeurs de φx sont supposées nulles, dans le reste de l'intervalle. On en conclura :

$$\varphi x = 2\alpha \left\{ \frac{\sin.\alpha \sin.x}{\pi^2 - \alpha^2} + \frac{\sin.2\alpha \sin.2x}{\pi^2 - 2^2\alpha^2} + \frac{\sin.3\alpha \sin.3x}{\pi^2 - 3^2\alpha^2} + \frac{\sin.4\alpha \sin.4x}{\pi^2 - 4^2\alpha^2} + \text{etc.} \right\}$$

Si l'on supposait $\alpha = \pi$, tous les termes de la série s'évanouiraient, excepté le premier qui deviendrait $\frac{0}{0}$, et qui a pour valeur sin. x, on aurait donc $\varphi x = \sin. x$.

227.

On peut étendre la même analyse au cas ou l'ordonnée représentée par φx serait celle d'une ligne composée de différentes parties, dont les unes seraient des arcs de courbes et les autres des lignes droites. Par exemple, si la fonction dont on demande le développement en séries de cosinus d'arcs multiples a pour valeur $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}\pi$, et est nulle depuis $x = \frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $x = \pi$. On emploiera l'équation générale (n), et en effectuant les intégrations dans les limites données, on trouvera que le terme général $\int \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2 \right) \cos. ix\, dx$ est égal à $\frac{2}{i^3}$ lorsque i est impair, à $\frac{\pi}{i^2}$ lorsque i est double d'un nombre impair, et à $-\frac{\pi}{i^2}$ lorsque i est quadruple d'un nombre impair. D'un autre côté, on trouvera $\frac{1}{3}\frac{\pi^3}{2^3}$ pour la valeur du premier terme $\frac{1}{2}\int \varphi x\, dx$. On aura donc le développement suivant :

$$\frac{1}{2}\varphi x = \frac{1}{2.3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{\cos.x}{1^3} + \frac{\cos.3x}{3^3} + \frac{\cos.5x}{5^3} + \frac{\cos.7x}{7^3} + \text{etc.} \right\}$$
$$+ \frac{\cos.2x}{2^2} - \frac{\cos.4x}{4^2} + \frac{\cos.6x}{6^2} - \text{etc.}$$

Le second membre est représenté par une ligne composée d'arcs paraboliques et de lignes droites.

228.

On pourra trouver de la même manière le développement d'une fonction de x qui exprime l'ordonnée du contour d'un trapèze. Supposons que φx soit égale à x depuis $x=0$ jusqu'à $x=\alpha$, que cette fonction soit égale à α depuis $x=\alpha$ jusqu'à $x=\pi-\alpha$, et enfin égale à $\pi-x$, depuis $x=\pi-\alpha$ jusqu'à $x=\pi$. Pour la réduire en une série de sinus d'arcs multiples, on se servira de l'équation générale (m). Le terme général $\int \varphi\, x \sin.\, ix.dx$ sera composé de trois parties différentes, et l'on aura, après les réductions, $\frac{2}{i^2}\sin.\,(i\alpha)$ pour le coëfficient de $\sin.\, ix$, lorsque i est un nombre impair; et zéro pour ce coëfficient, lorsque i est un nombre pair. On parvient ainsi à l'équation :

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x=2\left\{\sin.\alpha\sin.x+\frac{1}{3^2}\sin.3\alpha\sin.3x+\frac{1}{5^2}\sin.5\alpha\sin.5x\right.$$
$$\left.+\frac{1}{7^2}\sin.7\alpha\sin.7x+\text{etc.}\right\}\quad(\mu)$$

Si l'on supposait $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, le trapèze se confondrait avec le triangle isoscèle, et l'on aurait, comme précédemment, pour l'équation du contour de ce triangle :

