21 décembre 2014

LINES ON THE HORIZON

HADAMARD AND FRÉCHET, READERS OF VOLTERRA

ANGELO GUERRAGGIO

Dipartimento di Economia. Università degli Studi dell'Insubria. Varese, Italia

FRÉDÉRIC JAËCK

Laboratoire SPHERE. Université Paris Diderot. Paris, France

LAURENT MAZLIAK

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires. Université Pierre et Marie Curie. Paris, France

Résumé. Dans ce chapitre, nous examinons en détail la manière dont Hadamard et Fréchet ont puisé dans les travaux de Volterra sur la généralisation de la notion de fonction et du calcul différentiel des éléments décisifs pour leur propre programme de recherche, et comment ce passage de témoin a été un moment décisif pour l'évolution des études sur les équations aux dérivées partielles et plus largement pour toute l'analyse fonctionnelle au 20e siècle.

Introduction

Le chapitre que nous présentons ici concerne un aspect très spécifique des relations entre mathématiciens français et italiens au tournant des 19e et 20e siècles, et s'articule autour des travaux de Vito Volterra (1860-1940). Cette figure emblématique de la scène scientifique italienne a déjà fait l'objet de très nombreuses études, et notamment de deux importantes biographies ([40] et [42]. Cette omniprésence du mathématicien dans les travaux historiques qui examinent la vie scientifique, et même plus généralement intellectuelle, italienne des décennies suivant l'unification montre le rôle central qui fut alors celui de Volterra. Né au moment même de l'unité politique de la nation italienne, Vito Volterra peut à bon droit être considéré comme un personnage synthétisant à lui seul les aspirations et les transformations auxquelles la jeune Italie se confrontait, à un moment où elle voulait revendiquer sa place dans le concert scientifique européen. Les progrès dans cette direction avaient été fulgurants dès le Risorgimento et, dans les années suivant la défaite française de 1870 et la montée en puissance de l'Allemagne, les inquiétudes d'un Darboux écrivant à Houël que si les choses continuaient, les Italiens allaient aussi dépasser les Français sur la scène mathématique (voir [39]), ne semblaient pas être irréalistes.

Sous la houlette de mathématiciens d'envergure comme Enrico Betti (1823-1892) et Ulisse Dini (1845-1918), diverses institutions prirent leur envol dans le pays, telle la Scuola Normale Superiore de Pise où le jeune Volterra fut formé et où il put apprendre les plus récents développements des mathématiques et de la physique venant de tous horizons, notamment d'Allemagne. Dini avait beaucoup travaillé à la suite des travaux de Dirichlet, de Riemann et de leurs successeurs sur les propriétés des fonctions d'une variable réelle. Son magistral traité [22] inaugurait une nouvelle phase dans le mouvement qui tendait à se focaliser sur les fonctions comme objet d'étude de plus en plus autonome. Grâce aux travaux de Dini, certaines familles de fonctions se caractérisaient à travers des propriétés liées à l'existence de limites, à l'intégrabilité au sens de Riemann, à la dérivabilité dans différentes acceptions etc.

Volterra, lecteur de son maître Dini, avait donc à sa disposition une définition suffisamment stable de la notion de fonction, et des ébauches de classes regroupant ces objets par affinité. Ces classes, qui préfiguraient certaines structures algébriques, lui permirent de considérer les fonctions comme des éléments variables sur lesquels travailler notamment de façon infinitésimale. Ces idées furent utiles au tout jeune Volterra pour repenser des questions de Physique mathématique et de Mécanique où apparaissaient naturellement des dépendances par rapport à une collection infinie de paramètres composant une fonction. Dans la première partie de ce chapitre, cette histoire est retracée dans ses principales étapes. On y décrit en particulier comment le jeune savant se prit au jeu d'une construction mathématique qui suivait son propre mouvement de croissance et ne se préoccupait plus des questions appliquées qui l'avaient inspiré. Volterra en quelques mois publia de nombreux articles introduisant deux notions, les fonctions dépendant de fonctions, et en quelque sorte son pendant géométrique, les fonctions de lignes. Il construisit aussi tout un ensemble de techniques permettant la manipulation de ces objets et la formation d'équations dont ils étaient solutions. La naissance du calcul fonctionnel, comme il sera désigné par la suite, fut une étape décisive dans la transposition à des situations plus sophistiquées de méthodes infinitésimales qui semblaient réservées au cas originel des fonctions numériques d'une variable réelle.

Ce qui nous concerne ici avant tout est la façon dont deux mathématiciens français, Jacques Hadamard (1865-1963) et Maurice Fréchet

(1878-1973), furent amenés à entrer en contact avec ces travaux de Volterra, à les prendre à leur compte, à les développer et même, dans le cas de Fréchet, à les critiquer et les dépasser dans une certaine mesure sur leur propre terrain. Les deux personnages relèvent de deux générations successives et l'aîné appartenait à celle de Volterra. Leurs trajectoires nous intéressent entre autres par la singularité du tandem qu'ils formèrent par rapport à leur collègue italien. Hadamard et Fréchet, nous le mentionnerons, se trouvaient dans une relation de maître et de disciple et ce positionnement eut comme conséquence que l'un et l'autre déclinèrent leur lecture des travaux de Volterra dans des modes différents.

La lecture d'Hadamard est l'objet de la deuxième partie du chapitre. Elle s'inscrivit dans le vaste programme de recherche sur les Équations aux Dérivées Partielles (EDP dans la suite) qu'Hadamard inaugura dans les années 1890 à l'occasion de son arrivée à Bordeaux, et notamment de sa rencontre avec Pierre Duhem (1861-1916). Ce n'est pas, loin s'en faut, la première fois que le duo Volterra-Hadamard est étudié pour souligner son importance dans l'étude des EDP qui avaient envahi la physique dans la deuxième moitié du 19ème siècle, notamment à la suite des travaux de Riemann sur les ondes de choc. Citons en particulier la volumineuse biographie scientifique de Maz'ya et Shaposhnikova [71] et surtout le chapitre de Jeremy Gray [41] qui présente une étude détaillée des rôles respectifs de Poincaré, Volterra et Hadamard dans cette histoire. L'objet de notre partie est beaucoup plus modeste qu'un tel tableau panoramique et se concentre sur le passage de témoin entre Volterra et Hadamard. Pour l'exprimer sous forme de boutade, Gray mentionne (p.127) que reprenant les travaux de Volterra sur les fonctions de ligne, "son ami Hadamard" introduisit le terme de *fonctionnelle*. Or ce terme trop statique d'amitié recouvre une sensible progression dans les rapports des deux hommes qui est intéressante à suivre en cela qu'elle est fortement corrélée avec le programme de recherche d'Hadamard en physique mathématique. Ce point nous semble une illustration probante d'une des hypothèses que cet ouvrage défend, à savoir que les mathématiciens français ont dû regarder de plus en plus attentivement les travaux qui se faisaient de l'autre côté des Alpes. Nous tentons de ce fait un récit assez détaillé de la construction du programme d'Hadamard et de la manière dont son élaboration progressive le mit en rapport avec Volterra. En fait, comme on le verra, c'est plus largement les travaux de nombreux mathématiciens italiens qui vont à ce moment irriguer des recherches françaises sur ces thématiques. Les considérations de Volterra sur les fonctions de lignes et leur calcul différentiel ne furent repérées que dans un deuxième temps par Hadamard comme pouvant lui fournir des outils pour résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles où les conditions initiales subissent une déformation dans le temps comme dans certaines situations ondulatoires. Nous examinerons dans cette partie les circonstances originales de la rencontre entre les deux mathématiciens qui apprirent à se connaître et à s'estimer progressivement d'un congrès international à l'autre, de Zurich en 1897 à Heidelberg en 1904 où commença leur relation personnelle proprement dite.

Pour le cas de Fréchet, la situation se présenta très différemment. Au moment où il entre en contact avec Volterra, il est un jeune étudiant tout frais émoulu de l' École Normale Supérieure. Conseillé par son mentor Hadamard, et soutenu par Émile Borel (1871-1956), grand ami de Volterra depuis le congrès de Zürich, Fréchet vint chercher un sujet de thèse auprès du mathématicien italien. La correspondance qui s'inaugura à ce moment là montre qu'il tenta alors pendant quelques mois de s'inscrire dans les pas de ce dernier. Nous tenterons de décrire comment rapidement le jeune homme se démarqua fortement de cette orientation initiale pour suivre sa propre voie d'une originalité radicale, voie dont la modernité dérouta quelque peu plusieurs de ses contemporains. Explosant le cadre proposé par Volterra autour des classes de fonctions, Fréchet introduisit une vision topologique des espaces abstraits et un calcul différentiel général qui devint le cadre naturel des développements ultérieurs en Analyse fonctionnelle, reléguant Volterra au rang de pionnier, ce qui n'alla d'ailleurs pas sans quelques heurts comme nous le verrons.

La réflexion autour de la naissance de l'Analyse fonctionnelle et du rôle de Volterra n'est certes pas nouvelle. La thèse très complète [80] avait ainsi fait une étude approfondie du sujet dès les années 1980. Encore tout récemment, dans une autre direction, l'article [7] apporte une contribution importante sur les liens entre l'Analyse fonctionnelle, les équations intégrales et les opérateurs à noyaux introduits par Fredholm tels qu'ils furent étudiés en France et en Italie à l'époque dont nous parlons ici-même et Volterra joua là aussi un rôle central. Notre article apporte cependant un certain nombre de compléments à ces études, en insistant sur la lecture de Volterra par ses deux collègues français, mais aussi en mettant en relief un réseau de contributions italiennes ou françaises au débat qui n'ont pas forcément été éclairées par la perspective choisie par d'autres historiens. On notera par exemple avec curiosité que l'histoire décrite dans [7] présente d'étroites parentés avec les sujets dont nous allons parler, mais comprend aussi des aspects qui ne les intersectent en rien (et réciproquement), dévoilant comment le bouillonnement de recherches autour des espaces de fonctions au début du 20ème siècle a pu susciter des voies d'exploration étonnamment indépendantes. Celles que nous décrirons dans cet article nous paraissent être celles où l'influence directe des travaux de Volterra sur des mathématiciens français fut la plus forte et la plus décisive.

1. Vito Volterra : des outils d'Analyse au service de la Physique mathématique

1.1. *Physique mathématique et Analyse rigoureuse*

Vito Volterra a un peu plus de 25 ans quand il publie aux *Rendiconti dell'Academia dei Lincei* une note [96] –présentée par Betti– qui marque le début de ses recherches en Analyse Fonctionnelle et introduit un concept central dans son œuvre, la notion de "fonction qui dépend d'autres fonctions". On peut à bon droit penser que cette publication marque un moment singulier de l'histoire des mathématiques du 19ème siècle. Elle sera d'ailleurs souvent identifiée, même par les acteurs de l'époque, comme l'acte fondateur d'une science nouvelle. Volterra venait de soutenir sa thèse *di Laurea* en Hydrodynamique sous la direction de Betti à l'École Normale de Pise.

C'est dans cette période que s'entreprenait le grand mouvement de transfert de la rigueur de l'Analyse allemande dans les mathématiques italiennes, notamment à travers la traduction des œuvres de Riemann, sous l'impulsion de Betti et Dini. Le premier se concentra surtout sur les questions touchant aux variables complexes tandis que le second travailla essentiellement l'analyse réelle.

Durant les deux années passées à l'Ecole Normale, le jeune Volterra avait été séduit par les leçons de Dini (qui avait publié en 1878 son livre fondamental sur la théorie des fonctions d'une variable réelle (*Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*) et les premières publications de Volterra laissent clairement filtrer l'influence de celui-ci. En 1881, alors qu'il est encore étudiant à l'École Normale, Volterra publie deux articles ([90], [91]) dont les titres sont évocateurs, *Quelques observations sur les fonctions ponctuelles dicontinues* et *Sur les principes du calcul intégral* tous deux publiés au *Giornale di Matematica.*

Il y précise ce que l'on peut entendre par la petitesse d'un ensemble et donne un exemple de sous-ensemble de $\mathbb{R}$ nulle part dense qui est pourtant de mesure non nulle. Il exhibe en outre des fonctions dérivables dont la dérivée, quoique bornée, n'est pas intégrable au sens de Riemann, prouvant ainsi qu'en général intégration et dérivation ne sont pas des opérations inverses l'une de l'autre. Comme on le voit, le brillant élève Volterra montrait qu'il avait bien saisi la nature de certaines questions centrales de l'analyse du 19ème siècle mises à jour par Dirichlet, Riemann et leurs héritiers à partir de leurs études sur les séries trigonométriques [1].

Mais, après ces notes de 1880 et 1881, Volterra n'interviendra plus sur ces questions qui touchent aux fondement de l'Analyse réelle et il préfèra se tourner vers l'étude des fonctions de la variable complexe et

[1] Pour cette histoire capitale pour le développement de l'intégration, on pourra se reporter au bel ouvrage de Hawkins [58].

des équations différentielles. Dans les années qui suivent sa *Tesi di laurea*, Volterra publiera de nombreux articles de Physique mathématique qui attestent de la présence et de l'influence de Betti dans le choix de ses sujets de recherche.

L'étude fine de la théorie de l'élasticité de Gabriel Lamé (1795-1870) [64] sur laquelle nous reviendrons dans la partie suivante, donna l'occasion à Volterra de publier son article le plus connu de cette époque ([92]).

Lamé avait traité la propagation de la lumière dans les milieux biréfringents en faisant l'hypothèse que le rayon incident se partage en deux rayons polarisés qui vibrent dans des plans perpendiculaires. Vingt ans plus tard, Sonya Kowalievskaya reprenait en la critiquant la méthode de Lamé dans un article publié à *Acta Mathematica* en 1886 ([63]). Peu après la mort de la mathématicienne, Volterra remarqua une erreur dans l'approche de Kowalievskaya qui n'avait pas tenu compte de la discontinuité d'un des paramètres. Il corrigea la faute en fournissant dans son article le bon système différentiel pour l'onde lumineuse ([20], p.173 et seq.)[2].

1.2. *Équations différentielles et fonctions de lignes*

Les deux années 1887 et 1888 s'avérèrent particulièrement fécondes pour Volterra. Elle virent en effet la publication de plusieurs ensembles comportant chacun une série d'articles, qui montrent l'originalité de sa pensée et l'autonomie grandissante qu'il acquérait par rapport à l'enseignement de ses maîtres Dini et Betti.

Mentionnons d'abord les trois articles [93], [94] et [95] qui marquent le développement d'une théorie des équations différentielles linéaires à proprement parler. On doit noter en ce cas la nette orientation prise par Volterra vers la physique mathématique. Les arguments des articles mentionnés ne se fondent plus sur l'examen de situations physiques concrètes mais sur une analyse strictement mathématique.

Plus central pour notre propos, pendant la même année 1887, Volterra publie aussi trois notes [96], [97] et[98] où il introduit le concept de *fonction qui dépend d'autres fonctions* afin d'étudier les quantités qui dépendent de toutes les valeurs qu'une ou plusieurs fonctions d'une variable peuvent prendre sur un intervalle donné. Volterra utilise l'expression *fonction qui dépend d'autres fonctions*, et précise bien dans son texte qu'il ne s'agit pas ici de *fonction de fonction*, c'est-à-dire d'une fonction obtenue par composition de fonctions comprises au sens

[2]Cette publication fut l'occasion pour Volterra de commencer une importante correspondance avec Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) qui avait fondé le journal Acta Mathematica en 1882 qu'il dirigea avec énergie pendant 45 ans. L'étude de cette correspondance (voir [72]), abondante dans les années 1888-1892, offre un tableau très vivant de l'activité débordante du jeune Volterra.

de Dirichlet. Volterra insiste sur le fait essentiel que la notion de *fonction qui dépend d'autres fonctions* distribue deux rôles différents aux éléments en jeu. Une telle fonction a comme variable des fonctions, ces dernières gardant en quelque sorte un caractère général et indéterminé propre à la nature de la variable. Par simplicité, nous utiliserons le mot *fonctionnelle* (qui sera introduit par Hadamard comme nous le verrons dans la partie suivante) pour nommer le concept de Volterra. L'obstination de Volterra à indiquer la variable x dans ses expressions impliquant la fonction variable φ –écrite donc systématiquement $\varphi(x)$– indique bien combien cette notion de fonction variable était encore balbutiante pour lui. Cela crée d'ailleurs des difficultés pour un lecteur habitué à la présentation moderne. Ces fluctuations de langage et de notation nous rappellent que l'Analyse fonctionnelle n'est pas encore née en tant que domaine identifié à cette époque et prouvent combien la forme abstraite qu'elle reçut au 20e siècle a permis de synthétiser les concepts introduits par Volterra et d'autres –la troisième partie de notre article consacrée à Fréchet concerne d'ailleurs les premiers pas de cette spectaculaire synthèse. Pour Volterra, le domaine d'une fonctionnelle, c'est-à-dire l'ensemble des éléments sur lesquels l'opération agit, n'est pas un ensemble général mais est systématiquement constitué de la classe des fonctions d'une variable qui sont toutes continues sur un intervalle $[A, B]$. La notion de métrique uniforme sur un espace abstrait n'est pas encore dégagée (elle le sera là encore par Fréchet) et la distance entre deux fonctions est exclusivement donnée par une propriété de borne supérieure héritée de Cauchy et Weierstrass. Ainsi, une fonctionnelle y est dite *continue*[3]

> si, faisant varier $\varphi(x)$ d'une variation $\psi(x)$ telle qu'en valeur absolue $\psi(x)$ soit toujours inférieure à ϵ, la variation correspondante de y peut être rendue inférieure à σ arbitrairement petit. [96, p.296]

L'objectif principal des trois notes de 1887 sur les fonctions de fonctions est d'étendre aux fonctionnelles le concept de dérivée puis de différentielle. Plus précisément, le paragraphe central de la première note [96] s'appuie sur la notion de variation d'une fonction qui dépend d'une autre fonction et désigne par le symbole σ le terme de premier ordre de la variation Δ de y pour une petite variation de la variable (qui est ici une fonction). Il est significatif que cette démarche s'inscrive dans l'évolution générale de l'analyse à un moment où les mathématiciens tentent de définir un calcul différentiel pour les fonctions de plusieurs variables réelles qui présente la plus grande analogie possible avec celui

[3]Il faut insister ici sur la portée de cet énoncé auquel il ne faut pas donner une généralité qui ne sera dégagée que plus tard. Les termes employés par Volterra visent à définir la continuité de la fonctionnelle dans le cas des fonctions continues sur $[ab]$. En d'autres termes l'ensemble des fonctions continues ne doit pas être pensé ici comme un archétype d'espace abstrait plus général.

que l'on connait à l'époque pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Conformément à ce qui se fait dans ces travaux des dernières décennies du 19e siècle, Volterra ne cherche pas à partir précisément d'une notion de différentielle ou de fonction différentiable mais plutôt à généraliser les formules classiques $df(x) = f'(x)dx$ et $df(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum f'_{x_i} dx_i$ que l'on connait pour les fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

Un de ses principaux résultats est de ce fait de montrer que sous des conditions raisonnables sur la fonctionnelle y définie sur l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[A, B]$, sa variation peut s'exprimer comme une intégrale du type[4]

$$\delta y[\varphi(x)] = \int_A^B y'[\varphi(x), t]\delta\varphi(x)dt$$

où l'on devine précisément l'analogie avec les formules correspondantes en analyse réelle et la façon de les généraliser. L'opération d'intégration généralise la somme utilisée dans l'expression de la différentielle rappelée plus haut, δy représente la variation de la fonctionnelle y engendrée par la variation $\delta\varphi$ de la variable indépendante, et y' dénote ce que Volterra nomme la *dérivée fonctionnelle* de y.

