**Master de Mathématiques – Sorbonne Université (M1)**

**UE 4MA039 : Histoire d'un objet mathématique**

(Alexandre Guilbaud et Laurent Mazliak)

# Semaine 9

# Fourier et la décomposition des fonctions en séries trigonométriques

# I – Joseph Fourier

Naît en 1768.
Fils d'un tailleur d'Auxerre
Elève à l'école militaire à Auxerre (collège tenu par des Bénédictins; études mathématiques assez poussées // Bonaparte à Brienne) puis destiné à une carrière ecclésiastique : noviciat à l'Abbaye de Saint-Benoît sur Loire

La Révolution le fait quitter l'Abbaye avant ses vœux

1790 : professeur au collège des Bénédictins d'Auxerre

1793 : rejoint le Comité révolutionnaire local au nom du « sublime espoir d'établir entre les hommes un gouvernement sans rois et sans prêtres »

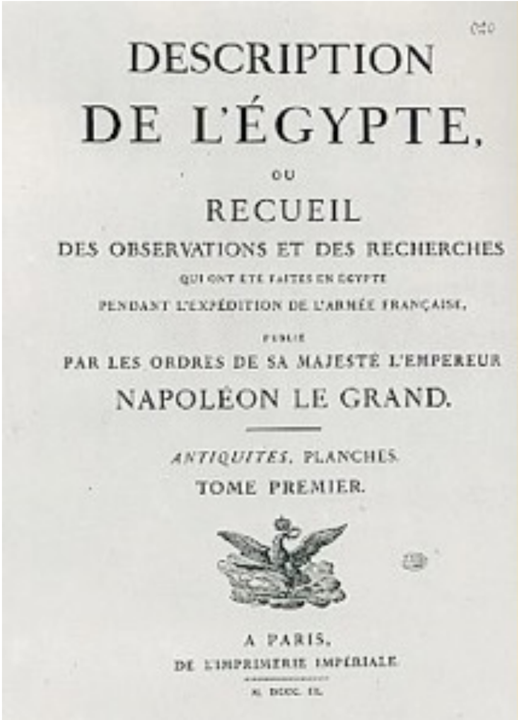
Effrayé par la Terreur : tente de démissionner. Devient suspect à la suite d'un incident à Orléans. Arrêté en Juillet 1794 -> chute de Robespierre le sauve.

1794: revient à Auxerre où il est repéré par Jean-Guillaume Garnier en tournée pour « alimenter » en bons éléments l'Ecole normale supérieure tout juste créée.

1795 : un des premiers auditeurs de l'Ecole Normale Supérieure (carrière d'enseignant) : Lagrange, Laplace, Monge parmi ses professeurs

1797 : nommé à la chaire d'Analyse et Mécanique de l'Ecole Polytechnique (remplace Lagrange)

1798 : Expédition d'Egypte. Y déploie un exceptionnel talent d'organisateur.
Etude de l'Egypte moderne
Fondation de l'Institut du Caire : Fourier nommé secrétaire, chargé de la collecte des découvertes scientifiques de l'expédition



DESCRIPTION
DE L'ÉGYPTE,
OU
RECUEIL
DES OBSERVATIONS ET DES RECHERCHES
QUI ONT ÉTÉ FAITES EN ÉGYPTE
PENDANT L'EXPÉDITION DE L'ARMÉE FRANÇAISE,
PUBLIÉ
PAR LES ORDRES DE SA MAJESTÉ L'EMPEREUR
NAPOLÉON LE GRAND.
ANTIQUITÉS, PLANCHES.
TOME PREMIER.
A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE IMPÉRIALE.
M. DCCC. IX.