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x=2\left(\sin.x+\frac{1}{3^2}\sin.3x+\frac{1}{5^2}\sin.5x+\frac{1}{7^2}\sin.7x+\text{etc.}\right)$$

série qui est toujours convergente quelle que soit la valeur de x. En général les suites trigonométriques auxquelles nous sommes parvenus, en développant les diverses fonctions, sont toujours convergentes : mais il ne nous a point paru nécessaire de le démontrer ici : car les termes qui composent ces suites ne sont que les coëfficients des termes des séries qui donnent les valeurs des températures ; et ces coëfficients affectent des quantités exponentielles qui décroissent très-rapidement, en sorte que ces dernières séries sont très-convergentes. A l'égard de celles où il n'entre que des sinus ou des cosinus d'arcs multiples, il est également facile de prouver qu'elles sont convergentes, quoiqu'elles représentent les ordonnées des lignes discontinues. Cela ne résulte pas seulement de ce que les valeurs des termes diminuent continuellement; car cette condition ne suffit pas pour établir la convergence d'une série. Il est nécessaire que les valeurs auxquelles on parvient, en augmentant continuellement le nombre des termes, s'approchent de plus en plus d'une limite fixe, et ne s'en écartent que d'une quantité qui peut devenir moindre que toute grandeur donnée : cette limite est la valeur de la série. Or on démontre rigoureusement que les suites dont il s'agit satisfont à cette dernière condition.

229.

Nous reprendrons l'équation précédente (μ) dans laquelle on peut donner à x une valeur quelconque ; on considérera cette quantité comme une nouvelle ordonnée, ce qui donnera lieu à la construction suivante.

Ayant tracé sur le plan des x et y (*voy. fig.* 8) le rectangle dont la base $o\,\pi$ est égale à la demi-circonférence, et dont la hauteur est $\frac{1}{2}\pi$, sur le milieu m du côté parallèle à la base on élevera perpendiculairement au plan du rectangle une ligne égale à $\frac{1}{2}\pi$, et par l'extrémité supérieure de cette ligne, on tirera des droites aux quatre angles du rectangle. On formera ainsi une pyramide quadrangulaire. Si l'on porte maintenant sur le petit côté du rectangle, à partir du point o, une ligne quelconque égale à α, et que par l'extrémité de cette ligne on mène un plan parallèle à la base o π, et perpendiculaire au plan du rectangle, la section commune à ce plan et au solide sera le trapèze, dont la hauteur est égale à α. L'ordonnée variable du contour de ce trapèze est égal, comme nous venons de le voir, à

$$\frac{4}{\pi}\Big(\sin.\alpha\sin.x+\frac{1}{3^2}\sin.3\alpha\sin.3x+\frac{1}{5^2}\sin.5\alpha\sin.5x$$
$$+\frac{1}{7^2}\sin.7\alpha\sin.7x+\text{etc.}\Big);$$

Il suit de là qu'en appelant x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque de la surface supérieure de la pyramide quadrangulaire que nous avons formée, on aura pour l'équation de la surface du polyèdre, entre les limites

$$x=0,\ x=\pi,\ y=0,\ y=\tfrac{1}{2}\pi:$$

$$\frac{1}{2}\pi z=\frac{\sin.x\sin.y}{1^2}+\frac{\sin.3x\sin.3y}{3^2}+\frac{\sin.5x\sin.5y}{5^2}+\text{etc.}$$

Cette série convergente donnera toujours la valeur de l'ordonnée z ou de la distance d'un point quelconque de la surface au plan des x et y.