Les conditions *ad hoc* proposées par Volterra pour permettre la démonstration de sa formule intégrale sont assez clairement inspirées par les méthodes analytico-géométriques du calcul des variations consistant à créer une perturbation localisée. Considérons, dit Volterra, un sous-intervalle $[m, n]$ de $[A, B]$ et une variation θ de la fonction variable φ telle que $0 \leq \theta(x) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [m, n]$. On pose $\int_m^n \theta(x)dx = \sigma$ qui représente donc l'aire comprise entre le graphe de φ et celui de $\varphi + \theta$. Enfin δy représente la variation $y(\varphi + \theta) - y(\varphi)$ et h est la longueur de l'intervalle $[m, n]$.

Volterra fait alors quatre hypothèses :

(1) $\frac{\delta y}{\epsilon h}$ est toujours inférieur à une constante M.
(2) Si ϵ et h tendent vers 0, de telle sorte que l'intervalle $[m, n]$ contienne toujours le point t, le rapport $\frac{\delta y}{\sigma}$ tend vers une limite finie, notée $y'[\varphi(x), t]$, et nommée *dérivée fonctionnelle* de y.
(3) Cette limite est uniforme par rapport aux choix possibles pour φ et t.
(4) $\varphi \mapsto y'[\varphi(x), t]$ et $t \mapsto y'[\varphi(x), t]$ sont continues.

[96, p.296]

La publication de l'article [96] constitue à coup sûr un jalon dans le développement de l'analyse fonctionnelle. A partir d'un nouveau concept mathématique, Volterra construisit pour la première fois un

[4]Volterra introduit en 1887 la notation $y|[\varphi(x), t]|\,_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$ que nous allégerons en $y[\varphi(x), t]$ dans notre commentaire.

nouveau calcul différentiel qui lui permettait d'envisager des dérivées d'ordres supérieurs et d'arriver à une formule de Taylor dans ce cadre général. Volterra reviendra régulièrement sur son système d'hypothèses dont le cadre présenté dans [96] était encore provisoire. A part des ambiguïtés dans le choix du symbolisme et de la terminologie que nous avons soulignées, on note la nécessité que l'accroissement $\theta(x)$ que l'on fait subir à la fonction φ soit toujours de signe constant, condition qui disparaîtra au cours des publications successives de Volterra. De même la quatrième hypothèse évoluera en la condition plus forte, mais naturellement vérifiée dans certaines situations typiques, que la dérivée y' soit uniformément continue, ce qui permet de donner une démonstration plus simple du résultat. Cette propriété deviendra d'ailleurs l'hypothèse canoniquement proposée pour garantir l'existence de la dérivée première d'une fonctionnelle. Dans leur ouvrage de référence de 1936 ([119]), Pérès [5] et Volterra font d'ailleurs remarquer qu'ils prouvent le résultat de représentation sous des conditions qui ne sont évidemment pas les plus larges possibles. Une autre observation qu'il convient de faire, c'est que Volterra ne se préoccupe pas de l'indépendance de la dérivée première de la fonctionnelle par rapport au choix particulier de θ. Comme on l'a dit, dans [96] le but essentiel n'est pas d'étudier les propriétés formelles de la différentielle ou de préciser la classe des fonctions différentiables mais de chercher à établir un théorème de représentation de la variation et c'est à cette occasion qu'est introduite une notion de dérivabilité. Elle sera considérablement étendue dans les travaux ultérieurs de Fréchet que nous examinerons plus loin[6].

Nous avons mentionné que le théorème de représentation était valide sous certaines hypothèses. La seconde note de Volterra sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions ([97]) cherche à relaxer ces contraintes et se concentre particulièrement sur les fonctionnelles pour lesquelles les conditions du premier article ne sont pas toutes satisfaites en des points t exceptionnels. Ainsi Volterra note qu'il peut arriver dans certains cas qu'autour de certains points du segment $[A, B]$, l'hypothèse 1 de la note précédente qui exigeait que la variation de la fonctionnelle

[5] Sur Joseph Pérès (1890-1962), on pourra consulter [70].

[6] Ces questions de représentation se poseront aussi à l'occasion de travaux spécifiques dans le cadre du calcul fonctionnel comme dans le cas des études de René Gateaux (1889-1914) puis de Paul Lévy (1886-1971) en théorie du potentiel, introduisant une notion de différentielle engendrée par une variation de la variable indépendante dans une direction ψ donnée. Sur ce chapitre passionnant qui relie le calcul fonctionnel et la théorie des probabilités, on pourra consulter [68] et [9]. On verra d'ailleurs dans [9] qu'au moment où Lévy commença une correspondance avec Fréchet au lendemain de la Première Guerre mondiale, il ne manqua pas d'être très critique sur le cadre trop étroit proposé par Volterra pour la dérivation d'une fonctionnelle à des ordres supérieurs. Plus jeune de presque trente ans, Lévy ne pouvait probablement pas avoir pleinement conscience de la nouveauté radicale de l'approche de son aîné quand elle parut.

soit un infinitésimal d'ordre supérieur ou égal à ϵh ne soit pas vérifiée. Les trois cas examinés par Volterra, pour lesquels cette hypothèse n'est pas satisfaite, permettent de confirmer que la formule de représentation de la différentielle établie dès le départ reste valide, en ajoutant éventuellement des termes qui dépendent des points exceptionnels. Nous reviendrons dans la troisième partie sur ce point qui fut à l'origine d'une dispute entre Volterra et Fréchet au sujet de la généralité de la théorie des fonctionnelles.

La troisième note [98] s'attarde sur des questions particulières, lorsque la fonctionnelle ou sa dérivée a une forme spécifique où est précisée la dépendance par rapport à la variable φ ou ses dérivées en des points donnés. Volterra examine notamment le cas où il existe une fonction F telle que $y'|[\varphi(x), t]| = F(\varphi(t))$ ou celui où $y|[\varphi(x)]| = \int_A^B \int_A^B F(\varphi(t), \varphi(t_1))dt_1$. Il étudie aussi le cas où on se donne une équation différentielle ordinaire

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(m)}(x)\right) = 0$$

où φ est une fonction donnée ainsi que les conditions initiales

$$y(A), y'(A), \ldots, y^{(n-1)}(A);$$

on considère alors la fonctionnelle Y qui à φ associe la valeur en B de la solution associée à φ. Comme le fait observer Volterra, cette valeur dépend de celles de φ sur tout l'intervalle $[A, B]$. Se pose alors la question de la dérivée de cette fonctionnelle que Volterra obtient à travers la résolution d'une équation auxiliaire.

La considération de fonctionnelles particulières sous forme d'intégrales ou données comme solutions d'équations différentielles donne un premier aperçu des motifs qui ont conduit Volterra à introduire le concept de fonctionnelle. Ses motivations initiales étaient bien celles d'un physicien-mathématicien. Mais il découvrit derrière la nouvelle notion mathématique qu'il introduisait et le calcul qu'elle permettait d'élaborer des outils essentiels pour poser d'autres problèmes d'analyse. Volterra sembla d'ailleurs surpris de constater comment l'idée qui est à la source de la notion de fonctionnelle permettait de réexaminer certains chapitres classiques des mathématiques et se trouvait déjà présente dans certaines observations et expériences élémentaires de la physique où l'on cherche à cerner la dépendance en certains paramètres continus. Il n'est donc pas surprenant que la première note s'ouvre sur une vision optimiste où Volterra déclare qu'il va présenter

> certaines considérations qui servent à éclairer des concepts que je pense nécessaire d'introduire pour une extension

> de la théorie de Riemann sur les fonctions d'une variable complexe, et que je pense susceptibles de se montrer utiles aussi dans diverses autres recherches [7] [96, p.294]

Et quelques lignes plus loin on peut lire :

> en fait dans beaucoup de questions de physique et de mécanique, ainsi que dans l'intégration des équations aux dérivées partielles, il se peut qu'on doive considérer des quantités qui dépendent de toutes les valeurs qu'une ou plusieurs fonctions d'une variable prennent dans des intervalles donnés (...). Ainsi par exemple la température en un point d'une lame conductrice dépend de toutes les valeurs que la température prend sur le contour (...) [8] [96, p.294]

La prévision des applications possibles de la notion de fonctionnelle, que Volterra présente dès sa première note [96] se concrétisera effectivement dans quelques unes des recherches qu'il développe les années suivantes. En général il n'y est pas fait directement référence aux fonctions qui dépendent d'autres fonctions, mais à leur version géométrique –les *fonctions de lignes*– que Volterra étudie dans deux notes publiées la même année 1887 aux *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* ([99],[100]).

La motivation de l'étude des fonctions de lignes est ici similaire à celle qui tend généralement à associer à chaque concept d'analyse une représentation géométrique[9]. Comme l'écrit Volterra

> L'utilité de la représentation géométrique du domaine de variabilité d'une fonction est bien connue (...). On peut obtenir une image géométrique du même genre pour

[7] alcune considerazioni le quali servono a chiarire dei concetti che credo necessari introdurre per una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse, e che penso possano tornar giovevoli anche in varie altre ricerche.

[8] infatti in molte questioni di Fisica e di Meccanica, e nella integrazione di equazioni differenziali alle derivate parziali, capita di dover considerare delle quantità che dipendono da tutti i valori che una o più funzioni di una variabile prendono in dati intervalli (...) . Così per esempio la temperatura in un punto di una lamina conduttrice dipende da tutti i valori che la temperatura ha al contorno (...)

[9] La notion de *ligne* recouvre plusieurs aspects qui seront évoqués à travers les textes de Volterra dans ce qui suit. Bien qu'à l'époque la *ligne* puisse être interprétée comme une fonction à valeurs dans le plan, avec plus ou moins de propriétés et de régularité, Volterra ne fait que très peu appel à cette version paramétrique. Pour lui la ligne est essentiellement manipulée comme un objet géométrique et presque physique pour lequel il va définir une opération d'addition (rabouter deux lignes) et penser une notion de voisinage (mot d'observateur) qui ne s'appuie pas sur la paramétrisation.

> les fonctions qui dépendent d'une autre fonction[10]. ([99, p.315]

Les objectifs sont de prime abord identiques à ceux mis en avant dans l'étude des fonctions qui dépendent d'autres fonctions.

> Une telle idée est familière aux physiciens ; elle se présente spontanément quand on pense à certains phénomènes électriques (...) Pour certaines études, que j'espère pouvoir communiquer dès que possible il convient de considérer les fonctions de lignes d'un champ à trois dimensions[11]. [99, p.315]

L'étude des fonctions de lignes permet en fait de donner des théorèmes de représentation d'une forme encore plus voisine de ce qui est connu pour la différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Pour la fonctionnelle $\varphi[L]$ –ici φ indique la fonctionnelle et non plus la fonction sur laquelle elle agit !– Volterra prouve l'écriture suivante de sa variation

$$\delta\varphi = \int_L (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)ds$$

où X désigne la dérivée de φ par rapport à x, définie comme la limite lorsque ϵ et h tendent vers 0 du rapport $\frac{\Delta_x\varphi}{\epsilon h}$, ϵ et h ayant leur signification de la note [96], tandis que $\Delta_x\varphi$ est la variation de la fonctionnelle qui correspond à la variation de la ligne L relativement à l'axe des x. Les quantités Y et Z sont définies de façon analogue. Les trois dérivées partielles de φ correspondant aux directions x, y, z ne sont pas indépendantes les unes des autres, mais sont liées par des relations décrites sous formes d'égalités. Ces idées sont alors étendues aux dérivées secondes et développées plus particulièrement dans la seconde note sur les fonctions de lignes pour étudier les *fonctions simples*, qui vérifient l'égalité $\varphi[L_1+L_2] = \varphi[L_1]+\varphi[L_2]$ où L_1 et L_2 sont deux chemins avec des restrictions indiquées dans la première note : les lignes sont fermées ou se terminent au bord du domaine dans lequel elles sont considérées, elle ont un nombre fini de points singuliers et partout ailleurs possèdent une tangente, et enfin elles n'ont pas de nœuds. La somme est définie, moyennant une paramétrisation adaptée, comme la ligne obtenue en ôtant la partie commune de L_1 et L_2. Ces propriétés de linéarité lues dans des problèmes fonctionnels sont dégagées sous diverses formes par plusieurs mathématiciens à cette époque. Signalons une forte ressemblance avec la notion de fonction distributive introduite par Peano

[10] è ben nota l'utilità della rappresentazione geometrica del campo di variabilità di una funzione (...). Una immagine geometrica analoga si potrà avere per le funzioni che dipendono da un'altra funzione.

[11] una tale idea è familiare ai fisici; essa si presenta spontaneamente quando si pensa a certi fenomeni elettrici (...) Per alcuni studi, che spero di poter comunicare quanto prima giova considerare le funzioni delle linee di un campo a tre dimensioni.

quasiment au même moment ([74])[12]. Nous verrons de plus dans la partie suivante que les fonctions simples de Volterra rentrent dans le cadre des *fonctions additives* d'Hadamard. On peut aussi rappeler ici les travaux d'Emmanuel Carvallo (1856-1945) qui s'est saisi très tôt de la notion d'opération linéaire (qu'il nomme "opérateur") pour étudier des systèmes d'équations fonctionnelles (cf [18]).

1.3. *Premiers résultats en Analyse fonctionnelle*

Si les fonctionnelles devinrent au cours du 20e siècle un des objets mathématiques les plus utilisés, dans la dernière décennie du 19e siècle le concept n'en était encore qu'à ses débuts. Dans l'introduction de son article [110], Volterra signalait que les fonctions de lignes se présentent dans plusieurs questions de physique et qu'elles peuvent se rattacher aussi à des questions analytiques. Son but dans l'article était de montrer l'usage qu'on pouvait en faire dans la théorie des fonctions des variables imaginaires.

Dans un autre article publié en 1887[13] ([101]) Volterra avait déjà mentionné l'utilité des fonctions de lignes pour généraliser la définition riemannienne de fonction complexe. Il y écrivait en effet que les considérations de Riemann qui se réfèrent à un espace à deux dimensions peuvent être étendues aux espaces à trois dimensions pourvu qu'au lieu de partir de fonctions définies sur un tel espace, on parte de fonctions qui dépendent des lignes de cet espace. Dans [110], Volterra expose en détails sa conception.

> Dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, on suppose, en quelque sorte, que les valeurs des variables imaginaires sont étendues sur une surface, avec la condition que les rapports différentiels des variables ne dépendent que des points de la surface(...). Est-ce qu'on peut généraliser cette théorie en se rapportant à un espace à trois dimensions ? Voilà le problème que je me suis proposé. On peut résoudre la question, mais pour l'aborder il faut recourir à ce que je viens d'appeler les fonctions d'une ligne (...) A quelle théorie connue va se rattacher la généralisation dont je viens de parler ? Il est bien aisé de montrer qu'elle se rattache à la théorie des fonctions de plusieurs variables imaginaires. Il y a presque une année, M. Poincaré, en généralisant le théorème de Cauchy, à démontré que l'intégrale d'une fonction uniforme de deux variables imaginaires prise sur une surface fermée

[12]Les relations difficiles entre Peano et Volterra forment un chapitre explosif des mathématiques italiennes de la période. On pourra consulter [42] p.36-42 sur ce sujet.

[13]Il s'agit de la première d'une série de 3 notes [101, 102, 103] sur le sujet publiées entre 1887 et 1888.