Cabinet designed to hold the volumes of the Description de l'Égypte

Anecdote : Fourier en Egypte contracte une maladie chronique qui le rend excessivement sensible au froid.
*« notre confrère se vêtait, dans la saison la plus chaude de l'année, comme ne le sont même pas les voyageurs condamnés à hiverner au milieu des glaces polaires » (Arago)*

1799 : Bonaparte rentre clandestinement en France, abandonnant l'armée et les savants

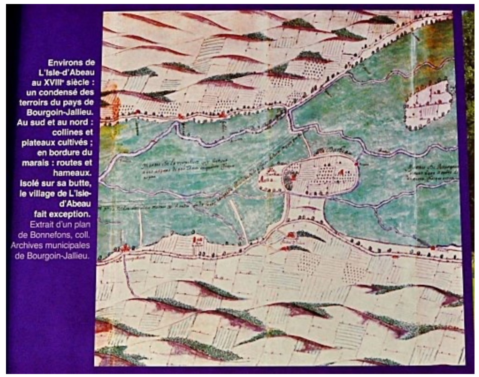
Fourier ne revient qu'en 1801

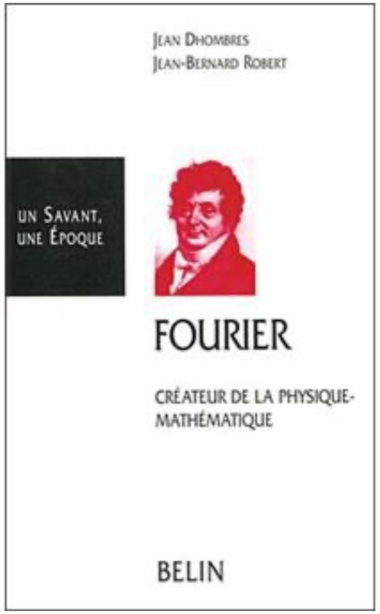
1801 : reprend son poste à l'Ecole Polytechnique

Mais immédiatement nommé Préfet de l'Isère (Grenoble) par Bonaparte : y reste jusqu'à 1815

Assèchement des marais de la Bourbre à Bourgoin-Jallieu

Construction de la route Grenoble-Turin




Quelques compléments sur Fourier : https://www.mathouriste.eu/Fourier/Fourier.html

## II- La théorie de la chaleur

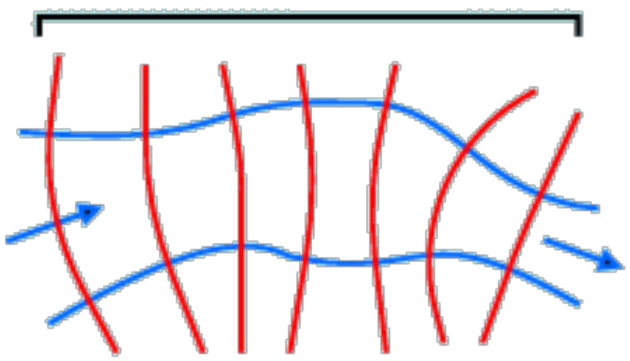
A Grenoble, entreprend des recherches sur la propagation de la chaleur.
Tentative inachevée par Newton (voir l'article de Cheng et Fujii)
Controverse au 18ème siècle : « nature de la chaleur »: Fluide en mouvement? Agitation des composants de la matière?

Fourier ne rentre pas dans ce débat. Il s'intéresse uniquement à la propagation

Part de quelques hypothèses physiques simples :

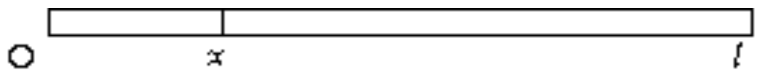
Dans le cas de l'attraction universelle newtonienne (par exemple chute d'un objet sur la terre) le mouvement se fait de façon perpendiculaire aux lignes de niveau (même altitude). La variation de l'énergie potentielle de pesanteur est proportionnelle à la différence d'altitude.