Les suites formées de sinus ou de cosinus d'arcs multiples sont donc propres à représenter entre des limites déterminées, toutes les fonctions possibles, et les ordonnées des lignes ou des surfaces dont la loi est discontinue. Non seulement la possibilité de ces développements est démontrée, mais il est facile de calculer les termes des séries; la valeur d'un coëfficient quelconque dans l'équation :

$$\varphi x=a_1\sin.x+a_2\sin.2x+a_3\sin.3x+\ldots.+a_i\sin.ix+\text{etc.}$$

est celle d'une intégrale définie, savoir :

$$\frac{2}{\pi}\int \varphi x \sin. ix.dx.$$

Quelle que puisse être la fonction φx, ou la forme de la courbe qui la représente, l'intégrale a une valeur déterminée qui peut être introduite dans le calcul. Les valeurs de ces intégrales définies sont analogues à celle de l'aire totale $\int \varphi x\, dx$ comprise entre la courbe et l'axe dans un intervalle donné, ou à celles des quantités mécaniques, telles que les ordonnées du centre de gravité de cette aire ou d'un solide quelconque. Il est évident que toutes ces quantités ont des valeurs assignables soit que la figure des corps soit régulière, soit qu'on leur donne une forme entièrement arbitraire.

230.

Si l'on applique ces principes à la question du mouvement des cordes vibrantes, on résoudra les difficultés qu'avait d'abord présentées l'analyse de Daniel Bernouilli. La solution donnée par ce géomètre suppose qu'une fonction quelconque peut toujours être développée en séries de sinus ou de cosinus d'arcs multiples. Or de toutes les preuves de cette proposition la plus complète est celle qui consiste à résoudre en effet une fonction donnée en une telle série dont on détermine les coëfficients.

Dans les recherches auxquelles on applique les équations aux différences partielles, il est souvent facile de trouver des solutions dont la somme compose une intégrale plus générale : mais l'emploi de ces intégrales exigeait que l'on en déterminât l'étendue, et que l'on pût distinguer clairement les cas où elles représentent l'intégrale générale de ceux où elles n'en comprennent qu'une partie. Il était nécessaire sur-tout d'assigner les valeurs des constantes, et c'est dans la recherche des coëfficients que consiste la difficulté de l'application. Il est remarquable que l'on puisse exprimer par des séries convergentes, et, comme on le verra dans la suite, par des intégrales définies, les ordonnées des lignes et des surfaces qui ne sont point assujéties à une loi continue. On voit par-là qu'il est nécessaire d'admettre dans l'analyse des fonctions qui ont des valeurs égales, toutes les fois que la variable reçoit des valeurs quelconques comprises entre deux limites données, tandis qu'en substituant dans ces deux fonctions, au lieu de la variable, un nombre compris dans un autre intervalle les résultats des deux substitutions ne sont point les mêmes. Les fonctions qui jouissent de cette propriété sont représentées par des lignes différentes, qui ne coïncident que dans une portion déterminée de leur cours, et offrent une espèce singulière d'osculation finie. Ces considérations prennent leur origine dans le calcul des équations aux différences partielles; elles jettent un nouveau jour sur ce calcul, et serviront à en faciliter l'usage dans les théories physiques.

231.

Les deux équations générales qui expriment le développement d'une fonction quelconque en cosinus ou en sinus d'arcs multiples donnent lieu à plusieurs remarques qui font connaître le véritable sens de ces théorêmes, et en dirigent l'application.

Si dans la série

$$a + b\cos. x + c\cos. 2x + d\cos. 3x + e\cos. 4x + \text{etc.}$$

on rend négative la valeur de x, la série demeure la même, et elle conserve aussi sa valeur si l'on augmente la variable d'un multiple quelconque de la circonférence 2π. Ainsi dans l'équation

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = \frac{1}{2}\int\varphi x\,dx + \cos.x\int\varphi x\cos.x\,dx$$
$$+\cos.2x\int\varphi x\cos.2x\,dx + \cos.3x\int\varphi x\cos.3x\,dx + \text{etc.} \quad (\nu)$$

la fonction φ est périodique, et représentée par une courbe composée d'une multitude d'arcs égaux, dont chacun correspond sur l'axe des abscisses à un intervalle égal à 2π. De plus chacun de ces arcs est composé de deux branches symétriques qui répondent aux deux moitiés de l'intervalle égal à 2π.