> est nulle, si l'on peut déformer et réduire la surface à un point sans rencontrer de singularités. On peut déduire de là que, si la surface d'intégration n'est pas fermée, l'intégrale dépend des lignes qui forment le contour de la surface. Donc on voit que l'intégration des fonctions de deux variables conduit aux fonctions des lignes. [110, p.364-365]

Deux ans plus tard, dans un nouvel article [113], Volterra montrait que l'on pouvait utiliser les fonctions de ligne pour étendre aux intégrales doubles la théorie de Jacobi-Hamilton sur le calcul des variations.

> La méthode de Jacobi-Hamilton se fonde sur l'étude d'une intégrale simple (dont on veut annuler la variation) considérée comme fonction de ses bornes et des valeurs assignées arbitrairement aux fonctions inconnues en ces bornes (...) Si on passe des intégrales simples au cas des intégrales doubles, à la place des deux bornes de l'intégrale, nous avons une ou plusieurs lignes qui forment le contour du champ d'intégration [14].[113, p.464]

C'est dans ce type de contexte qu'entrent en jeu les fonctions de lignes qui permettent de construire un élément analogue à la fonction caractéristique mise en avant dans la théorie de Jacobi-Hamilton et d'étendre son concept aux intégrales multiples. Dans un article ultérieur ([116]), il explicite comment les fonctions de lignes permettent de développer une vision générale et de concevoir une extension à l'espace à trois puis n dimensions du *problème d'addition* pour les fonctions elliptiques. Nous reviendrons plus bas avec Fréchet sur les détails techniques de ce type de problèmes.

D'autre part il est intéressant de mentionner que l'article [116] cite dans un long paragraphe des travaux similaires de Picard et un extrait de lettre qui témoigne des contacts entre les deux mathématiciens sur cette question.

> A ce sujet je suis bien heureux de pouvoir présenter à l'Académie un extrait de deux lettres que notre illustre membre correspondant Monsieur PICARD m'a envoyées à la suite de la communication que je lui avais faite des propositions précédentes et qu'il m'a autorisé à publier : "...je crois reconnaître dans la question que vous m'indiquez quelque chose qui doit avoir un rapport avec une

[14]Il procedimento Jacobi-Hamilton si fonda sull'esame dell'integrale semplice (di cui si vuole annullare la variazione) considerato come funzione dei suoi limiti e dei valori assegnati ad arbitrio alle funzioni incognite nei limiti stessi (...). Se si passa dagli integrali semplici al caso degli integrali doppi, invece dei due limiti dell'integrale, abbiamo una o più linee che formano il contorno del campo di integrazione.

> étude que j'avais commencée mais que je n'ai pas approfondie et que je n'ai pas non plus publiée. Voilà au surplus le point essentiel de ce que j'avais en tète : [etc.] g. [116, p.333]

2. Jacques Hadamard catalyseur clairvoyant des relations mathématiques franco-italiennes

En juillet 1904, quelques semaines avant l'ouverture à Heidelberg du Congrès international des mathématiciens, Jacques Hadamard, qui se savait travailler sur des sujets proches des intérêts et des spécialités de Volterra pense prudent de demander à son collègue italien de quoi il compte parler au congrès. Cet échange marque le véritable début de leur relation personnelle. Les thématiques qui occupaient Hadamard en ces années appartenaient au vaste domaine de la Physique mathématique. Il était plus précisément intéressé par des questions autour de l'étude des Équations aux Dérivées Partielles et de leur résolution. De telles équations modélisent des situations fondamentales de la Mécanique et plus spécifiquement des problèmes ondulatoires. En fait, pendant le congrès de Heidelberg, Hamadard et Volterra co-dirigèrent la session du 10 août 1904 consacrée à ces problèmes, session où ils prirent en outre la parole l'un et l'autre, Volterra sur la *Théorie des ondes* et Hadamard sur *Les données aux limites dans les équations aux dérivées partielles de la physique* et où Arnold Sommerfeld et Robert William Genese furent les deux autres orateurs. De plus, le surlendemain 12 août, Hadamard fit une nouvelle communication dans une autre session qu'il présidait cette fois avec Tullio Levi-Civita où il présenta une communication *Sur les solutions fondamentales des équations linéaires aux dérivées partielles*, suivie d'une discussion dont Volterra fut le principal intervenant.

Comment les deux mathématiciens se sont-ils retrouvés à l'affiche ensemble à Heidelberg comme deux spécialistes incontournables de la physique mathématique et des EDP ? Bien que quasiment contemporains (Volterra n'est l'aîné que de cinq ans), Hadamard et Volterra eurent des trajectoires mathématiques bien distinctes. Volterra se passionna, comme on l'a vu, dès les débuts de sa vie professionnelle pour les questions de Physique mathématique. Dès ses premiers articles publiés en 1881 et que nous avons évoqués dans la première partie, les travaux de Volterra inclurent des études concernant les distributions de chaleur ou d'énergie électrique dans les matériaux, questions liées à la théorie du potentiel dont il fit d'ailleurs le sujet de sa thèse d'habilitation à la *Scuola Normale* de Pise en 1883. D'autre part nous avons largement rappelé comment Volterra traita également de considérations plus spécifiquement mathématiques autour de questions d'intégration, ou d'extensions de la notion de fonction (avec la notion de *fonction de ligne*) et du développement d'un Calcul différentiel approprié pouvant permettre de modéliser de nouvelles situations physiques telles que les phénomènes d'hérédité. Pour son collègue français, comme nous allons le voir, les chose se présentèrent de façon sensiblement différente.

Dans la présente section, nous allons tenter d'analyser comment Hadamard a commencé à s'intéresser à ce type de problématique. Un tel questionnement se greffe sur la longue et très riche histoire du développement de l'étude des EDP au 19ème siècle que nous ne pourrons qu'évoquer rapidement ici.

La production d'Hadamard sur les EDP est abondante et fondamentale. Une de ses originalités, fort précieuse pour l'historien, est qu'Hadamard s'est régulièrement livré à un très honnête travail historique, ou du moins chronologique, pour expliquer comment ses travaux s'inscrivaient dans le processus de construction de la théorie, par exemple lors de la conférence qu'il prononça pour le Congrès de 1928 à Bologne ([56]). Il ne peut donc s'agir dans le cadre de cet article de proposer une histoire complète des apports d'Hadamard à la théorie des EDP : comme déjà mentionné en introduction, on pourra à ce sujet se reporter avec profit au volumineux ouvrage biographique de Vladimir Maz'ya et Tatyana Shaposhnikova consacré au mathématicien [71], plus particulièrement aux chapitres 14 et 15, ainsi qu'au texte panoramique de Jeremy Gray [41]. Nous allons pour notre part nous concentrer sur un aspect spécifique qui, bien que présent dans l'ouvrage juste mentionné, peut être précisé à la lumière de notre propre étude dont la focalisation est plus resserrée.

Les années 1890 voient le développement d'intenses échanges entre français et italiens au sujet des EDP, échanges dans lesquels Volterra prend très rapidement une place centrale. De ce fait, les deux questions auxquelles nous tâchons de répondre dans cette partie, centrées sur nos deux protagonistes, sont les suivantes. Comment les travaux italiens, et notamment ceux de Volterra, sont-ils arrivés à la connaissance d'Hadamard ? Comment sa relation avec Volterra s'est-elle mise en place dans les quelques années qui séparèrent leur première rencontre en 1897 et ce congrès de 1904 où ils devinrent intimes ? Ces interrogations nous amèneront à examiner de plus près le rôle joué par les Congrès internationaux précédents (1897 à Zürich et 1900 à Paris) et par delà l'exemple d'Hadamard, à mettre en lumière la façon dont des travaux de mathématiciens italiens des années 1880 et 1890 ont été étudiés et prolongés en France au tournant du siècle.

2.1. *Elasticité, ondes et EDP*

2.1.1. *Lamé, Riemann et Du Bois-Reymond*

Même s'il est difficile de repérer un point de départ incontournable pour l'étude systématique des EDP à la fin du 19ème siècle, il semble légitime d'y souligner comme le fait J.Gray ([41]) l'importance centrale de l'étude de la propagation des ondes en milieu élastique. Cette théorie, qui intervient notamment dans l'étude les caractéristiques décrivant la déformation des matériaux, jetait en effet un pont entre plusieurs domaines de la mécanique : celle des milieux continus et celle des fluides notamment, mais touchait aussi la thermodynamique en abordant la question de la compression des gaz. Elle avait trouvé son expression mathématique dans les recherches de Lamé dont nous allons ici juste donner quelques brefs éléments. Pour plus de détails, on pourra consulter [85], [86] et [38]. L'intérêt de Lamé pour l'élasticité avait pour origine un certain nombre d'études mécaniques menées lors de son long séjour en Russie en compagnie de Benoît Clapeyron (1799-1864), notamment ses études sur les ponts suspendus. Mais par delà ces questions d'ingénierie, Lamé poursuivait un but plus vaste. Sa conception de la science, et du rôle dévolu aux mathématiques qui n'est pas sans faire écho à celle que nous verrons adoptée ultérieurement par Duhem et par Hadamard, est décrite par Joseph Bertrand de la façon suivante :

> Aux yeux de Lamé, la science était une, et les rapprochements, même dans les seules formules, entre des théories encore distinctes étaient l'indice certain d'une doctrine plus générale qui doit un jour les embrasser toutes. La distinction entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées était, à ses yeux, dangereuse et fausse. [13, p.19]

L'objectif de Lamé était de montrer qu'une théorie de l'élasticité pouvait servir de support à une théorie unifiée des ondes où l'élasticité de l'éther servirait à la fois à expliquer les phénomènes caloriques et la propagation de la lumière. Revenu en France après le raidissement des relations diplomatiques avec la Russie qui suivit la Révolution de Juillet [15], nommé professeur à l'Ecole Polytechnique en 1831, Lamé se fixa comme programme d'appliquer la géométrie et l'analyse modernes pour élaborer une théorie de l'élasticité. En 1833, Clapeyron et Lamé publièrent une note [19] présentant les équations décrivant l'équilibre intérieur des corps solides homogènes : ils y montraient que les équations de l'équilibre élastique (faisant intervenir le stress directionnel introduit par Cauchy) sont identiques aux équations de Navier pour les forces moléculaires. En 1852 parurent les *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps* [64]. Dans la 9ème leçon, Lamé étudie les petits mouvements d'une membrane élastique sous la forme d'EDP linéaires hyperboliques. Ses travaux furent ensuite repris et étendus par Riemann (voir [16]).

[15]Clapeyron, qui avait été proche du mouvement des décabristes en 1825 dut quant à lui fuir la répression contre les Saint-Simoniens et rentra à peu près au même moment.

En 1864 parut le grand traité d'Emil du Bois-Reymond (1818-1896) sur les EDP, où le mathématicien allemand introduisait la classification aujourd'hui classique pour les équations linéaires du deuxième ordre (hyperboliques, elliptiques et paraboliques). Il s'agissait d'un des premiers ouvrages qui cherchait à mettre un semblant d'unité dans le paysage des EDP qui restait encore dominé par un catalogue de méthodes particulières spécifiques à tel ou tel cas. Du Bois-Reymond y faisait aussi connaître les travaux de Riemann pour le cas de l'équation de propagation du son [78] avec les premières ébauches d'une méthode des caractéristiques consistant à trouver des courbes le long desquelles la résolution de l'équation se fait par le truchement d'équations différentielles ordinaires. Précisée par du Bois Reymond puis Gaston Darboux (1842-1917) dans différents travaux des années 1870 et 1880, cette méthode permet d'obtenir la valeur de la solution pour certaines EDP hyperboliques planes en un point situé à l'intérieur d'un quadrilatère fermé par des courbes caractéristiques de l'équation en fonction des valeurs prises sur les côtés. Luigi Bianchi (1856-1928), un des premiers italiens à travailler sur ces questions, étendit certains de ces travaux dans le cas elliptique ; en 1889 dans [11] il décrivait ainsi le rôle joué par les travaux de du Bois-Reymond et Darboux.

> Nel tomo 2^o delle belle lezioni sulla teoria generale del sig. Darboux e nell'ultima Memoria del Du Bois Reymond, inserita nel 104o volume del Giornale di Crelle, sono contenuti risultati di grande importanza per la teoria delle equazioni lineari a derivate parziali del 2o ordine con due variabili indipendenti x,y. In particolare per le equazioni del tipo iperbolico, nelle quali cioè i due sistemi di linee caratteristiche sono reali e distinti, viene dimostrato il teorema fondamentale, secondo il quale in ogni quadrilatero racchiuso sul piano xy da quattro caratteristiche, fissati i valori che l'integrale assume lungo due lati adiacenti del quadrilatero, risultano individuati i valori dell'integrale stesso in tutta la regione interna del quadrilatero [Darboux, §364 ; Du Bois Reymond §15]. A questo teorema fa riscontro, per le equazioni del tipo ellittico (a caretteristiche immaginarie), l'altro che i valori assunti dall'integrale nell'interno di un campo connesso sono generalmente individuati dai valori che l'integrale riceve sul contorno del campo. Alcune semplici osservazioni contenute nella presente Nota permettono appunto di stabilire con molta generalità questo risultato. Il processo stesso è immediatamente estendibile, come si vedrà, al caso di un numero qualunque di variabili independenti. Però non viene qui affatto trattata la questione molto più difficile se tali valori al contorno possano

> darsi effettivamente ad arbitrio, questione che, salvo pochi casi particolari, non sembra per ora prossima a risolversi. ([11, pp.35-36])

2.1.2. *Kirchhoff*

En 1882, le physicien Gustav Kirchhoff (1824-1887) intervint de manière inattendue dans la théorie des EDP. Dans l'article [62], il proposa dans le cas sphérique de l'équation des ondes (pour une dimension d'espace 3) une approche nouvelle à l'aide des formules de Green, en exprimant les solutions sous forme intégrale, étendant la formule de Poisson du cas cylindrique (pour une dimension d'espace 2). Kirchhoff avait trouvé l'idée d'utiliser le théorème de Green chez Helmholtz ([59]) qui l'employait pour obtenir l'équation des vibrations de l'air dans un tube : sur ces utilisations pionnières de la formule de Green, on pourra consulter [5], [6] et [87]. En outre, le livre [26] (pp.140 et seq.) fournit des détails sur les expressions obtenues par Kirchhoff, dont nous ne retiendrons seulement ici qu'à la différence de la formule de Poisson, pour laquelle l'intégrale porte sur tout le disque de rayon at autour du point considéré –a étant la vitesse de l'onde, t le temps– la formule de Kirchhoff en dimension 3 est une intégrale qui a pour support la surface de la sphère de rayon at. Kirchhoff interprèta alors ce résultat comme l'expression analytique du principe de Huygens qui expliquait la propagation d'une onde lumineuse en considérant les points de proche en proche comme des petites sources d'émission d'ondes sphériques localisées, principe qui n'avait en fait jamais reçu de formulation mathématique satisfaisante et avait été considéré comme un simple artifice explicatif ; la découverte de Kirchhoff lui donnait enfin sa place dans l'arsenal de la Physique mathématique [16]. L'article de 1882 connut immédiatement une importante diffusion, en dépit de quelques inexactitudes dans le traitement mathématique, repérées par Gian Antonio Maggi (1856-1937), mathématicien italien de Messine qui avait été élève de Kirchhoff à Berlin ; Maggi proposa en 1888 une démonstration légèrement différente [67]. Eugenio Beltrami (1835-1900) grâce à l'obtention d'une formulation un peu plus sophistiquée du théorème de Green, arriva en 1889 dans [12] à corriger la démonstration originale de Kirchhoff tout en gardant son idée originelle de chercher des solutions ne dépendant que de la norme $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2.1.3. *Pierre Duhem*

Apparut alors un personnage central pour notre histoire, le physicien Duhem. Personnalité complexe et brillante, Duhem enseigna à Lille de

[16] Pour une présentation du principe de Huygens, on pourra consulter l'ouvrage très complet [8]. En outre, [26, pp.144-145] en propose une rapide présentation plus moderne.

1887 à 1891, puis un an à Reims, avant de se stabiliser comme professeur de Physique théorique à Bordeaux en 1894 où il resta jusqu'à la fin de sa vie. De forts remous avaient suivi sa thèse sur le potentiel thermodynamique, refusée par le jury en raison d'une farouche opposition de l'ombrageux Marcelin Berthelot (1827-1907) dont Duhem avait remis en cause, avec raison, le *principe du travail maximum* [17]. Berthelot fut dès lors son ennemi irréconciliable, et fit tout ce qui était humainement possible pour entraver la carrière de son jeune collègue, lui barrant notamment l'accès à toute chaire parisienne. On peut ajouter que cette opposition frontale était aussi alimentée par le positionnement de Duhem sur l'échiquier politique, celui-ci ne faisant pas mystère de ses fortes sympathies pour l'Action Française, de son hostilité envers le régime républicain et de son attachement intransigeant à la frange rigide et gallicane de l'église romaine [18].

Duhem est l'auteur d'une œuvre gigantesque comprenant aussi bien des études techniques que des textes de philosophie des sciences, et également de nombreux traités pédagogiques de premier ordre.

Dans son cours à la faculté des sciences de Lille publié en 1891 [25], Duhem exposait plusieurs parties de la Physique où les EDP interviennent de manière centrale, et en particulier la théorie de l'élasticité. Faisant le point sur les résultats obtenus jusque-là sur les EDP hyperboliques, il montrait ([25], Tome II, Livre III, Chapitre VIII) que la méthode de Kirchhoff que nous avons évoquée plus haut ne peut être mise en place que pour les dimensions 1 ou 3.