Chaleur se propage dans des sortes de petits « tubes » de section variable mais perpendiculaires aux lignes isothermes (du chaud vers le froid « le plus directement »)



Débit de chaleur *q* proportionnel au gradient de température

# Etude de la variation dans une barre homogène




Barre isolée thermiquement (pas de pertes);
Et homogène: à l'abscisse *x*, sur toute la section *S* même température au temps *t* : *u(x,t)*

Flux en *x* par unité de temps : $q = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}S$

Chaleur présente entre t et t+dt dans l'élément [x,x+dx]:

$$dq = kS[\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)]dt \approx kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdt$$

Principe de conservation : c'est aussi l'apport de chaleur mesuré par le changement de température en x

$$dq = c\rho S dx[u(x,t+dt) - u(x,t)] \approx c\rho S dx\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dt$$

( ρ = densité de la barre, *c* = capacité calorifique)
En égalisant

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Généralisation dans un solide « quelconque »: (en posant $\Delta T = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(T)) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ )

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K.\Delta T \qquad \text{équation de la chaleur}$$

Fourier s'intéresse aux « ondes de chaleur » qui traversent la tige en maintenant à chaque instant la température constante aux extrémités. Il propose une méthode de résolution de l'équation.

Résolution (en dimension 1) :

$$\frac{\partial}{\partial t} T = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} T$$

Conditions initiales

$$T(x,0) = f(x), \forall x \in [0, L] \qquad T(0,t) = 0 = T(L,t), \forall t > 0$$

Solution sous forme produit :

$$T(x,t) = X(x)Y(t)$$

Equation devient :

$$\frac{Y'(t)}{K.Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Et donc on a

$$Y'(t) = -\lambda.K.Y(t), X''(x) = -\lambda X(x)$$

Les conditions initiales imposent $\lambda > 0$ et la solution s'écrit

$$X(x) = B \sin(\sqrt{\lambda} x) + C \cos(\sqrt{\lambda} x) \qquad Y(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda K t}$$

Les conditions initiales amènent : $C = 0$ et $\sqrt{\lambda} = n.\frac{\pi}{L}$

En décomposant f en série trigonométrique : $$f(x) = T(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

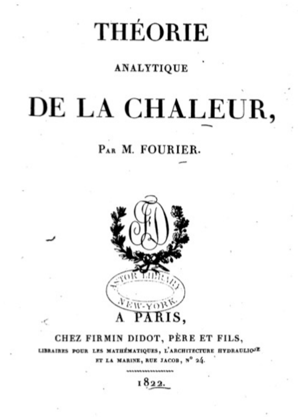
Solution générale obtenue comme superposition de telles solutions (équation linéaire):

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{L} \mathrm{e}^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}}$$

## // cordes vibrantes : superposition de fonctions périodiques

*« Si l'ordre qui s'établit dans tous les phénomènes de propagation de la chaleur pouvait être saisi par nos sens ces phénomènes nous causeraient une impression comparable à celle des résonances harmoniques. »*

Théorie Analytique de la Chaleur




Achevée en 1807

Présentée à l'Académie mais écartée par Lagrange et Laplace pour « manque de rigueur »

Néanmoins (!) 1811 : Fourier reçoit le prix de l'Académie pour le mémoire sur la chaleur

Publication : 1822

*Il résulte de mes recherches sur cet objet que les fonctions arbitraires même discontinues peuvent toujours être représentées par les développements en sinus ou cosinus d'arcs multiples, et que les intégrales [des équations aux dérivées partielles] qui contiennent ces développements sont précisément aussi générales que celles où entrent les fonctions arbitraires d'arcs multiples. Conclusion que le célèbre Euler a toujours repoussée. (Fourier, 1805)*

Généralisation : toute fonction $f$ sur l'intervalle $[-a, a]$

peut se décomposer en une somme $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(\frac{n\pi x}{a}) + b_n \sin(n\frac{\pi x}{a})\right)$

Idée : si on peut « résoudre » $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(\frac{n\pi x}{a}) + b_n \sin(n\frac{\pi x}{a})\right)$

i.e. si on peut trouver $(a_n), (b_n)$ à partir de $f$ : c'est bon

1ère idée : partir du développement en série entière.