Supposons donc que l'on trace une ligne d'une forme quelconque $\varphi\varphi\alpha$ et qui réponde à un intervalle égal à π, (*voyez* fig. 9). Si l'on demande une série de la forme

$$a + b\cos.x + c\cos.2x + d\cos.3x + \text{etc.}$$

telle qu'en mettant au lieu de x une valeur quelconque X comprise entre o et π, on trouve pour la valeur de la série celle de l'ordonnée $X\varphi$, il sera facile de résoudre cette question: car les coëfficients donnés par l'équation (ν) sont

$$\frac{1}{\pi}\int\varphi x\,dx,\ \frac{2}{\pi}\int\varphi x\cos.2x\,dx,\ \frac{2}{\pi}\int\varphi x\cos.3x\,dx,\ \text{etc.}$$

Les diverses intégrales qui sont prises de $x=0$ à $x=\pi$, ayant toujours des valeurs mesurables comme celle de l'aire $0\varphi a\pi$, et la série formée par ces coëfficients étant toujours convergente, il n'y a aucune forme de la ligne $\varphi\varphi a$, pour laquelle l'ordonnée $X\varphi$ ne soit exactement représentée par le développement

$$a + b\cos.x + c\cos.2x + d\cos.3x + e\cos.4x + \text{etc.}$$

L'arc $\varphi\varphi a$ est entièrement arbitraire; mais il n'en est pas de même des autres parties de la ligne, elles sont au contraire déterminées : ainsi l'arc $\varphi\alpha$ qui répond à l'intervalle de o à $-\pi$, est le même que l'arc φa; et l'arc total $\alpha\varphi a$ se répète pour les parties consécutives de l'axe dont la longueur est 2π.

On peut faire varier dans l'équation (ν) les limites des intégrales. Si elles étaient prises depuis $x=-\pi$ jusqu'à $x=\pi$, le résultat serait double; il le serait aussi si les limites des intégrales étaient o et 2π, au lieu d'être o et π.

Nous désignons en général par le signe $\int_a^b$ l'intégrale qui commence lorsque la variable équivaut à a, et qui est complète lorsque la variable équivaut à b; et nous écrirons l'équation (n) sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi x\,dx + \cos.x\int_0^\pi \varphi x\cos.x\,dx$$

$$+\cos.2x\int_0^\pi \varphi x\cos.2x\,dx + \cos.3x\int_0^\pi \varphi x\cos.3x\,dx + \text{etc.} \qquad (\nu)$$

Au lieu de prendre les intégrales depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, on pourrait les prendre depuis $x=0$ jusqu'à $x=2\pi$, ou depuis $x = -\pi$ jusqu'à $x = \pi$; mais dans chacun de ces deux cas, il faut écrire au premier membre $\pi \varphi x$ au lieu de $\frac{1}{2} \pi \varphi x$.

232.

Dans l'équation qui donne le développement d'une fonction quelconque en sinus d'arcs multiples, la série change de signe et conserve la même valeur absolue lorsque la variable x devient négative ; elle conserve sa valeur et son signe lorsque la variable est augmentée ou diminuée d'un multiple quelconque de la circonférence 2π. L'arc $\varphi \varphi a$ (*voyez* fig. 10), qui répond à l'intervalle de 0 à π est arbitraire ; toutes les autres parties de la ligne sont déterminées. L'arc $\varphi \varphi \alpha$, qui répond à l'intervalle de 0 à $-\pi$, a la même forme que l'arc donné $\varphi \varphi a$; mais il est dans une situation opposée. L'arc total $\alpha \varphi \varphi \varphi \varphi a$ est répété dans l'intervalle de π à 3π, et dans tous les intervalles semblables. Nous écrirons cette équation comme il suit :

$$\frac{1}{2}\pi \varphi x = \sin. x \int_0^\pi \varphi x \sin. x\, dx + \sin. 2x \int_0^\pi \varphi x \sin. 2x\, dx$$
$$+ \sin. 3x \int_0^\pi \varphi x \sin. 3x\, dx + \text{etc.} \qquad (\mu)$$

On pourrait changer les limites des intégrales, et écrire $\int_0^{2\pi}$ ou $\int_{-\pi}^{+\pi}$ au lieu de $\int_0^\pi$; mais dans chacun de ces deux cas, il faut écrire au premier membre $\pi \varphi x$, au lieu de $\frac{1}{2} \pi \varphi x$.