Duhem fut efficace pour assurer la promotion de son cours, envoyant lui-même des exemplaires à de nombreuses personnes, parmi lesquelles Eugenio Beltrami à qui il demanda d'en transmettre à des collègues italiens qui s'occupaient de Physique mathématique. Beltrami fit ainsi suivre le livre à Ernesto Padova (1845-1896), alors professeur de Mécanique rationnelle à l'université de Padoue, peut-être parce que ce dernier venait de présenter à l'*Accademia dei Lincei* une note [19] proposant une théorie mécanique unitaire des phénomènes électriques, magnétiques ou lumineux.

Dans la lettre qu'il envoie à Duhem en janvier 1892 [20] pour le remercier de son ouvrage, Padova insiste d'ailleurs pour que Duhem lui donne son avis sur cette question, tout en lui signalant que *son ami*

[17]Le *principe du travail maximum* a été énoncé par Berthelot en 1879 dans son ouvrage *Essai de Mécanique chimique fondé sur la thermochimie* [10] : "Tout changement chimique accompli sans l'intervention d'une énergie étrangère tend vers la production du corps ou du système de corps qui dégage le plus de chaleur."

[18]On pourra notamment consulter [60] qui donne un tableau assez vivant du positionnement philosophico-politique de Duhem.

[19]Développée ensuite dans l'ouvrage [73].

[20]La correspondance scientifique de Pierre Duhem se trouve aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

Volterra (qui est alors encore à Pise pour quelque temps, où il est notamment assistant de Dini) a présenté aussi dans la même séance des Lincei une note sur l'électrodynamique arrivant en partie aux mêmes résultats par une autre voie.

Le cas d'Ernesto Padova illustre bien la difficulté éprouvée par des mathématiciens nourris au milieu du 19ème siècle aux laits lagrangien et laplacien pour remettre en cause l'universalisme de l'approche mécaniste des phénomènes physiques. En mars 1892, après avoir lu en détail le livre de Duhem, Padova écrit à ce dernier une longue lettre en se livrant à un vibrant plaidoyer pour les théories mécaniques avec lequel Duhem était à son avis *trop sévère* et Poincaré trop imprudent.

> Qu'on ne puisse, parce qu'une théorie mécanique explique suffisamment bien certains faits, dire : les choses se passent ainsi ! voilà comment est constituée la matière ! c'est parfaitement juste et vous avez bien raison de combattre cette vanité ou présomption humaines, mais cela n'empêche pas qu'aux théories mécaniques n'appartienne une place bien plus importante qu'aux théories purement physiques dans la découverte des phénomènes naturels (...) Il y a dans beaucoup d'analystes aujourd'hui une tendance à rejeter en bloc ces théories et je crains qu'elle ne finisse par creuser un abîme entre eux et les physiciens. (...) En disant : si un phénomène comporte une explication mécanique complète, il en comportera une infinité d'autres qui rendront également bien compte de toutes les particularités révélées par l'expérience, M. Poincaré, tout en énonçant un fait vrai ne jette-t-il pas de discrédit sur toutes les interprétations mécaniques ? [E. Padova à P. Duhem, mars 1892]

Dans la même lettre, Padova signale que Volterra, à qui il a suggéré d'envoyer à Duhem ses travaux, est quant à lui *en ce qui regarde les théories mécaniques tout à fait dans l'ordre d'idées de M. Poincaré.*

En avril 1892, Duhem envoie son cours à Volterra. En remerciement[21], Volterra lui envoie son article [112] sur les équations de Hertz et lui signale la parution prochaine de son article de Acta Mathematica sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents [114].

En juillet 1892, Volterra qui a lu le cours de Duhem reprit la plume pour faire des observations à son auteur. Ayant développé la discussion fine par Duhem du principe de Huygens dans l'interprétation de Kirchhoff, il lui mentionna avoir trouvé ce qui lui paraissait être une extension de ces résultats.

[21]La correspondance de Volterra et Duhem se trouve répartie aux archives de l'Académie des Sciences de Paris et à celles de l'Accademia dei Lincei.

> Vous avez montré qu'il n'y a que deux cas à l'équation générale des vibrations élastiques
>
> $$(1) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = A^2 \sum_1^m \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}$$
>
> possède des intégrales de la forme
>
> $$(2) \qquad V = \psi F(r - At)$$
>
> où F est une fonction arbitraire et ψ est une fonction de r seulement. Ce sont les cas où $m = 1, m = 3$. Le premier correspond au problème des cordes vibrantes. Le second à la question des ondes sphériques dans l'espace à 3 dimensions. Puisque la formule de Kirchhoff est fondée sur l'existence de l'intégrale (2) dans le cas $m = 3$ on doit conclure qu'on ne peut pas procéder de la même façon pour trouver une formule analogue dans le cas des ondes cylindriques ou des membranes élastiques, et pour généraliser les mêmes formules pour les vibrations dans un espace à m dimensions. Depuis quelque temps, j'ai tâché d'obtenir des formules qui, n'ayant pas la même forme que celle de Kirchhoff pouvaient la substituer dans le cas des ondes cylindriques et en avoir la même signification et étendre le résultat au cas général. En poursuivant ce but, j'ai vu que si l'on ne pose pas la condition que ψ soit une fonction de r seulement, on peut trouver des intégrales de l'équation (1) ayant la forme (2), mais j'ai démontré que (en dehors des cas $m = 1, m = 3$) la fonction ψ doit avoir des singularités (polydromie etc.) telles qu'en partant de ces intégrales et en employant la méthode de Kirchhoff, on trouve des résultats qui diffèrent substantiellement de ceux de Kirchhoff. Par là on ne peut donc atteindre le but. C'est pourquoi j'ai essayé un autre chemin. [V. Volterra à P. Duhem, 24 juillet 1892]

Volterra expose alors dans cette longue lettre l'essentiel de ce qui constituera sa note à l'Accademia dei Lincei [115]. Pour un système hyperbolique dans le cas cylindrique (dimension spatiale $n = 2$), Volterra montrait qu'il est possible d'obtenir des formules de représentation intégrale prolongeant les formules de Poisson et de Kirchhoff, par l'intermédiaire d'une extension de la méthode des caractéristiques (formules A,B,D,E de [115], p.166-168) [22]. Pour Volterra, il s'agissait là

[22] Les résultats de Volterra sur ce type d'EDP furent par la suite étendus au cas d'une dimension quelconque par Orazio Tedone (1870-1922) dans plusieurs publications entre 1893 et 1898 (voir en particulier [88]). L'approche de Volterra fut reprise

d'une expression satisfaisante du principe de Huygens, décrivant l'onde dans le milieu élastique à partir d'ondes localisées.

Duhem répondit immédiatement (le 30 juillet) avec empressement

> Je ne connais rien d'analogue au travail dont vous me parlez ; j'ajouterai qu'il me paraît extrêmement intéressant ; le caractère exceptionnel que j'avais reconnu aux deux cas $n = 1, n = 3$ m'avait vivement frappé, et je désirais beaucoup une connaissance plus approfondie du cas général ; mais comme je ne suis nullement mathématicien, je ne pouvais songer à élucider moi-même cette difficile question. J'avais récemment poussé mon ami Paul Painlevé, dont le nom ne vous est certainement pas inconnu, à s'occuper de cette question. Il n'avait pas encore eu le temps d'y songer. Tout cela vous marque suffisamment combien de plaisir et d'intérêt me causera votre mémoire lorsque vous l'aurez publié. [P. Duhem à V. Volterra, 30 juillet 1892]

Quelques mois plus tard, après la lecture de l'article de Volterra, Duhem reprend la plume avec un réel enthousiasme.

> La formule de Kirchhoff avec les transformations qu'il faut lui faire subir lorsqu'on veut l'étendre soit à l'équation $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ soit aux équations de Lamé, me semblent être une des plus belles conquêtes qui aient été faites depuis longtemps dans le domaine des équations aux dérivées partielles du second ordre. Si Kirchhoff a été un grand novateur, vous pouvez cependant, ce me semble, réclamer une belle part de ces nouvelles conquêtes. Recevez donc mes bien sincères félicitations. [P. Duhem à V. Volterra, 28 novembre 1892]

---

dans le cas de coefficients non constants par Jean-Marie Le Roux (1863-1949) dans sa thèse en 1895 [65] puis par un nouveau bordelais, Joseph Coulon (?, ?), qui publia en 1898 l'article [21], généralisant les résultats de Tedone pour l'équation de la chaleur à l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2 U}{\partial y_q^2} = 0.$$

Ces travaux à leur tour se trouvèrent ensuite étendus par les recherches de Robert d'Adhémar (1874-1941) dans [1], [2] et [3]. Sur ces sujets, on pourra consulter [37]. Quant à Coulon, ecclésiastique de son état, il soutint sa thèse (Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques) à Paris en 1902, puis partit à Fribourg en Suisse pour diriger la section française du Collège Saint-Michel.

2.1.4. *Un bon cru bordelais*

Hadamard fut nommé en 1893 à l'Université de Bordeaux. Il s'agissait là de son premier poste universitaire après trois ans passés à enseigner au Lycée Buffon à Paris, années qui, si elles se passèrent sans grand plaisir –les talents d'Hadamard pour l'enseignement secondaire n'ayant pas semblé très développés– lui avaient néanmoins permis de terminer tranquillement sa thèse, soutenue en 1892 à la Sorbonne ([43]) ; elles lui donnèrent en outre l'occasion de dénicher une perle rare en la personne de son jeune élève Maurice Fréchet (1878-1973) dont il allait suivre dès ce moment l'éducation mathématique et la carrière à venir avec un zèle inlassable [23]. À Bordeaux, Jacques Hadamard est d'abord chargé provisoirement du cours de Mécanique et d'Astronomie avant d'être titularisé, en 1896 au bout de trois ans, sur la chaire d'Astronomie et Mécanique rationnelle.

Les conditions scientifiques bordelaises s'avérèrent particulièrement adéquates pour le jeune Hadamard en raison de la présence en ville d'une société savante, la Société des Sciences Physiques et Naturelles, fondée en 1855. Le mathématicien Jules Houël, qui devint le bibliothécaire en 1865 mit son talent de polyglotte au service de la SSPN. Il lui permit d'entrer en relation avec des mathématiciens du monde entier, d'en traduire de nombreuses œuvres, et de faire de la bibliothèque de la société une des plus riches bibliothèques scientifiques de France, et de hisser les publications de la Société à un rang estimé sur la scène mathématique internationale [24].

En 1894, Pierre Duhem, qu'Hadamard avait un peu connu personnellement quand il commençait sa scolarité à l'École Normale Supérieure alors que Duhem la terminait, arrivait à Bordeaux, comme titulaire de la chaire de Physique théorique.

Hadamard ne manque pas dans l'article [55] d'éloges vibrants non seulement envers l'extraordinaire curiosité scientifique de son aîné mais aussi envers ses conceptions de Physicien mathématicien qui n'avaient pu que le séduire. Il est plus que probable que c'est cette passion partagée pour l'activité scientifique sous toutes ses formes qui permit aux deux collègues à Bordeaux de se fréquenter assidument sans que leurs fortes divergences politiques ne viennent perturber leur relation. L'enthousiasme de Duhem pour les nouvelles théories physiques qu'Hadamard avait pu constater dès sa scolarité normalienne, telles les conceptions d'Hugoniot sur la propagation des ondes de choc dans les fluides que Duhem fit connaître grâce à son cours à l'université de Lille, fut visiblement communicatif.

Hadamard écrivit lui-même dans l'article précité :

[23] Voir la partie suivante.

[24] Sur Jules Houël à Bordeaux, on pourra consulter [89] et [77].

> Pour ma part notre réunion à la Faculté des Sciences de Bordeaux me procura la rare fortune [de] compléter la lecture [du cours de Duhem] par de précieux et continuels échanges de vues. A cette lecture, je dois la plus grande partie de mes travaux ultérieurs tous consacrés au Calcul des variations, à la théorie d'Hugoniot, aux équations aux dérivées partielles hyperboliques, au principe de Huygens.
>
> Duhem lui-même revenait sur presque toutes ces questions, dans la suite de son immense labeur, et la plupart des théories qu'il avait si heureusement et si lumineusement exposées lui suggérèrent ici des remarques de détail, là des compléments d'une importance fondamentale. [55, p.644-645],

2.2. *De Congrès en Congrès*

En 1897, Hadamard, nommé professeur suppléant de Mécanique analytique et céleste au Collège de France, revint à Paris. Ce fut aussi l'année où il prit conscience des travaux italiens sur les EDP, en particulier lors du premier Congrès international des mathématiciens à Zürich. Les mathématiciens français y vinrent peu nombreux, soit qu'ils ne vissent pas trop l'intérêt de sortir de leurs frontières quand ils continuaient à considérer Paris comme un point cardinal des mathématiques mondiales où tout ce qui est important finissait par arriver, soit qu'ils eussent une réticence envers un lieu considéré comme un peu trop sous influence germanique. Ce point mériterait probablement d'être mieux étudié. Borel, qui faisait partie de la délégation française, ne manqua pas d'en faire la critique dans le long et savoureux compte-rendu qu'il écrivit [14]. Borel y insistait d'ailleurs sur l'importance à ses yeux de rencontres physiques entre collègues pour que la *parole vivante* prenne de temps en temps le pas sur le *froid imprimé*. La délégation italienne était, elle, importante, et Volterra se montra parmi les plus enthousiastes partisans de la formule. Il est d'ailleurs remarquable que ce soit à cette occasion que les deux hommes firent connaissance et nouèrent une amitié indéfectible qui dura jusqu'à la mort de Volterra en 1940. Les débuts enflammés de leur relation sont étudiés ailleurs [69] et nous ne citons ici pour mémoire que la première lettre envoyée par Borel à Volterra, qui illustre bien le climat optimiste qui suivit le congrès

> Si les relations personnelles qui se sont nouées à Zürich devaient s'éteindre pendant trois ans ou plus, le plus grand et le plus agréable des avantages des Congrès serait perdu. Mais je compte bien qu'il n'en sera pas ainsi pour nous. (Borel à Volterra, 14 novembre 1897)

Présent dans la délégation française, Hadamard rencontra lui aussi Volterra pour la première fois à cette occasion, mais contrairement à

Borel, cette rencontre semble être restée sans suite immédiate sur le plan personnel. Ayant commencé divers travaux de Physique mathématique lors de son séjour bordelais, Hadamard venait à Zürich parler d'EDP mais sous un angle prospectif un peu particulier. Dans une courte communication au titre intrigant , *Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles* [45], Hadamard exposa l'intérêt qu'il voyait à étudier certains ensembles de fonctions afin de formuler des problèmes d'extrema, et à étudier des propriétés de ces ensembles. Inspiré par le calcul des variations, il avait en particulier en vue des applications à l'étude d'EDP pour lesquelles la solution pourrait être désignée comme la solution d'un tel problème, à savoir une fonction qui maximise une certaine fonctionnelle (Hadamard n'emploie pas là ce mot qui n'apparaîtra dans son vocabulaire que quelques années plus tard). Hadamard évoquait en particulier l'étude de l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle [0,1] muni de la norme uniforme et la recherche du cardinal d'un recouvrement par des boules de rayon donné [25]. La communication d'Hadamard provoqua des réactions. Borel signala [15] qu'il avait été lui-même confronté à certains ensembles de fonctions dans ses études sur les séries, tel l'ensemble des fonctions coefficients intervenant dans la décomposition en série entière des solutions d'une EDP. Mais c'est la brève intervention de Salvatore Pincherle (1853-1936), qui se trouvait aussi dans la délégation italienne, qui est beaucoup plus significative pour nous. Pincherle signala que plusieurs italiens s'étaient penchés depuis quelques années sur ces questions concernant les ensembles de fonctions, tels Ascoli, Volterra, Arzelà et lui-même, envisageant les fonctions comme des points d'un ensemble et même d'un continuum.

Nous n'avons pas connaissance d'une éventuelle réaction d'Hadamard ; la remarque de Pincherle semble être restée lettre morte dans un premier temps. Il faut dire qu'Hadamard était alors pris par des travaux d'une autre nature, même s'ils concernaient aussi les EDP, sujet désormais central dans ses recherches, et notamment par la préparation de son cours du Collège de France des années 1898 à 1900 qui fut en fait publié avec quelque retard sous le titre *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*[51]. Il reprenait et étendait le cours de Duhem de 1891 en rassemblant pour la première fois les résultats obtenus pour la résolution des EDP hyperboliques, notamment une théorie générale des caractéristiques inspirée par la thèse de Jules Beudon (1869-1900) sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, théorie. Hadamard définissait des surfaces caractéristiques associées à une équation d'ordre quelconque comme le lieu de discontinuité de certaines dérivées et montrait qu'une telle approche permettait

[25]On reconnaît là une des origines des questions de précompacité qui occuperont Fréchet quelques années plus tard, comme nous le verrons dans la partie suivante de cet article.

une bonne traduction mathématique l'expression analytique des considérations d'Hugoniot sur les ondes de choc (voir [71], 14.2).

En 1900, Hadamard se pencha sur le principe de Huygens. Dans son article [46], il arrivait à la conclusion que l'interprétation de Volterra est discutable d'un point de vue physique [26].