2ème idée : propriétés des intégrales des fonctions trigonométriques

Questionnement : intégration d' une fonction générale

remarque est importante, en ce qu'elle fait connaître comment les fonctions entièrement arbitraires peuvent aussi être développées en séries de sinus d'arcs multiples. En effet, si la fonction $\varphi x$ est représentée par l'ordonnée variable d'une courbe quelconque dont l'abscisse s'étend depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, et si l'on construit sur cette même partie de l'axe la courbe trigonométrique connue, dont l'ordonnée est $y = \sin. x$; il sera facile de se représenter la valeur d'un terme intégral. Il faut concevoir que pour chaque abscisse $x$, à laquelle répond une valeur de $\varphi x$, et une valeur de $\sin. x$, on multiplie cette dernière valeur par la première, et qu'au même point de l'axe on élève une ordonnée proportionnelle au produit $\varphi x . \sin. x$. On formera, par cette opération continuelle, une troisième courbe, dont les ordonnées sont celles de la courbe trigonométrique, réduite proportionnellement aux ordonnées de la courbe arbitraire qui représente $\varphi x$. Cela posé, l'aire de la courbe réduite étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, donnera la valeur exacte du coëfficient de $\sin. x$; et quelle que puisse être la courbe donnée qui répond à $\varphi x$, soit qu'on puisse lui assigner une équation analytique, soit qu'elle ne dépende d'aucune loi régulière, il est évident qu'elle servira toujours à réduire d'une manière quelconque la courbe trigonométrique; en sorte que l'aire de la courbe réduite a, dans tous les cas possibles, une valeur déterminée qui donne celle du coëfficient de $\sin. x$ dans le développement de la fonction. Il en est de même du coëfficient suivant $b$ ou $\mathbf{S}(\varphi x . \sin. 2x\, dx)$.

Mais : interversion série intégrale jamais en question.

*L'analyse mathématique a des rapports nécessaires avec les phénomènes sensibles; son objet n'est point créé par l'intelligence de l'homme; il est un élément préexistant de l'ordre universel et n'a rien de contingent et de fortuit; il est empreint de la nature .*

*L'analyse mathématique a devancé les observations; elle supplée à nos sens et nous rend en quelque sorte témoins des mouvements réguliers et harmoniques de la chaleur à l'intérieur des corps.*

*Nos sens nous avertissent des propriétés physiques des corps mais ils ne les mesurent point; les instruments ont, en général, pour objet d'ajouter à nos facultés intellectuelles en perfectionnant nos sens.*

*L'analyse mathématique, science sublime, qui, en nous découvrant les lois générales du mouvement et celles de la chaleur, explique tous les grands phénomènes de l'univers et qui éclaire la société civile dans ses usages les plus importants.*

*(Fourier: théorie de la Chaleur. Introduction, 1822)*

Fourier en physicien centré sur la *mesure.* Réinvestissement dans la « *Science du Préfet* ». Très importante œuvre statistique (au sens strict) : collectes de  données pour le gouvernement.

Participe  aux recherches statistiques sur le département de la Seine

Gaspard de Chabrol (1773-1843)

Polytechnicien (major de la première promotion de 1795); suit Bonaparte en Egypte  où il rétablit le canal d'Alexandrie au Nil (// plus tard canal de l'Ourcq); avec Fourier en Haute Egypte en 1799

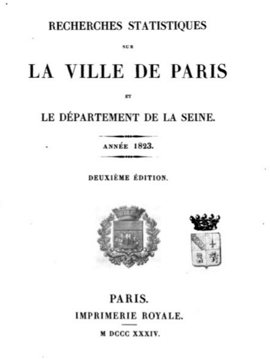
Publie à son retour à Paris : *Sur les mœurs et les usages des Égyptiens modernes*

Préfet en 1806 du département de Montenotte, puis de la Seine en 1812. Maintenu à son poste à la Restauration.

Gigantesque entreprise de collecte de données sur tous les aspects de la vie sociale : naissances, décès, maladies mais aussi recettes des théâtres, fréquentation des institutions d'enseignement .

Fourier : mémoire sur les erreurs de mesure

Tout en étant un déterministe convaincu anticipe la vision statistique de la génération suivante (Quetelet : homme moyen. *Physique sociale*)



RECHERCHES STATISTIQUES

LA VILLE DE PARIS

LE DÉPARTEMENT DE LA SEINE.

ANNÉE 1823.

DEUXIÈME ÉDITION.

PARIS.

IMPRIMERIE ROYALE.

M DCCC XXXIV.