233.

La fonction φx, développée en cosinus d'arcs multiples, est représentée par une ligne formée de deux arcs égaux placés symétriquement de part et d'autre de l'axe des y, dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$ (*voy.* fig. 11); cette condition est exprimée ainsi $\varphi x = \varphi(-x)$. La ligne qui représente la fonction ψx est au contraire formée dans le même intervalle de deux arcs opposés, ce qu'exprime l'équation

$$\psi x = -\psi(-x).$$

Une fonction quelconque Fx, représentée par une ligne tracée arbitrairement dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, peut toujours être partagée en deux fonctions telles que φx et ψx. En effet, si la ligne $F'F'mFF$ représente la fonction Fx, et que l'on élève par le point o l'ordonnée om, on tracera par le point m à droite de l'axe om l'arc mff semblable à l'arc $mF'F'$ de la courbe donnée, et à gauche du même axe on tracera l'arc $mf'f'$ semblable à l'arc mFF; ensuite on fera passer par le point m une ligne $\varphi'\varphi'm\varphi\varphi$ qui partagera en deux parties égales la différence de chaque ordonnée xF ou $x'f'$ à l'ordonnée correspondante xf ou $x'F'$. On tracera aussi la ligne $\psi'\psi'$o$\psi\psi$, dont l'ordonnée mesure la différence de l'ordonnée de $F'F'mFF$ à celle de $f'f'mff$. Cela posé, les ordonnées de la ligne $F'F'mFF$ et de la ligne $ff'mff$ étant désignées l'une par Fx et la seconde par fx, on aura évidemment $fx = F(-x)$; désignant aussi l'ordonnée de $\varphi'\varphi'm\varphi\varphi$ par φx, et celle de $\psi'\psi'$o$\psi\psi$ par ψx, on aura.

$$Fx = \varphi x + \psi x + \text{ et } fx = \varphi x - \psi x = F(-x)$$

donc

$$\varphi x = \tfrac{1}{2}Fx + \tfrac{1}{2}F(-x) \text{ et } \psi x = \tfrac{1}{2}Fx - \tfrac{1}{2}F(-x).$$

on en conclut

$$\varphi x = \varphi(-x) \text{ et } \psi x = -\psi(-x);$$

ce que la construction rend d'ailleurs évident.

Ainsi les deux fonctions φx et ψx, dont la somme équivaut à Fx, peuvent être développées l'une en cosinus d'arcs multiples et l'autre en sinus.

Si l'on applique à la première fonction l'équation (ν), et à la seconde l'équation (μ), en prenant dans l'une et l'autre les intégrales depuis $x=-\pi$ jusqu'à $x=\pi$, et si l'on ajoute les deux résultats, on aura

$$\pi(\varphi x + \psi x) = \pi F x = \frac{1}{2}\int \varphi x\, dx \begin{array}{l} + \cos. x \int \varphi x\, dx + \cos. 2x \int \varphi x \cos. 2x\, dx + \text{etc.} \\ + \sin. x \int \psi x\, dx + \sin. 2x \int \psi x \sin. 2x\, dx + \text{etc.} \end{array}$$