Cette même année eut lieu la deuxième édition du Congrès international, cette fois à Paris. Volterra et Hadamard s'y retrouvèrent de nouveau, et firent chacun une conférence consacrée aux EDP dans la même session du 10 août 1900. La communication de Volterra, intitulée sobrement *Sur les équations aux dérivées partielles* [117], reprenait les formules intégrales qu'il avait énoncées dans son article de 1894. Celle d'Hadamard, *Sur les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles* [47] montrait que la séparation tranchée entre le cas elliptique (caractéristiques imaginaires) pour lequel le problème de Cauchy n'a en général pas de solutions, et le cas hyperbolique où il en a, ne valait en fait que pour le cas simple où l'équation est donnée dans l'espace tout entier. Dans les cas où les conditions limites portent sur une portion de l'espace –tels des conditions de Dirichlet ou de Neuman– la situation se complique et les deux types d'équations ont des propriétés communes.

Il n'y a pas trace de discussion entre les deux mathématiciens. Quelques semaines après le Congrès, Hadamard envoya certes sa première lettre à Volterra, qui venait d'être nommé à l'Université de Rome, mais elle se limitait à des considérations on ne peut plus matérielles [27].

> Cher Monsieur,
>
> Je vous ai écrit à Turin, ne sachant si vous êtes déjà installé à Rome et j'espère que ma lettre vous joindra quand même. Elle a pour but de vous prier de vouloir bien m'envoyer ou, mieux encore, envoyer à M. Duporcq, secrétaire du Congrès, 162 boulevard Péreire à Paris, le texte de la communication que vous avez faite sur les équations à caractéristiques réelles, et que nous voudrions bien avoir pour les comptes-rendus du congrès.
>
> Je suis heureux d'avoir cette occasion de me rappeler à votre souvenir et vous prie de recevoir, avec tous mes respects pour Madame Volterra, l'assurance de mes sympathiques sentiments.

[26] La contestation d'Hadamard s'appuyait sur le fait que dans sa version originale, le principe énoncé par Huygens impliquait en effet que chaque point se trouve au repos après le passage de l'onde, ce qui est une propriété spécifique des équations en dimension spatiale impaire (tel le cas sphérique considéré par Kirchhoff) puisque l'expression intégrale de la solution porte sur une *sphère* de rayon at. Dans le cas d'une dimension paire au contraire, la formule intégrale qui porte sur tout l'intérieur de la *boule* condamne le point à ne jamais revenir au repos et à donc subir un mouvement résiduel (qui donne son titre à l'article).

[27] La correspondance entre Hadamard et Volterra se trouve aux archives de l'Accademia dei Lincei.

> J.Hadamard [J. Hadamard à V. Volterra, août ou septembre 1900]

Comme on le voit, Volterra et Hadamard, tout en étant en termes cordiaux, ne semblent pas avoir été alors particulièrement intimes. Au vu de ce que nous avons exposé, on peut conclure que tout en ayant de l'estime pour son collègue italien, à qui il donnait une place méritée parmi les investigateurs de méthodes de résolution d'EDP hyperboliques, Hadamard n'attendait rien de spécialement grandiose de ses travaux. La situation allait changer dans l'intervalle de temps qui les séparait du congrès de Heidelberg.

2.3. *Découverte des fonctions de lignes*

En 1902, Hadamard écrivit l'article [49], sa première publication utilisant un formalisme où les fonctions sont prises comme éléments variables, cinq ans après la conférence du congrès de Zurich et les observations de Pincherle que nous avons signalées. Dans son livre de 1945 sur la psychologie d'un mathématicien pendant le processus de recherche [57], il témoigna d'ailleurs de sa propre surprise quant à l'intervention de cette notion dans ses travaux.

> Much more surprising is the fate of the extension given to that initial conception [of calculus of variations] in the last part of the nineteenth century, chiefly under the powerful impulse of Volterra. Why was the great Italian geometer led to operate on functions as infinitesimal calculus had operated on numbers, that is to consider a function as a continuously variable element ? Only because he realized that this was a harmonious way of completing the architecture of the mathematical building, just as the architect sees that the building will be better poised by the addition of a new wing. One could already imagine that [...] such a harmonious creation could be of help for solving problems concerning functions considered in the previous fashion ; but that "functionals", as we called the new conception, could be in direct relation with reality could not be thought of otherwise than as mere absurdity. Functionals seemed to be an essentially and completely abstract creation of mathematicians. Now, precisely the absurd has happened. Hardly intellegible and conceivable as it seems, in the ideas of contemporary physicists (in the recent theory of "wave mechanics"), the new notion, the treatment of which is accessible only to students already familiar with very advanced calculus, is absolutely necessary for the mathematical representation of any physical phenomenon. Any observable element, such as a pressure, a speed,

> etc., which one used to define a number, can no longer be considered as such but is mathematically represented by a functional ! [57, p.129-130]

Hadamard enjolive quelque peu la situation en attribuant à Volterra une visée esthétique éthérée dans son invention des fonctions de ligne. Comme nous l'avons vu, dès son article de 1887 [104], le mathématicien italien avait souligné combien de nombreux problèmes de Mécanique et de Physique font naturellement apparaître des quantités qui dépendent de toutes les valeurs prises par telle ou telle fonction, situation illustrée par l'exemple récurrent de la température en un point d'une lame conductrice qui dépend de toutes les températures sur le bord.

Dans son article de 1902, Hadamard s'intéressait à la notion de dérivée d'une fonction de ligne telle que Volterra l'avait formulée. Sous un certain nombre d'hypothèses de régularité, ce dernier en avait donné une expression intégrale. Or, Hadamard faisait remarquer que la dérivée en question satisfaisait les propriétés d'une fonction *linéaire*, notion qu'il avait lui-même introduite en 1901 dans son petit livre étonnamment méconnu sur les séries de Taylor [48]. Dans le chapitre VII, Hadamard faisait observer que dans un certain nombre de situation de prolongement de fonctions analytiques, on est amené à s'intéresser à des transformations fonctionnelles, telle la méthode de Borel qui à $f(x) = \sum a_m x^m$ fait correspondre la *fonction associée* $F(x) = \sum a_m x^m/m!$. Posant $\tilde{f}(x) = \int_0^\infty e^{-t}F(tx)dt$, on définit ainsi une fonction qui dans les bons cas prolonge f au delà du cercle de convergence. Dans le chapitre VIII, Hadamard introduisait alors de façon systématique à la suite de Bourlet (et Pincherle) des fonctions qui associaient une fonction à une autre fonction qu'il nommait des *transmutations* dont un exemple est la dérivation. Une transmutation est définie sur une catégorie de fonctions qu'Hadamard nommait un champ fonctionnel. Il introduisait alors le cas particuler d'une transmutation linéaire A si elle vérifiait $A(f_1+f_2) = A(f_1)+A(f_2)$. La même situation était qualifiée de *distributive* par Pincherle ou d'*additive* par Bourlet, et seuls ces deux auteurs apparaissent dans la bibliographie correspondante.

La notion de transformation linéaire permettait donc d'envisager pour la dérivée d'une fonction de ligne des formes assez générales. S'intéressant spécialement à la façon dont il est possible de définir la dérivée seconde d'une fonctionnelle, Hadamard montrait qu'elle nécessite un traitement plus subtil et qu'elle ne peut s'exprimer en général sous la forme d'une intégrale faisant intervenir les dérivées partielles secondes comme une extension naïve de la forme donnée par Volterra à la dérivée première pourrait le faire croire [28].

[28] Il est important, pour replacer cette discussion dans son contexte, de rappeler que nous sommes encore là plusieurs années avant que Fréchet ne stabilise la notion de différentielle précisément pour faire face à ce type de situation.

Mais c'est surtout dans une note de 1903 [52] qu'Hadamard sembla commencer à voir le parti qu'il pouvait tirer de la théorie des fonctions de ligne, dont il dit lui-même qu'elle lui semblait la plus pratique pour étudier certaines situations en manipulant directement une fonction comme variable sans devoir se limiter à des fonctions analytiques pour se ramener à des suites de coefficients scalaires. Étendant par analogie le formalisme de Volterra à des fonctions de surface, Hadamard obtint différentes représentations pour les fonctionnelles linéaires au sens qu'il avait introduit précédemment. Un aspect capital était sa présentation d'un exemple fondamental où l'on pouvait faire usage de ce type de formalisme : la variation première de la fonction de Green g_A^B relative à deux points A et B intérieurs à une surface S qu'on déforme [29].

Hadamard prit désormais conscience de se trouver sur un terrain de rencontre, voire de compétition avec Volterra. Et on peut sentir une pointe d'inquiétude dans la lettre qu'il envoya à son collègue quelques semaines avant le congrès de Heidelberg.

> J'ai toujours oublié de vous demander ce que vous avez l'intention de traiter au Congrès de Heidelberg (Section des mathématiques appliquées). Puis-je vous demander de me renseigner sur ce point, afin que je n'aille point sur vos brisées ?
>
> Recevez avec mes excuses pour le dérangement que je vous cause l'assurance de mes sentiments bien dévoués.
>
> [J. Hadamard à V. Volterra, sans date]

La généreuse réponse de Volterra à la veille du congrès, dont une minute est conservée, le rassura probablement.

> Oriolo Romano, 27 juillet 1904
>
> Cher Monsieur,
>
> Je vous remercie beaucoup de votre aimable lettre. J'ai l'intention de dire quelques mots au congrès de Heidelberg sur la théorie des ondes. Le sujet est si vaste que je suis sûr que si vous voulez parler aussi du même sujet il n'y aura pas que des interférences entre les deux communications.
>
> Voilà à peu près quel est mon programme. Je commence par chercher si les limites de ce qu'on appelle

[29]La fonction de Green g associée au laplacien Δ dans un domaine D se définit à l'aide des réponses impulsionnelles dans le domaine. Prenant comme argument un couple de points (A, B) du domaine D, $g(A, B)$ (dans la notation d'Hadamard, g_A^B) désigne la valeur en B de la fonction harmonique dans le domaine privé du point A, nulle au bord et infinie en A. Elle fut introduite par George Green en 1830 afin d'obtenir par convolution avec une fonction f la solution de l'équation $\Delta u = f$. Dans l'approche moderne des EDP linéaires dans le cadre de la théorie des distributions, on préfère en général utiliser le concept de solution fondamentale qui lui est étroitement relié (voir [84], p.241 *et seq*).

> théorie des ondes sont bien marquées et je pense le [traiter en ?] quelques questions. Je tâche après de montrer quelques lemmes que je crois trouver dans la théorie analytique de la double distribution et je tâche de comparer la méthode de Kirchhoff avec la méthode de Mme Kovalevski.
>
> Par rapport aux vibrations des membranes j'ai enseigné cette année dans mon cours qu'on peut employer la méthode des images lorsque la membrane est rectangulaire et que d'autres cas où elle est limitée par des lignes droites (vous avez déjà touché ce sujet dans votre note). Je désire faire la remarque que cette méthode donne des résultats beaucoup plus simples dans les problèmes analogues de la chaleur et de l'électricité car on ne tombe pas sur des séries. Cela arrive en général pour les équations de type hyperbolique.
>
> Je ne manquerai pas de noter à ce propos votre note de la Société math. de France de 1903 où vous employez la méthode des ondes. Si j'aurai le temps je voudrais toucher à une relation entre les vibrations des membranes et la théorie des ondes. Peut être le programme est trop vaste. Si vous voulez bien me faire quelques remarques je vous en serai fort obligé.
>
> Je serai heureux de vous voir à Heidelberg. Mme Volterra m'accompagne et elle sera heureuse d'y rencontrer Mme Hadamard.

Cette nouvelle rencontre à Heidelberg (leur troisième Congrès ensemble !) entre Volterra et Hadamard fut la bonne et leur relation, à l'instar de celle entre Borel et Volterra, fut désormais faite d'estime et d'affection réciproque [30].

Dans plusieurs articles ultérieurs, Hadamard poursuivit son approche variationnelle de la physique des vibrations. Il rechercha par exemple la loi de variation de quantités solutions d'équations du genre $\Delta\Delta V = kV$ quand on fait varier la forme de la frontière du domaine, type de formulation qui apparaît naturellement en théorie de l'élasticité quand on considère les conditions d'équilibre de plaques élastiques encastrées. De ce fait, les équations fonctionnelles qu'Hadamard mettait en lumière jouaient le rôle d'équations d'évolution qu'on peut chercher à étudier pour obtenir la forme des différents paramètres physiques. Faisant le point sur toutes ces questions, Hadamard composa enfin le volumineux

[30] Une expression bouleversante de cette amitié se trouve aux moments tragiques traversés par Borel et Hadamard pendant la Première Guerre mondiale (voir [70]). En outre, quand Volterra dut se débattre dans les griffes du régime fasciste dans les années 1930, Borel et Hadamard firent tout leur possible pour lui apporter leur aide.

[53] qui fut couronné du prix Vaillant. On trouve là l'origine des travaux de Paul Lévy (1886-1971) qui, assistant au cours d'Hadamard au Collège de France en 1909, alla lui soumettre l'idée de prendre comme sujet de thèse l'étude systématique des équations fonctionnelles [31]. Ce dernier garda d'ailleurs toujours la plus grande estime pour les travaux réalisés par Lévy dans sa thèse [32].

[31]"Puisque vous avez mis la main sur le sujet, je vous l'abandonne" : ainsi Lévy décrit-il la réaction d'Hadamard dans son autobiographie [66] (p.42).

[32]Voir ce qu'il en dit dans sa conférence du Congrès de Bologne en 1928 (p.152), sur lesquels on pourra consulter [9], Section 6, pour de plus amples détails.

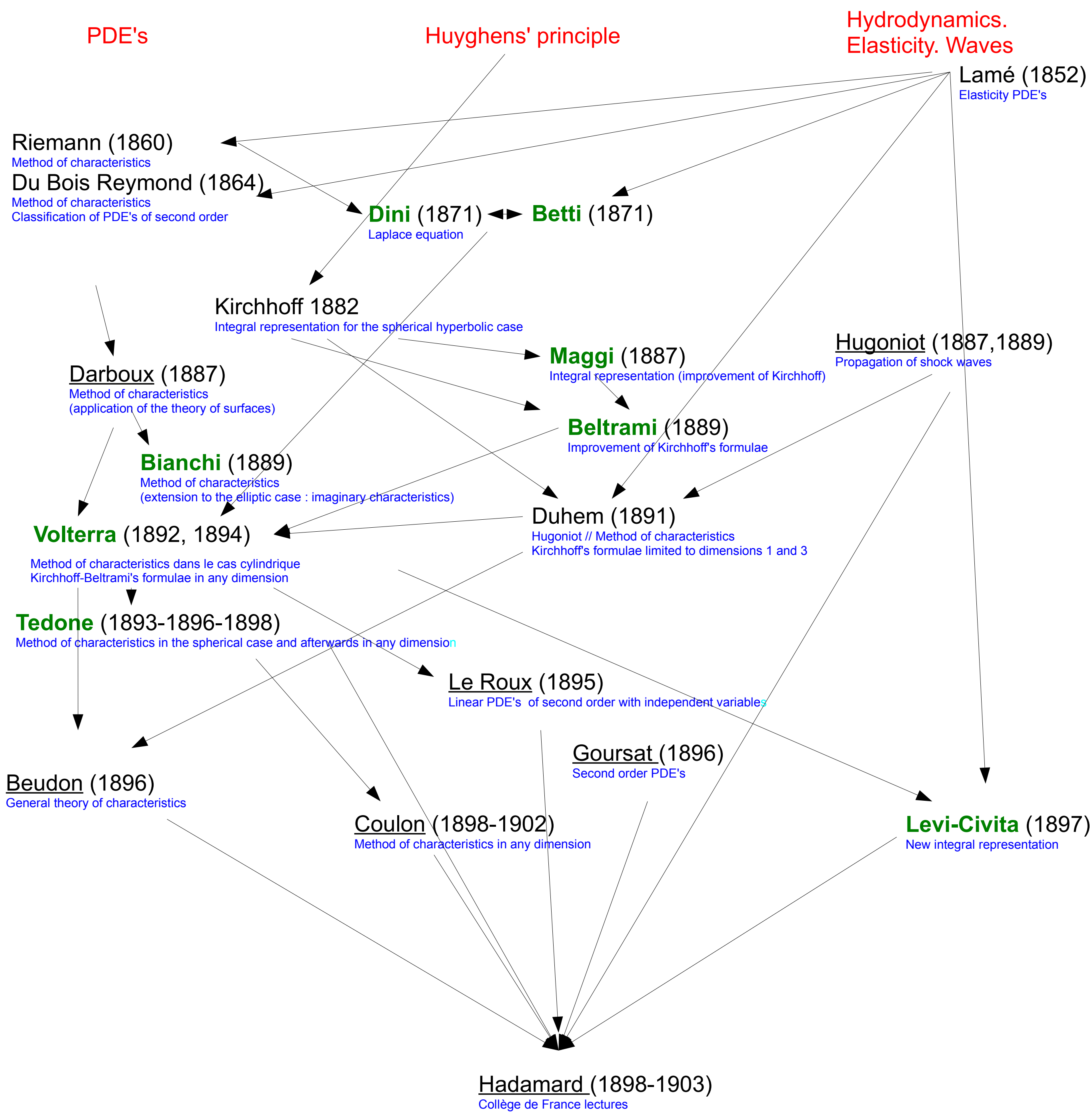

Figure 1. Les sources du cours d'Hadamard au collège de France sur les E.D.P. (1898-1900). Les Italiens sont en gras, les Français soulignés ; les dates sont celles des publications principales sur les E.D.P.

3. Maurice Fréchet : en quête d'une Analyse Fonctionnelle Générale

On a mentionné dans la partie précédente la rencontre déterminante d'Hadamard pour son jeune élève Fréchet au lycée Buffon à Paris dont il suivit sans relâche les progrès. Lorsque Fréchet, quelques 16 ans après son ainé, rentra à l'École Normale Supérieure, il bénéficia du coup des relations bien établies entre Hadamard et Volterra et de l'intérêt nouveau porté par les mathématiciens français pour les travaux des analystes italiens, Pincherle et Volterra en tête.