les intégrales doivent être prises depuis $x=-\pi$ jusqu'à $x=\pi$. Il faut remarquer maintenant que dans l'intégrale $\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi x \cos. x\, dx$ on pourrait, sans en changer la valeur, mettre $\varphi x + \psi x$ au lieu de φx: car la fonction $\cos. x$ étant composée, à droite et à gauche de l'axe des x, de deux parties semblables, et la fonction ψx étant au contraire formée de deux parties opposées, l'intégrale $\int_{-\pi}^{+\pi} \psi x \cos. x\, dx$ est nulle. Il en serait de même si l'on mettait $\cos. 2x$ ou $\cos. 3x$ et en général $\cos. ix$ au lieu de $\cos. x$, i étant un des nombres entiers depuis o jusqu'à l'infini. Ainsi l'intégrale $\int_{\pi}^{+\pi} \varphi x \cos ix\, dx$ est la même que l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi}(\psi x+\psi x)\cos.\, ix\, dx \text{ ou } \int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{F}x\cos.\, ix\, dx\,;$$

On reconnaîtra aussi que l'intégrale $\int_{-\pi}^{+\pi}\psi x \sin.\, ix\, dx$ est égale à l'intégrale $\int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{F}x\sin.\, ix\, dx$, parce que l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi x \sin.\, ix\, dx$$

est nulle. On obtient par-là l'équation suivante (p), qui sert à développer une fonction quelconque en une suite formée de sinus et de cosinus d'arcs multiples;

$$\pi\mathrm{F}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{F}x\,dx \begin{array}{l} +\cos.\, x\int\mathrm{F}x\cos.\, x\,dx+\cos.\, 2x\int\mathrm{F}x\cos.\, 2x\,dx+\text{etc.}\\ +\sin.\, x\int\mathrm{F}x\sin.\, x\,dx+\sin.\, 2x\int\mathrm{F}x\sin.\, 2x\,dx+\text{etc.}\end{array} \qquad (p)$$

234.

La fonction $\mathrm{F}x$, qui entre dans cette équation, est représentée par une ligne F′F′FF, d'une forme quelconque. L'arc F′F′FF, qui répond à l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, est arbitraire; toutes les autres parties de la ligne sont déterminées, et l'arc F′F′FF est répété dans tous les intervalles consécutifs dont la longueur est 2π. Nous ferons des applications fréquentes de ce théorême, et des équations précédentes (m) et (n).

Si l'on suppose dans l'équation (p) que la fonction Fx est représentée, dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, par une ligne composée de deux arcs égaux symétriquement placés, tous les termes qui contiennent les sinus s'évanouiront, et l'on trouvera l'équation (m). Si au contraire la ligne qui représente la fonction donnée Fx est formée de deux arcs égaux de situation opposée, tous les termes qui ne contiennent point les sinus disparaissent, et l'on trouve l'équation (n). En assujétissant la fonction $F'x$ à d'autres conditions, on trouverait d'autres résultats.

On écrira dans l'équation générale (p), au lieu de la variable x, la quantité $\pi\frac{x}{r}$, x désignant une autre variable, et $2r$ la longueur de l'intervalle dans lequel est placé l'arc qui représente Fx; cette fonction sera $F\left(\pi\frac{x}{r}\right)$, que nous désignerons par fx. Les limites qui étaient $x=-\pi$ et $x=\pi$ deviendront $\pi\frac{x}{r}=-\pi$, $\pi\frac{x}{r}=\pi$; on aura donc, après la substitution

$$rfx=\frac{1}{2}\int_{-r}^{+r} fx\,dx \begin{array}{l} +\cos.\left(\pi\frac{x}{r}\right)\int fx\cos.\left(\frac{\pi x}{r}\right)dx+\cos.\left(2\pi\frac{x}{r}\right)\int fx\cos.\left(2\pi\frac{x}{r}\right)dx+\text{etc.} \\ +\sin.\left(\pi\frac{x}{r}\right)\int fx\sin.\left(\frac{\pi x}{r}\right)dx+\sin.\left(2\pi\frac{x}{r}\right)\int fx\sin.\left(2\pi\frac{x}{r}\right)dx+\text{etc.} \end{array} \qquad (P)$$