Dès 1902 Hadamard publie son article [49], et Fréchet travaille rapidement sur les articles de Volterra de 1887 sur les fonctions de lignes. Dès 1904, Fréchet publie à son tour un article sur le sujet ([27]).

Les idées qui ont influencé ou nourri le travail de Fréchet en Analyse fonctionnelle ont fait l'objet de plusieurs études historiques qui se sont particulièrement concentrées sur le concept essentiel qui sous-tendait sa vision, la notion d'*Espace abstrait* en Analyse. En particulier on peut consulter la thèse pionnière de Reinhard Siegmund-Schultze [80] et le très ample travail de Angus E. Taylor publié en trois parties [81, 82, 83].

Dans son étude, Taylor qualifie d'*indirecte* l'influence de Volterra sur la conception des espaces abstraits

> Fréchet's short note of 1904 [on Weierstrass's theorem] broke absolutely fresh ground. Although Vito Volterra's work certainly had some influence on Fréchet's work taken as a whole, I think a good deal of it was exerted indirectly, through Hadamard. I see little or no reason for thinking that Volterra contributed directly to the shaping of Fréchet's ideas on L-classes, V-classes, or E-classes. ([81, pp.286-287])

La note de 1904 à laquelle il est fait référence ici ([28]) introduit pour la première fois dans le travail de Fréchet une vision très générale qui lui permet de concevoir des *opérations fonctionnelles* sur des *ensembles* constitués de certaines *catégories d'éléments quelconques (nombres, surfaces, etc.)* en faisant intervenir des éléments de topologie. Fréchet n'utilise naturellement pas ce mot mais il importe, à des fins tout à fait particulières que nous décrivons dans la suite, des idées que nous classerions désormais dans le champ de la *topologie* comme la compacité ou des propriétés de tel ou tel type de convergence des suites. Taylor considère que cette note marque le point de départ de la progression de Fréchet vers les *espaces abstraits* et relègue en quelques sortes ses études contemporaines sur les fonctions de lignes au rang de travail de jeunesse. Or, il nous semble légitime de réexaminer l'importance de la lecture par Fréchet des travaux de Volterra pour sa conception des espaces abstraits et plus généralement pour son travail en Analyse Fonctionnelle. En particulier nous allons montrer que c'est essentiellement la recherche d'une façon générale d'appréhender les *nouvelles* fonctions mises en avant par Volterra qui va, dès les publications de 1904, donner lieu à deux types de développements qui ne seront réunifiés que petit à petit dans un cadre général.

D'un côté, en saisissant simplement l'idée de fonction que met en avant Volterra, Fréchet développe une théorie dans la lignée de la définition de Dirichlet (cf. [23]) et Weierstrass qui va prendre une forme très générale obtenue par un processus d'abstraction caractéristique de l'approche du jeune mathématicien français. La notion d'espace abstrait apparait ici comme véritable préliminaire à une théorie générale des fonctions ou encore des *opérations*, terme que Fréchet emploie sous la forme "opération" ou "opération fonctionnelle" pour désigner une fonction dans un sens étendu. Le début de sa thèse précise le vocabulaire : si E est un ensemble formé d'éléments quelconques (nombres, points, fonctions, lignes, surfaces, etc.) une *opération fonctionnelle* dans E est un objet mathématique qui à tout élément A de cet ensemble fait correspondre un nombre déterminé, $U(A)$ L'étude de ces opérations est l'objet du *Calcul fonctionnel* (cf. [32]). Le mot *fonction* sera employé par Fréchet dans sa thèse pour désigner ce qui devient un cas particulier d'*opération*, à savoir une fonction classique d'une ou plusieurs variables réelles.

D'un autre côté, en suivant la piste ouverte par Volterra, Fréchet va mettre en avant des outils adaptés aux problèmes de variations issus de la Physique mathématique. Nous analyserons plus loin la démarche de Fréchet qui cherche à réunir dans un même cadre conceptuel les problèmes de ce domaine, notamment à travers la notion d'*opération linéaire* et la recherche de théorèmes de représentation de ces fonctions.

Ces deux voies, nous allons tenter de le montrer, furent développées en parallèle, et prirent racine dans une relecture des idées de Volterra, avant de se rejoindre progressivement dans une théorie générale des opérations linéaires définies sur des espaces vectoriels topologiques. Les espaces abstraits seront au centre de bien des recherches ultérieures et restent aujourd'hui d'une importance capitale en Analyse Fonctionnelle.

3.1. *Premiers contacts avec les Fonctions de Lignes*

Peu après la fin de sa scolarité à l'École Normale à l'automne 1903, Fréchet écrivit une longue lettre à Volterra sur les conseils conjoints de Borel et Hadamard qui lui avaient suggéré qu'il y avait probablement dans les travaux des géomètres italiens matière à engager un travail de thèse. Dans sa lettre, Fréchet mentionnait qu'il avait déjà commencé à travailler à partir des articles de Volterra sur les fonctions de lignes qu'il avait connus à travers les cours d'Hadamard mentionnés dans la partie précédente. Il engageait alors une discussion technique sur ces mêmes fonctions de lignes afin que Volterra l'aide à déterminer un sujet de thèse intéressant. On peut penser, même si Fréchet n'y fait qu'une allusion rapide dans cette première lettre, qu'il avait aussi lu l'approche de Pincherle, dans ses articles mais aussi à travers le livre [4] écrit en collaboration avec Ugo Amaldi en 1901.

La lettre n'a certes pas la forme d'un article, mais elle propose un exposé très détaillé et montre que Fréchet a déjà beaucoup réfléchi aux conceptions de Volterra. Elle contient en fait en substance les résultats qui seront publiés rapidement après dans l'article [27]. Fréchet y définit en des termes proches de ceux de Volterra la notion de fonction étendue :

> La physique mathématique conduit à l'étude de fonctions beaucoup plus générales que les fonctions dépendant de la valeur d'une ou de plusieurs variables (fonctions que j'appellerai *ordinaires*). Je veux parler des expressions qui ne sont déterminées que par la connaissance de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs *fonctions ordinaires.* [27, p.557]

Mais aussitôt cette approche générale rappelée, Fréchet limite son exploration aux cas les plus "simples", et il précise le cadre que couvre son étude :

> Nous nous bornerons au cas des fonctions U_L dont la valeur varie seulement avec la *forme* d'une ligne L plane ou gauche, continue, *fermée* et dont la tangente varie d'une manière continue, sauf en des points isolés en nombre fini. [27, p.557]

Même s'il ne l'explicite pas, Fréchet n'envisage que des fonctions U_L à valeurs réelles ou complexes. Le point de vue adopté pour la variable est celui des familles paramétrées de courbes qui permet de définir des limites (uniformes) et la variation de la fonction U_L.

> Considérons une famille G de ces lignes, dépendant d'un paramètre α de façon que, si α tend vers α_0, L tende *uniformément* en tous ses points vers les points correspondants de L_0. Pour ces lignes L, U_L sera une fonction de α et nous ajoutons l'hypothèse que ce soit une fonction continue et dérivable en α. Dans ces conditions, nous pourrons parler, comme dans le calcul des variations, de la variation première de U_L : δU_L[33], laquelle dépend, bien entendu, de la famille G considérée. [27, p.557]

[33]On peut consulter le cours de Joseph-Alfred Serret (1819-1885) [79] publié pour la première fois en 1868 et réédité à de nombreuses reprises par la suite pour avoir un aperçu des notations et des définitions de *dérivée*, *accroissement*, *différentielle* etc. en usage à l'époque pour les fonctions ordinaires. Les textes de Volterra, Hadamard ou Fréchet ne redéfinissent pas ces notions qu'il nous faut précisément distinguer et analyser ici. En particulier ici δU_L désigne la différentielle relative au paramètre α (cf. Ch XII de [79]).

Fréchet fait dans ce travail directement allusion aux travaux de Volterra et en particulier à [111] où la notion de fonction de lignes permet de formuler un cadre pour généraliser l'étude des fonctions, en étendant la notion de variable qui évolue du point à la courbe, puis à la surface etc. Pourtant l'approche de Fréchet ne reprend pas directement à son compte cette façon de voir. Il s'interroge sur la meilleure conception générale possible pour traiter des problèmes qui ont bien été identifiés comme des problèmes fonctionnels, c'est-à-dire dont le questionnement porte sur des fonctions [34]. La présentation de Fréchet laisse penser qu'il est à la recherche dès cet article d'une façon de voir les fonctions de lignes de manière générale et comme outil permettant de relire grâce à une notion abstraite unique l'ensemble des situations rencontrées.

Dès 1887, nous avons vu que Volterra avait cherché à adapter la stratégie classique de l'étude des fonctions de la variable réelle : une dépendance, la *fonction*, vue pour lui dans un sens étendu, puis une variation de la variable qui engendre une variation de la valeur de la fonction qui donne à son tour la notion de dérivée. Enfin dans cet enchaînement on obtient une expression de la *variation* dont la partie de premier ordre donne la *différentielle*. L'analyse dans le cas des lignes passe de même chez Volterra, suivant un schéma similaire, par une définition de la dérivabilité d'une fonction de lignes à partir de la déformation d'une ligne L et de la variation engendrée pour la fonction U_L avant de donner la forme de la différentielle.

Le travail de Fréchet propose une approche laissant apparaître une réelle différence de point de vue qu'il justifie en remarquant que la présentation de Volterra ne permet pas de traiter des fonctionnelles classiques issues du Calcul des Variations. Ce point de vue différent apparaît jusque dans le choix des notations de la fonction de ligne : alors que Volterra utilise la notation $\varphi|[L]|$ pour désigner la fonction de ligne, Fréchet reprend une notation déjà utilisée par Hadamard U_L où le lien avec la notion de fonction n'est pas totalement transparent. Ici le symbole U_L sert plutôt pour Fréchet à désigner certains éléments du calcul des variations, éléments qu'il identifie comme fonctions de lignes et dont il cherche à mettre en évidence des propriétés.

La stratégie de généralisation qu'adopte Fréchet consiste à considérer en premier lieu les *fonctionnelles* les plus simples que l'on rencontre dans le Calcul des Variations. Fréchet part donc d'une intégrale du type $I_L = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ dont la variation peut s'écrire $\delta I_L = \int_L (I'_x \delta x + I'_y \delta y + I'_z \delta z)ds$. Ainsi une façon de généraliser consiste à prendre cette propriété d'une fonctionnelle particulière

[34]On peut relire le cours d'Hadamard du Collège de France (1898–99) publié en 1903 pour voir un panorama des questions qui sont au cœur des recherches que nous évoquons ici. Il peut être intéressant de consulter parallèlement les *Leçons sur le calcul des variation* [54] publié plus tard en 1910 qui donne un panorama étendu des questions qui tombent sous cette appellation au début du 20^{e} siècle.

comme définition générale. Encore faut-il s'assurer que la nouvelle définition recouvre des cas nouveaux, ce que fait Fréchet en donnant des exemples précis. Les fonctions de lignes ainsi définies à partir de la forme de la variation porteront le nom de Volterra :

> Nous appellerons donc *fonction de Volterra*, ou *fonction* ($\mathcal{V}$), toute fonction de ligne fermée, U_L, satisfaisant aux conditions que nous avons posées au n. 1 et telle que l'on ait
> $$\delta U_L = \int_L (U'_x \delta x + U'_y \delta y + U'_z \delta z) ds,$$
> U'_x, U'_y, U'_z étant des quantités déterminées en chaque point M de toute ligne fermée L. [27, p.560]

En outre cette définition permet de définir plusieurs autres classes de fonctions : les *fonctions* ($\mathcal{V}$) *du premier degré*, c'est à dire celle de la forme I_L qui ont servi à forger la définition étendue, et des *fonctions* ($\mathcal{V}$) *simples* qui se présentent comme fonctions ordinaires d'une seule fonction ($\mathcal{V}$) du premier degré.

Cette approche amène Fréchet à trouver les propriétés caractéristiques des différentes catégories de fonctions ($\mathcal{V}$). En particulier, on retrouve ici, dans un second temps, la notion de linéarité que Volterra avait lui aussi mise en avant :

> Rappelons, pour le généraliser, un théorème de M. Volterra. Désignons avec lui par $L + L'$ un contour fermé (pouvant comprendre plusieurs courbes fermées) et constitué par les contours L et L', où l'on a supprimé les parties communes (s'il en existe) parcourues en sens contraire (car U_L dépend en général du sens de parcours de L). M. Volterra a démontré que les fonctions du premier degré sont les seules fonctions ($\mathcal{V}$) qui vérifient l'équation fonctionnelle
> $$U_{L+L'} = U_L + U_{L'}$$
> Plus généralement, nous allons montrer que les fonctions simples sont les seules fonctions ($\mathcal{V}$) qui vérifient l'équation fonctionnelle
> $$U_{L+L'} = \varphi(U_L, U_{L'}),$$
> φ étant une fonction *ordinaire* (continue et dérivable) de U_L et $U_{L'}$. [27, p.562]

Ces objets seront au centre d'une séries d'études menées par Fréchet dans les années qui suivent et nous montrerons dans une section suivante que ce développement n'est pas déconnecté des idées qui ont permis de forger les espaces abstraits.

Enfin il nous semble important de mettre en avant le positionnement de Fréchet et la stratégie qu'il adopte dans la recherche d'un cadre général d'étude, et de contraster ces éléments avec les idées choisies par Volterra avant lui.

Volterra a conçu le concept de fonction qui dépend d'autres fonctions de façon très générale afin de concevoir toutes les situations rencontrées dans les problèmes fonctionnels. Rappelons, comme on l'a vu dans la première partie, que ce n'est que dans un deuxième temps qu'il avait restreint son point de vue à des cas particuliers pour l'étude des problèmes de variations, à travers le concept de fonctions de lignes et la propriété de linéarité. De plus, afin de transposer les propriétés usuelles des fonctions ordinaires telles la continuité ou la dérivabilité, il avait conçu une notion de voisinage ou de perturbation qui se déclinait en fonction des situations, de la plus générale à la plus particulière. Pour les fonctions qui dépendent d'autres fonctions, il n'y a pas à proprement parler de voisinage et une perturbation est une fonction θ dont les valeurs restent partout petites. Dans le cas des fonctions de lignes Volterra développe une version beaucoup plus géométrique de voisinage qu'il nomme domaine de la ligne L ([111, pp. 237–238]) qui consiste en un tube autour de la ligne L.

La démarche de Fréchet est sensiblement différente. Il utilise une stratégie d'abstraction qui lui permet de prendre en compte des situations classiques afin d'en extraire un point de vue général efficace. Cette stratégie va être mise en place à la lecture des textes de Volterra et donner lieu à deux types de développements.

Le premier est issu de la notion de fonction sur laquelle s'appuie Volterra, et qui semble être un élément majeur dans ce que l'on peut qualifier de processus de généralisation en analyse (du fini vers l'infini comme le diront les acteurs eux-mêmes). Fréchet va donc repenser la notion de fonction et essayer d'extraire les éléments essentiels qui permettent de développer une théorie générale, en se débarrassant de la nécessité d'y voir la variable comme un nombre réel avec tous les outils topologiques alors connus sur $\mathbb{R}$. Cette première approche sera développée dans [27] et constituera le cœur de la thèse de doctorat de Fréchet.

D'autre part, Fréchet en discutant les idées de Volterra, propose un deuxième point de vue : il décide cette fois-ci de partir de la notion de fonction de ligne, qui est aussi l'idée qu'avait retenue Hadamard en publiant [49]. Il s'agit pour lui de partir d'un cas simple où le parallèle avec les résultats déjà établis dans quelques cas particuliers de la théorie des variations est clair et d'en extraire les éléments qui pourraient permettre de concevoir un cadre général. Ainsi, comme nous l'avons montré plus haut, il décide de définir d'abord un type de fonctions de lignes par la forme de leur variation. C'est donc à partir de l'analyse de ce cas simple que Fréchet, par une démarche d'abstraction, met en avant la notion de fonctionnelle linéaire. Il en découle deux problèmes conjoints : le problème de la représentation des opérations linéaires d'une part et l'intégration d'autre part, c'est-à-dire comment retrouver la fonction lorsque l'on connait sa différentielle qui n'est autre qu'une fonctionnelle linéaire. Ces problèmes seront développés essentiellement dans trois notes intitulées *Sur les Opérations linéaires* publiées entre 1904 et 1907 ([29], [30], [31]).

3.2. *Extension de l'étude des fonctions*

3.2.1. *Généralisation d'un théorème de Weierstrass*

Dans [28], Fréchet propose une première direction d'étude générale des fonctions adaptée aux problèmes variationnels. L'introduction pose la visée de l'article en se plaçant dans la lignée d'Hadamard, non seulement pour la notation U d'une fonctionnelle, mais surtout pour les questions de minimum qu'il avait évoquées comme on l'a vu dans la deuxième partie dès 1897 dans [45] :

> On sait l'importance qu'il y aurait, dans un grand nombre de problèmes, à savoir si une quantité U dépendant de certains éléments (points, fonctions, etc.) atteint effectivement un minimum dans le champ considéré. Le principe de Dirichlet offre une des justifications les plus frappantes de cette remarque... [28, p.848]

Fréchet rappelle aussitôt le résultat qu'il a en tête et qu'il voudrait conserver dans le cadre plus général :

> La question est résolue dans le cas particulier où U est une simple fonction de x (ou de plusieurs variables indépendantes). Weierstrass a en effet démontré que toute fonction continue dans un intervalle limité y atteint au moins une fois son maximum. [28, p.848]

Cette propriété dépend bien d'ingrédients que Volterra avait lui-même convoqués dans son approche, à savoir l'utilisation centrale d'une notion (étendue) de fonction et la continuité. Mais il apparaît à Fréchet que les analystes font intervenir dans leurs approches la nature et certaines propriétés des éléments qui servent d'objet ou de variable pour obtenir les résultats modernes de la théorie des fonctions usuelles. Il conçoit donc un cadre général prenant en compte ces aspects et la définition obtenue apparaît comme une extension de celle de Dirichlet :

> Nous supposons donnée une certaine catégorie[35]. C d'éléments quelconques (nombres, surfaces, etc.), dans laquelle on sache discerner les éléments distincts. Nous pourrons dire que U_A est une fonction (ou opération fonctionnelle) uniforme dans un ensemble E d'éléments de C, si à tout

[35] Il faut prendre garde à ne pas donner un sens moderne au mot "catégorie". Ici "catégorie" est employé pour former une certaine typologie. Il s'en suit que dans cet énoncé un ensemble est formé d'éléments d'un certain type déterminé ("nombres", ou "surfaces" etc.)

> élément A de E correspond un nombre bien déterminé U_A. [28, p.849]

On peut remarquer une approche un peu similaire dans [27] où Fréchet avait déjà mis en avant dès son introduction l'ensemble des lignes sur lesquelles agissait la fonctionnelle comme nous l'avons rappelé plus haut.

Dans [27], comme l'avait fait Volterra avant lui, Fréchet définit la continuité de façon particulière à chaque situation. Dans [28] au contraire, Fréchet a une approche beaucoup plus générale dans laquelle une notion de convergence séquentielle est donnée *a priori* :

> Pour arriver à la notion de continuité d'une telle fonction, nous supposerons acquise une définition qui donne un sens précis à cette phrase : *la suite infinie* $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ *d'éléments de* C *a une limite* B. Il nous suffira que cette définition, d'ailleurs quelconque, satisfasse aux deux conditions suivantes : 1° si la suite $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ a une limite, toute suite $A_{p_1}, A_{p_2}, \cdots, A_{p_n}, \cdots$ formée d'éléments d'indices croissants de la première suite a aussi une limite qui est la même : 2° si aucun des éléments $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ d'une suite quelconque n'est distinct de A, cette suite a une limite qui est A. [28, p.849]

Le caractère abstrait de cette notion de convergence va alors permettre de définir les notions de fermé, de continuité et de compact de façon également indépendante de la nature des éléments de C. Par exemple la notion de compact est définie par Fréchet de la façon suivante :

> Nous appellerons *ensemble compact* tout ensemble E tel qu'il existe toujours au moins un élément commun à une suite infinie quelconque d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ contenus dans E, lorsque ceux-ci (possédant au moins un élément chacun) sont fermés et chacun contenu dans le précédent. [28, p.849]

Dans ce cadre, le théorème de Weierstrass trouve une formulation dont la généralité garantit l'applicabilité dans de nombreuses situations :

> THÉORÈME. Toute opération fonctionnelle U_A uniforme et continue dans un ensemble compact et fermé E : 1° est bornée dans E ; 2° y atteint au moins une fois sa limite supérieure. [28, p.849]

Ces idée seront développées et précisées dans la thèse de Fréchet que nous commenterons plus loin. Mais c'est aussi sa stratégie de recherche d'un cadre général pour traiter les problèmes qui nous intéressera dans la suite de notre étude. Elle illustre en effet de façon spectaculaire combien Fréchet amena les concepts de son prédécesseur italien sur un terrain nouveau.

3.2.2. *La thèse de doctorat de Fréchet*

La thèse de doctorat de Fréchet est publiée en 1906 sous le titre ambitieux *Sur quelques points du calcul fonctionnel* ([32]). Nous n'en donnons pas une présentation extensive, mais nous nous contentons de mettre en avant quelques éléments qui prolongent les idées que nous venons de mentionner.

L'ambition de Fréchet est de construire un cadre général pour l'Analyse moderne qui embrasserait un certain nombre de classes de fonctions dotées de propriétés spécifiques. Après avoir rappelé que dans la décennie qui précède, plusieurs mathématiciens (Le Roux, Volterra, Arzela, Hadamard) ont généralisé la notion de fonction en considérant des cas de plus en plus étendus, Fréchet s'engage dans une stratégie qui consiste alors à concevoir pour la variable le cadre le plus large et indéterminé possible.

> Nous dirons qu'une opération fonctionnelle U est définie dans un ensemble E d'éléments de nature quelconque (nombres, courbes, points, etc.) lorsqu'à tout élément A de E correspond une valeur numérique déterminée de $U : U(A)$. La recherche des propriétés de ces opérations constitue l'objet du Calcul Fonctionnel. [27, p.1]

Dès le départ, Fréchet remarque que rien ne semble jouer naturellement et de façon uniforme pour toutes les situations le rôle d'intervalle, notion qui a pris une place essentielle en Analyse pour les fonctions de la variable réelle. Dans un second temps, à l'instar de Volterra, il pense qu'il faut étendre la notion de continuité.

> Nous dirons qu'une opération fonctionnelle V uniforme dans un ensemble E d'éléments d'une classe (L) est continue dans E, si, quel que soit l'élément A de E limite d'une suite d'éléments $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ de E, on a toujours :
>
> $$V(A) = \lim_{n=\infty} V(A_n).$$
>
> [32, p.7]

Au passage, Fréchet note que cette notion trop générale ne permet pas de définir la continuité uniforme dans des ensembles quelconques. Fréchet va alors, à travers les cas particuliers qu'il juge les plus significatifs, considérer progressivement de nouvelles conditions permettant de développer une théorie complète des fonctions. L'examen des champs particulier et de la continuité uniforme (qui jouera un rôle incontournable dans son approche) l'incitent à définir une notion de voisinage et à isoler les ensembles où est définie cette notion de voisinage qu'il nomme classes V.

De même pour utiliser les notions topologiques sous forme séquentielles, Fréchet se place dans un cadre de complétude. Là encore, la généralisation s'opère en conservant une propriété obtenue dans le cas classique comme résultat d'un théorème et en en faisant la caractérisation d'une classe générale :

> Nous dirons alors qu'une classe (Y) admet une généralisation du théorème de CAUCHY si toute suite d'éléments de cette classe, qui satisfait aux conditions de CAUCHY, a un élément limite (nécessairement unique). [32, p.23]

Enfin, Fréchet introduit une dernière classe plus restrictive notée (E) grâce à un voisinage particulier qu'il nomme écart et qui correspond à notre notion de distance. Fréchet pense néanmoins encore à ce moment là que le bon degré de généralité est représenté par sa notion plus large de classe (V).

> Dans la plupart des démonstrations des théorèmes connus, la propriété b) de l'écart intervient dans les raisonnements. Cependant la théorie développée dans ce Chapitre montre qu'elle n'est pas indispensable et qu'il suffit de se servir du voisinage sans avoir besoin pour cela de compliquer notablement le raisonnement. [32, p.30]

Dans la suite de sa thèse, Fréchet examine les conséquences qu'il peut tirer de ses nouveaux concepts en revisitant notamment un certain nombre de cas classiques. Nous ne nous y attardons pas plus ici. Insistons cependant pour terminer cette section sur la façon dont Fréchet, en partant du concept de fonction généralisée mis en avant par Volterra, avait développé ses idées d'espace abstrait et de classes ((L), (V), (E) etc.) pour dessiner le cadre général qui lui paraissait indispensable à l'Analyse pour la débarrasser de pesanteurs inutiles. Il résultait de ce choix d'un cadre très général la possibilité pour Fréchet de donner à ses théorèmes des énoncés définitifs qui s'avèrent exceptionnellement proches de ceux utilisés de nos jours. Hadamard ne s'y trompera pas qui écrira, dans un rapport sur les travaux de Fréchet à l'occasion d'une des candidatures de ce dernier à l'Académie des Sciences [36],

> M. Fréchet nous a appris à raisonner sur des ensembles entièrement abstraits, c'est-à-dire composés d'éléments sur lesquels on ne fait, tout au moins en commençant, aucune hypothèse. Il va d'un coup à l'extrême généralité, une généralité qui, par définition, ne pourra jamais être dépassée.

3.3. *Les opérations linéaires*

Examinons maintenant le deuxième développement issu de l'article [27] et donc directement de l'héritage de Volterra.

[36] Il s'agit ici du rapport d'Hadamard sur la candidature de M. Fréchet à l'Académie des Sciences (1934) que l'on peut consulter aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

Dans ses trois notes sur les opérations linéaires [29], [30] et [31], Fréchet n'adopte pas le cadre général d'étude des fonctions de Volterra. Ces articles s'intéressent directement à un problème que Fréchet avait mentionné dans [27]. Rappelons que Fréchet avait choisi, à la suite de la lecture de Volterra, d'y mettre en avant les fonctionnelles définies par leur variation, en particulier quand cette variation est elle-même une fonctionnelle linéaire. Ceci se traduisait alors par une égalité du type :

$$\delta U_L = \int_L (U'_x \delta x + U'_y \delta y + U'_z \delta z) ds$$

Outre la focalisation sur l'aspect linéaire de la fonctionnelle, cette équation pose le problème de l'intégration de cette formule. L'intégration consiste à déterminer la fonctionnelle U_L uniquement à partir de ses dérivées U'_x, U'_y et U'_z et de la relation que nous avons rappelée au-dessus. Fréchet avait consacré la dernière section de son article de 1904 sur les fonctions de lignes à cette question et était arrivé à une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $(\mathcal{V})$ soit du premier degré (à une constante additive près), stipulant que U'_x, U'_y, U'_z ne dépendent que du point M et de la tangente à L en ce point ([27, p.570]). Ces questions trouvent alors chez Fréchet un prolongement naturel dans le problème général de la représentation des fonctionnelles linéaires, sous forme d'intégrale ou sous forme de série de Taylor comme Volterra l'avait déjà évoqué.

C'est cette suite d'idées que Fréchet entend poursuivre et développer dans ses trois notes [29], [30] et [31], en partant de travaux d'Hadamard qu'il cherche d'abord à étendre [37].

Dès le début de la première note Fréchet expose sous quel angle il regarde les opérations en faisant référence à Hadamard :

> Nous dirons qu'une *opération* est définie si l'on fait correspondre un nombre réel déterminé et fini U_f à toute fonction $f(x)$ réelle et continue entre deux nombres fixes a et b. Nous appellerons avec M. Hadamard *opération linéaire* toute opération qui jouit de deux propriétés suivantes :
>
> (1) elle est *distributive*, c'est-à-dire que si f_1 et f_2 sont deux fonctions continues entre a et b, on a toujours
> $$U_{f_1+f_2} = U_{f_1} + U_{f_2}$$
> (2) elle est *continue*, c'est-à-dire que U_{f_1} tend vers U_{f_2} lorsque la fonction f_1 tend *uniformément* vers la fonction f_2 entre a et b.
>
> [29, p.493]

[37]Ces notes sont d'une importance capitale pour comprendre l'évolution des idées dans la naissance de l'Analyse fonctionnelle. On peut consulter l'article [61] pour une analyse précise des éléments en jeu dans cette optique.

On voit dans ces lignes un point de vue contrasté par rapport à ce qui est proposé dans la thèse. Dans le cadre présenté ici, une opération a pour argument une fonction ordinaire continue et la continuité de l'opération est donnée par la convergence uniforme naturellement disponible pour ces fonctions. Ces éléments sont conformes aux idées échangées entre Volterra et Fréchet, ce dernier, nous l'avons vu, se nourrissant des remarques subtiles d'Hadamard. Les idées sont celles mises en œuvre pour relire les situations connues grâce aux fonctionnelles.

La première note reprend ensuite le résultat de représentation d'une telle opération donné par Hadamard sous forme de limite. Le but essentiel de l'article consiste à trouver un développement similaire à la série de Taylor pour de telles opérations. Fréchet reprend ici les idées d'Hadamard et en particulier son approche centrée sur la décomposition des fonctions en séries de Taylor ([44, 48, 50]).

Fréchet propose alors une série de généralisations essentiellement fondées sur la linéarité de U, sa continuité pour la convergence uniforme et la possibilité de décomposer les fonctions en une série qui converge uniformément. En particulier il utilise la convergence uniforme des moyennes de Césaro démontrée par Fejer pour étudier la convergence de la série de Fourier associée à une fonction périodique continue (voir [?], p.166-167). L'idée est notamment de ne pas faire appel à une hypothèse d'analyticité dont on a remarqué depuis longtemps qu'elle était trop restrictive pour traiter les problèmes de Physique mathématique.

Enfin grâce au développement en série de fonctions de plus en plus générales, Fréchet retrouve le théorème d'Hadamard dans toute sa généralité :

$$U_f = \lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} f(y)H_n(y)dy$$

Fréchet ne s'arrête pas là et analyse alors la formule obtenue : il se demande alors pour quelles fonctions H_n cette expression définit une opération linéaire, et pour quelles fonctions la limite admet elle-même une représentation intégrale à l'aide d'une fonction H continue. En montrant que des fonctions "pathologiques" H_n permettent quand même de donner un sens à une telle intégrale, Fréchet va envisager à nouveau les expressions du type $\int_0^{\pi} f(y)H(y)dy$, expression dans laquelle on ne supposerait même pas que H soit intégrable au sens de Lebesgue.

Là encore on retrouve un procédé cher à Fréchet qui isole une forme, elle-même obtenue comme conséquence d'une démarche classique (ici lorsque l'on dispose d'un théorème de convergence uniforme), pour construire une vision généralisée.

La deuxième note de Fréchet s'occupera d'affiner ces considérations sur la représentation intégrale d'une part mais finira aussi par l'amorce d'un nouveau mouvement et d'une réflexion sur la nature des fonctions f que l'on peut envisager comme objet de l'opération. Il s'agit d'une étape importante que Fréchet isole dans son article dont il intitule une partie *Importance du champ fonctionnel dans lequel on définit une opération linéaire*. Dans cette fin de note, Fréchet montre en particulier que l'on peut définir des fonctionnelles pour des fonctions non continues.

Ce mouvement va amener Fréchet à écrire une troisième note dans laquelle la donnée du champ des fonction f va être centrale. Les deux développements issus de la lecture de Volterra que nous avons suivis s'y retrouvent, chacun largement modifié ou incliné vers la recherche d'une Analyse générale. En fait on assiste ici à une réorganisation complète du discours. Cet article, à l'image de la thèse de doctorat, reprend un exposé qui part du domaine de définition de la fonctionnelle –en supposant désormais que c'est un *champ de fonctions* tout à fait quelconque– et suppose l'existence d'une propriété du type $U_{cf} = cU_f$ pour tout c réel qui découlera en fait de la continuité exprimée de façon particulière pour chaque champ fonctionnel. Au contraire des aspects topologiques vus dans la thèse, ici sont mis en avant des éléments de structure d'espace vectoriel. Pourtant, il s'agit bien des conditions nécessaires à l'expression de la linéarité que Fréchet souhaite conserver ici.

> Définition du champ. Considérons un champ de fonctions de la variable x définies dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Je supposerai que si deux fonctions appartiennent au champ, il en est de même de leur somme. A toute fonction du champ, $f(x)$, nous pourrons faire correspondre un nombre bien déterminé U_f. Nous définirons ainsi une opération dans ce champ de fonctions. Nous dirons que cette opération est *distributive*, si quelles que soient les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ du champ, on a :
>
> $$U_{f_1} + U_{f_2} = U_{f_1+f_2}$$
>
> On en conclut en particulier que l'on a pour toute opération distributive :
>
> $$cU_f = U_{cf}$$
>
> quelle que soit la constante rationnelle c. Pour que cette relation ait lieu même pour c irrationnel, il suffit que U_f satisfasse à une certaine condition complémentaire. Nous allons énoncer plus loin cette condition complémentaire, mais nous l'énoncerons d'une manière particulière pour chacun des champs de fonctions que nous allons examiner. [31, p.433]

Comme on le voit, Fréchet ne fait pas allusion à une quelconque notion d'espace linéaire que l'on retrouve pourtant déjà chez Peano

ou Pincherle. On trouve en effet à la fin du livre de Peano de 1888 [75] un chapitre intitulé "transformation des systèmes linéaires" (*Trasformazioni di sistemi lineari*). Peano y définit tout d'abord la notion de "système linéaire" dans des termes très proches de ceux que l'on utilise de nos jours pour définir les espaces vectoriels. Enfin, dans un second temps, il définit les "opérations", qui font correspondre à un élément d'un système un élément d'un autre système (ou éventuellement du même système). Immédiatement les notions de linéarité ou de distributivité (les deux mots sont employés par Peano) sont mises en avant. Dans cette optique Peano convoque, via la structure de *système linéaire*, les éléments minimaux nécessaires pour développer une théorie des "transformations linéaires" dans laquelle toutes les propriétés nécessaires pour établir les preuves sont explicitement mise en avant dans des définitions introduites dès le départ. Quelques années plus tard, en 1901, Pincherle et Amaldi publient un livre [76] intitulé "Le operazioni distributive e le loro applicazioni all' analisi" qui s'ouvre sur une construction similaire à celle de Peano mettant en avant d'abord des "ensembles ou systèmes linéaires généraux" (*insieme/sistema lineare generale*), c'est-à-dire des ensembles qui possèdent un certain nombre de propriétés qui définissent ce que nous appellerions des espaces vectoriels (la formulation ne diffère que légèrement de celle de Peano). C'est dans ce cadre qu'est définie dès le second chapitre la notion d'"opération" sous la forme d'une "correspondance" (*corrispondenza*) entre les éléments de deux systèmes linéaires.
On voit donc que le positionnement de Fréchet est très différent et qu'il ne reprend pas à son compte les idées de ses prédécesseurs : bien que la citation précédente débute par les mots "Définition du champ" Fréchet ne sélectionne aucune propriété particulière commune aux champs de fonctions qu'il va utiliser. Les collections de fonctions qu'il mentionne, en plus d'être stables par addition afin de définir les opérations distributives, sont considérées avec toutes leurs propriétés sans discrimination. On ne sait donc pas à ce point quelles propriétés des ensembles de fonctions seront utiles pour établir les preuves des théorèmes. C'est la notion de champ de fonction, qui n'est pas définie de façon abstraite ici, qui embarque toutes les propriétés nécessaires pour développer une vision générale, c'est-à-dire une vision qui embrasse tous les cas particuliers de champs de fonctions que Fréchet envisage dans la fin de l'article. Enfin, la définition d'"opération distributive" est introduite de façon explicite et synthétique dans ce contexte.