toutes les intégrales doivent être prises comme la première, de $x=-r$ à $x=+r$. Si l'on fait la même substitution dans les équations (n) et (m), on aura

$$\frac{1}{2}rfx=\int_0^r fx\,dx+\cos.\left(\pi\frac{x}{r}\right)\int fx\cos.\left(\pi\frac{x}{r}\right)dx+\cos.\left(2\pi\frac{x}{r}\right)\int fx\cos.\left(2\pi\frac{x}{r}\right)dx+\text{etc.} \qquad (N)$$

$$\text{et } \tfrac{1}{2} r f x = \sin.\left(\pi \frac{x}{r}\right)\int_0^r f x . \sin.\left(\pi \frac{x}{r}\right) dx + \sin.\left(2\pi \frac{x}{r}\right)\int f x \sin.\left(2\pi \frac{x}{r}\right) dx + \text{etc.} \qquad \text{(M)}$$

dans la première équation (P), les intégrales pourraient être prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=2r$, et en représentant par X l'intervalle total $2r$, on aura

$$\tfrac{1}{2} X f x = \tfrac{1}{2}\int f x\, dx \begin{cases} + \cos.\left(2\pi \frac{x}{X}\right)\int f x \cos.\left(2\pi \frac{x}{X}\right) dx + \cos.\left(2.2\pi \frac{x}{X}\right)\int f x \cos.2\left(2\pi \frac{x}{X}\right) dx + \text{etc.} \\ + \sin.\left(2\pi \frac{x}{X}\right)\int f x \sin.\left(2\pi \frac{x}{X}\right) dx + \sin.2.\left(2\pi \frac{x}{X}\right)\int f x \sin.2\left(2\pi \frac{x}{X}\right) dx + \text{etc.} \end{cases} \qquad (\Pi)$$

235.

Il résulte de tout ce qui a été démontré dans cette section, concernant le développement des fonctions en séries trigonométriques, que si l'on propose une fonction fx, dont la valeur est représentée dans un intervalle déterminé, depuis $x=0$ jusqu'à $x=X$, par l'ordonnée d'une ligne courbe tracée arbitrairement on pourra toujours développer cette fonction en une série qui ne contiendra que les sinus, ou les cosinus, ou les sinus et cosinus des arcs multiples, ou les seuls cosinus des multiples impairs. On emploiera, pour connaître les termes de ces séries, les équations (M), (N), (P).

On ne peut résoudre entièrement les questions fondamentales de la théorie de la chaleur, sans réduire à cette forme les fonctions qui représentent l'état initial des températures.

Ces séries trigonométriques, ordonnées selon les cosinus ou les sinus des multiples de l'arc, appartiennent à l'analyse élémentaire, comme les séries dont les termes contiennent les puissances successives de la variable. Les coëfficients des séries trigonométriques sont des aires définies, et ceux des séries de puissance sont des fonctions données par la différentiation, et dans lesquelles on attribue aussi à la variable une valeur définie. Nous aurions à ajouter plusieurs remarques concernant l'usage et les propriétés des séries trigonométriques; nous nous bornerons à énoncer brièvement celles qui ont un rapport plus direct avec la théorie dont nous nous occupons.

1° Les séries ordonnées selon les cosinus ou les sinus des arcs multiples sont toujours convergentes, c'est-à-dire qu'en donnant à la variable une valeur quelconque non imaginaire, la somme des termes converge de plus en plus vers une seule limite fixe, qui est la valeur de la fonction développée.

2° Si l'on a l'expression de la fonction fx qui répond à une série donnée

$$a + b\cos.x + c\cos.2x + d\cos.3x + e\cos.4x + \text{etc.},$$

et celle d'une autre fonction φx, dont le développement donné est

$$\alpha + \beta\cos.x + \gamma\cos.2x + \delta\cos.3x + \varepsilon\cos.4x + \text{etc.};$$

il est facile de trouver en termes réels la somme de la série composée, $a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon + \text{etc.}$, et plus généralement celle de la série

$$a\alpha + b\beta\cos.x + c\gamma\cos.2x + d\delta\cos.3x + e\varepsilon\cos.4x + \text{etc.}$$

que l'on forme, en comparant terme à terme les deux séries données. Cette remarque s'applique à un nombre quelconque de séries.

3° La série (P) (art. 234) qui donne le développement d'une fonction Fx en une suite de sinus et de cosinus d'arcs multiples, peut être mise sous cette forme :

$$\pi F x = \frac{1}{2}\int F\alpha\, d\alpha \begin{matrix} + \cos. x \int F\alpha \cos.\alpha\, d\alpha + \cos. 2x \int F\alpha \cos. 2\alpha\, d\alpha + \text{etc.} \\ + \sin. x \int F\alpha \sin.\alpha\, d\alpha + \sin. 2x \int F\alpha \sin. 2\alpha\, d\alpha + \text{etc.} \end{matrix}$$

α étant une nouvelle variable qui disparaît après les intégrations. On a donc

$$\pi F x = \int_{-\pi}^{+\pi} F\alpha\, d\alpha \left\{ \frac{1}{2} \begin{matrix} + \cos. x \cos.\alpha + \cos. 2x \cos. 2\alpha + \cos. 3x \cos. 3\alpha + \text{etc.} \\ + \sin. x\ \sin.\alpha + \sin. 2x \sin.\ 2\alpha + \sin. 2x \sin. 3\alpha + \text{etc.} \end{matrix} \right\}$$

$$\text{ou}\quad F x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos.\overline{x-\alpha} + \cos. 2\overline{x-\alpha} + \cos. 3.\overline{x-\alpha} + \text{etc.}\right)$$

Donc, en désignant par $\Sigma \cos. i\overline{x-\alpha}$, la somme de la série précédente, prise depuis $i=1$ jusqu'à $i=\frac{1}{0}$, on aura

$$F x = \frac{1}{\pi}\int F\alpha\, d\alpha \left(\Sigma \cos. i\overline{x-\alpha} + \frac{1}{2}\right).$$

L'expression $\frac{1}{2} + \Sigma \cos i\overline{x-\alpha}$ représente une fonction de x et de α telle que si on la multiplie par une fonction quelconque $F\alpha$, et, si après avoir écrit $d\alpha$, on intègre entre les limites $\alpha=-\pi$ et $\alpha=\pi$, on aura changé la fonction proposée $F\alpha$ en une pareille fonction de x multipliée par la demi-circonférence π. On verra par la suite quelle est la nature de ces quantités, telles que $\frac{1}{2} + \Sigma \cos. i\overline{x-\alpha}$, qui jouissent de la propriété que l'on vient d'énoncer.

4° Si dans les équations (M) (N) et (P) (art. 234) qui étant divisées par r donnent le développement d'une fonction fx, on suppose que l'intervalle r devient infiniment grand; chaque terme de la série est un élément infiniment petit d'une intégrale; la somme de la série est alors représentée par une intégrale définie. Lorsque les corps ont des dimensions déterminées, les fonctions arbitraires qui représentent les températures initiales, et qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles, doivent être développées en séries analogues à celles des équations (M), (N), (P); mais ces mêmes fonctions prennent la forme des intégrales définies, lorsque les dimensions des corps ne sont point déterminées, comme on l'expliquera dans la suite de cet ouvrage, en traitant de la diffusion libre de la chaleur.

SECTION VII.

Application à la question actuelle.

236.

Nous pouvons maintenant résoudre d'une manière générale la question de la propagation de la chaleur dans une lame rectangulaire BAC, dont l'extrémité A est constamment échauffée, pendant que ses deux arêtes infinies B et C sont retenues à la température o.

Supposons que la température initiale de tous les points de la table BAC soit nulle, mais que celle de chaque point m de l'arête A soit conservée par une cause extérieure quelconque, et que cette valeur fixe soit une fonction fx de la