La fin de [31] permet à Fréchet de spécifier dans différents champs fonctionnels la nature particulière des notions de continuité ou de convergence.

Les motivations initiales qui ont amené Fréchet à penser cette organisation sont sensiblement différentes de celles qui ont motivé les idées exposées dans sa thèse. Néanmoins, on voit ici apparaître un objectif commun qui sous-tend la pensée du mathématicien. Il s'agit pour Fréchet de proposer une vision abstraite et générale pour l'analyse et plus particulièrement à ce stade pour l'Analyse fonctionnelle telle qu'il la conçoit à partir de diverses situations identifiées comme relevant d'un même domaine. De plus, et ceci le lie fortement à Volterra, la notion de fonction généralisée, devenue petit à petit opération fonctionnelle et bientôt opérateur, reste l'élément-clé et déterminant de cette vision générale.

Conclusion

Nous avons cherché à montrer un double regard des mathématiciens français sur les travaux de Volterra. Hadamard a probablement été séduit par les progrès de Volterra effectués dans une vision mathématique qui rejoignait la sienne et une façon d'interpréter les problèmes immédiatement compatible avec ses propres travaux. Il a vu dans les travaux sur les fonctions de lignes un programme ambitieux et adapté aux problèmes d'EDP issus de la physique mathématique qui le préoccupaient au début du 20^e siècle. L'acceptation des idées développées par son collègue italien fut totale et la relation entre les deux homme bascula en quelques années en une véritable amitié personnelle et scientifique. Hadamard et Volterra se retrouveront par la suite souvent, en particulier dans les congrès internationaux, et leurs travaux en Analyse fonctionnelle contiennent souvent des référence louangeuses à l'un et à l'autre. En 1909, Hadamard fut nommé professeur au Collège de France puis élu en 1912 à l'Académie des Sciences, deux positions stratégiques qui lui permirent d'aider à la diffusion des idées de son collègue italien. Le couronnement des efforts conjoints d'Hadamard et de Borel fut l'invitation faite à Volterra en 1912 pour donner à la Sorbonne une série de cours sur les fonctions de ligne, éditée peu après en un livre [118] que Joseph Pérès avait rédigé.

On a vu comment, dans une sorte de passation bienveillante [38], Hadamard avait incité Fréchet à s'intéresser aux travaux de Volterra, et comment Borel avait volontiers facilité la mise en contact entre le jeune mathématicien et son ami Volterra. Une conséquence remarquable de ces forts liens personnels entre Borel, Hadamard et Volterra fut la mise en place au début des années 1910, quand plusieurs nouveaux modes de financements devinrent disponibles en France, de voyages d'étude d'étudiants français auprès de Volterra. Pérès fut d'ailleurs le premier étudiant à prendre la route en 1912, suivi l'année suivante par Gateaux. On pourra sur ce sujet consulter l'étude [69]. Le mouvement fut rapidement perturbé par l'éclatement de la Première Guerre mondiale. La guerre et son cortège de tragédies participèrent d'ailleurs fortement à

[38]On peut lire sur ce sujet [17].

l'évolution des liens entre Volterra et Hadamard (et plus généralement entre Volterra et ses homologues français) [39].

Nous avons vu l'activité de relecture par le jeune Fréchet des travaux sur les fonctions de ligne au moment même où il forgeait son propre programme de recherche et inaugurait sa conception de l'Analyse fonctionnelle en un sens général et abstrait. Il semble que très rapidement Fréchet ait décidé de bâtir un nouvel édifice mathématique qu'il nomma Analyse générale et qui ne saurait pour lui se concevoir comme l'aboutissement d'un programme tel que le proposait Volterra. Une véritable divergence de point de vue est en effet née dans le travail de Fréchet, divergence qui aboutira à une certaine tension entre les deux mathématiciens. On retrouve la trace de ce flottement dans un échange de lettres entre Volterra et Fréchet à partir du printemps 1913. A l'occasion de la publication de [118], Fréchet écrit une lettre à Volterra pour lui indiquer qu'il va lui-même publier sur le sujet :

> Monsieur et cher collègue
> Comme vous publiez un livre sur les fonctions de lignes, j'aurais voulu pouvoir vous envoyer deux articles que j'ai écrit à ce sujet. Malheureusement l'un sous presse tarde à paraitre, l'autre n'est pas encore imprimé. Le premier est d'ailleurs le développement de deux notes parues dans les Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. de Paris (1911, tome 152, pp 854 [40] et 1050) ou plutôt des parties de ces deux notes relatives au Calcul Fonctionnel.
> Peut-être vous intéresserait-il que j'en résume l'essentiel. Si par hasard ces réflexions vous intéressaient, je pourrais vous envoyer le manuscrit de ma note au Congrès des Soc. Savantes de 1912 qui déjà imprimée comme je le disais plus haut n'est pas encore parue. Elle a 19 pages.
> [M. Fréchet à V. Volterra, 26 mai 1913]

Va alors s'engager une discussion tendue entre les deux mathématiciens et un échange de lettres où transparaît le désir de chacun de voir son point de vue reconnu. Les publications de Fréchet mentionnées dans la lettre précédente ([33], [34]) s'intitulent toutes les deux *Sur la notion de différentielle*. Elles ne font certes pas référence aux travaux de Volterra sur le Calcul fonctionnel, mais ce sont deux très courtes notes qui n'entrent pas dans les détails, et qui mettent en avant une façon générale de concevoir la différentielle. La note [35] est plus détaillée et se concentre pendant quatorze pages sur des éléments qui ont pu interpeler Volterra. Les travaux de Volterra y sont rapidement cités et ce fait

[39] Nous renvoyons sur ce sujet au livre [70].

[40] On le trouve en fait à la page 845 et il s'agit probablement d'une coquille dans la lettre de Fréchet.

a probablement provoqué un mouvement d'humeur du mathématicien italien.

> Pour arriver à généraliser les théorèmes du calcul différentiel, il faut généraliser d'abord la notion de dérivée où de différentielle. On pourrait se baser, pour effectuer cette extension, sur la méthode employée dans le Calcul des Variations, qui n'est qu'un chapitre du Calcul Fonctionnel.
>
> C'est la voie suivie par M. Volterra, qui a eu le mérite de développer le premier une théorie cohérente du Calcul Différentiel Fonctionnel. Elle consiste à opérer avec la variation de la fonctionnelle au sens où on entend ce mot dans le Calcul des Variations. Soit la fonctionnelle U_f définie dans le champ des fonctions continues dans un intervalle donné I. M. Volterra considère le cas où la quantité $U_{f(x)+\epsilon\varphi(x)}$ a une différentielle par rapport à ϵ pour $\epsilon = o$: cette différentielle sera par définition la *variation* de U_f pour l'argument $f(x)$. Il remarque que, sous certaines conditions simples, cette variation est de la forme
>
> $$\epsilon \int_a^b \varphi(y)k(y)dy$$
>
> $k(y)$ étant une fonction indépendante de $\varphi(y)$.
>
> Mais M. Hadamard a fait observer que déjà le Calcul des Variations nous offre l'exemple de fonctionnelles très simples dont la variation ne peut se mettre sous cette forme. Il réduit donc la condition de Volterra à celle-ci : la variation de U_f doit être simplement une fonctionnelle linéaire [...] par rapport à l'accroissement $\epsilon\varphi(x)$ de l'argument $f(x)$.
>
> C'est là l'indication essentielle qui formera mon point de départ. Cependant il me paraît nécessaire de faire découler l'existence de la variation de celle de la différentielle et par conséquent de définir d'abord la différentielle d'une fonctionnelle. [35, p.47]

La citation précédente permet de voir les enjeux de ce différend qui va se jouer sur quelques mois sans jamais réellement se résoudre. En premier lieu, Fréchet omet de citer les travaux complets de Volterra qui avait lui-même considéré des points singuliers et des formes de variations tenant compte de ces cas particuliers. Volterra demandera par écrit à Fréchet de bien vouloir rectifier cette omission. Il écrit dans une lettre du 17 Novembre 1913 :

> J'espère aussi que vous aurez corrigé ce que vous avez dit par rapport aux points singuliers. Je tiens beaucoup

> à ce point que j'ai mis en évidence depuis mes premiers mémoires de 1887.

Fréchet s'était empressé, dès les premières remarques de Volterra et avec beaucoup de déférence, de promettre de rectifier ses articles en mentionnant l'étendue exacte des résultats de Volterra. Il ne pût en fait le faire que dans [36] qui parut en 1915. Pourtant même dans cet article citant Volterra, Fréchet introduit des nuances et marque clairement sa différence :

> Aperçu historique
> Le premier essai pour appliquer aux fonctionnelles les procédés du Calcul Différentiel semble être dû à M. Volterra. [...]
>
> M. Volterra ne manqua pas de remarquer qu'une telle définition n'était pas entièrement satisfaisante, puisqu'elle laisse de côté une grande partie des expressions qui interviennent dans le Calcul des Variations, à savoir celles des variations des intégrales définies où les limites ne sont pas fixes. De telles variations comportent en effet, outre une intégrale définie de la forme (1) [$\delta U_L = \int_L U_{L,x} \delta y dx$], des termes finis aux limites. Il convint donc d'ajouter au second membre de (1) des termes qui dépendent, d'une manière spéciale, selon son expression, de certains points exceptionnels. En adoptant la définition de M. Volterra, on s'inspire des premières applications qui se sont présentées et que M. Volterra a traitées avec un succès qui justifie pratiquement sa définition. Mais il était souhaitable au point de vue logique et pour assurer le développement futur de la théorie de déduire la définition d'un principe unique et général. M. Hadamard proposa donc de "considérer comme fonctionnelles auxquelles on peut étendre les méthodes du Calcul Infinitésimal, toutes les fonctionnelles U_y dont la variation est une fonctionnelle linéaire de la variation de y." ([36, p.136])

L'expression "semble être dû à M. Volterra" permettait à Fréchet de dire que le sujet n'appartenait à personne et qu'il se sentait désormais habilité à s'en emparer d'une façon qu'il jugeait novatrice par rapport à ce que Volterra ou Hadamard avaient proposé.

La polémique entre les deux mathématiciens fut en fait de courte durée même si Fréchet adopta une ligne de conduite quelque peu ambiguë. Dans ses publications, il omit quelque temps de citer Volterra comme l'initiateur de l'Analyse fonctionnelle tout en lui écrivant des lettres empreinte d'hommages et de reconnaissances.

> Cher Monsieur,
> Je serais désolé si vous pouviez croire que je n'apprécie

> pas à sa juste valeur votre contribution essentielle au Calcul Fonctionnel. Tout d'abord pas plus que vous je ne vois "de différence entre votre définition de fonction qui dépend de toutes les valeurs d'une autre fonction et les fonctionnelles ainsi que dans leurs calculs". [...]
>
> Si mes idées actuelles peuvent avoir quelque intérêt, ce n'est en tout cas, je le reconnais moi même, que comme perfectionnement secondaire de la belle théorie que vous avez édifiée.
>
> C'est précisément parce que je considère que votre théorie est maintenant suffisamment connue que je n'avais pas cru inutile d'insister sur son importance et que j'avais proposé directement quelques perfectionnement de détails. [M. Fréchet à V. Volterra, 21 novembre 1913]

Au-delà de l'éphémère aspect polémique, ces échanges entre les deux mathématiciens révèlent une différence de vision importante que nous avons mise en relief dans notre étude et signalent, pour ainsi dire, un changement de génération. Si c'est bien l'idée de fonction qui avait permis aux deux mathématiciens de développer dans chaque cas une vision générale et de concevoir une relecture de problèmes fonctionnels dans un cadre abstrait, Fréchet avait eu très tôt le désir de construire une véritable théorie générale dans laquelle s'inscriraient naturellement les problèmes de la physique mathématique chers à ses maîtres. C'est dans cette quête d'une Analyse générale qu'il avait senti le besoin de se détacher de la vision de Volterra. Il n'y avait là aucun manque de respect ou de reconnaissance mais une bifurcation nécessaire à la progression de ces idées. Une conséquence inévitable en fut la migration du centre de gravité des études ultérieures sur l'Analyse fonctionnelle loin du ciel romain.

Références

[1] d'Adhémar, R. Sur une intégration par approximations successives. Bulletin de la Société Mathématique de France, 29 (1901), p. 190-199,

[2] d'Adhémar, R. Sur l'integrations d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, du type hyperbolique, à plus de deux variables indépendantes. C. R. 135, 1100-1102 (1902).

[3] d'Adhémar, R. Sur une classe d'équation aux dérivées partielles, intégrables par approximations successives. C. R. 134, 407-409 (1902).

[4] Ugo Amaldi and Salvatore Pincherle, Le operazioni distributive et le loro applicazioni all'analisi. Bologne, 1901.

[5] Tom Archibald, Tension and potential from Ohm to Kirchhoff, Centaurus 31 (2) (1988), 141-163

[6] Tom Archibald, Connectivity and Smoke-Rings : Green's second identity in its first fifty years. Mathematics Magazine. 62, 4, 219-232, 1989

[7] Tom Archibald & Rossana Tazzioli. Integral equations between theory and practice : the cases of Italy and France to 1920. Archiv for history of exact science, 68, 2014, 547-597

[8] Baker, Bevan, B. and Copson, E.T. The Mathematical Theory of Huygen's Principle. Oxford Clarendon Press, 1939.

[9] Marc Barbut, Bernard Locker et Laurent Mazliak. Paul Lévy - Maurice Fréchet, 50 years of mathematics, Springer, 2013

[10] Marcelin Berthelot. Essai de Mécanique chimique fondée sur la thermochimie. Tome premier : Calorimétrie. Dunod éditeur, Paris, 1879

[11] Luigi Bianchi. Sulle equazioni lineari a derivate parziali del 2o ordine, Rendiconti Accademia dei Lincei, Serie IV, Vol. V, fasc.2, 35-44, 1889

[12] Eugenio Beltrami. Sul Principio di Huygens, Rend. Istituto Lombardo, II, XXII, fasc. X, 1889

[13] Joseph Bertrand. Eloge de Lamé. Séance publique du 28 janvier 1878, Académie des Sciences de Paris.

[14] Emile Borel. Congrès international des mathématiciens. Première session : Zürich, août 1897, Revue Générale des Sciences 783-789, 1897

[15] Emile Borel. Verhandlungen des ersten Internationalen Mathematiker- Kongresses in Zürich, 204-205, 1897

[16] Umberto Bottazini and Rossana Tazzioli. Naturphilosophie and its role in Riemann's mathematics. Revue d'histoire des mathématiques, 1, 3-38, 1995.

[17] Brechenmacher, Frédéric. Jacques Hadamard, passeur. http ://images.math.cnrs.fr/Jacques-Hadamard-passeur.html ; mai 2014.

[18] Emmanuel Carvallo. Sur les systèmes linéaires, le calcul des symboles différentiels et leur application à la physique mathématique. Monatshefte für Mathematik und Physik Volume 2, Issue 1, December 1891, Pages 177-216

[19] Benoît Clapeyron et Gabriel Lamé : Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes, Memoire des Savants Etrangers, IV, 463-562, 1833

[20] Roger Cooke.The Mathematics of Sonya Kovalevskaya. Springer, New-York, 1984

[21] Joseph Coulon. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles. Procès Verbaux de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux, 85-88, 1898-1899

[22] Ulisse Dini. Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. T. Nistri, Pisa, 1878.

[23] G. Le Jeune Dirichlet. Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen. Repertorium der Physik, unter Mitwirkung der Herren LEJEUNE DIRICHLET, JACOBI, NEUMANN, RIESS, STREHLKE, herausgegeben von HEINRICH WILHELM DOVE und LUDWIG MOSER. Bd. I, 1837, pp. 152–174.

[24] Jules Drach. Essai sur la Théorie générale de l'Itération et sur la Classification des Transcendantes. Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 15, pp.243-384, 1898.

[25] P.Duhem. Cours de physique mathématique et de cristallographie de la Faculté des sciences de Lille. Hydrodynamique, élasticité, acoustique : I. Théorémes généraux, corps fluides ; II. Les Fils et les membranes, les corps élastiques, l'acoustique. A. Hermann,1891.

[26] Yu.V.Egorov and M.A.Shubin. Partial Differential Equations I. Foundations of the Classical Theory. Springer, 1998

[27] Maurice Fréchet. Fonctions de Lignes Fermées. *Annales de l'ÉNS*, 1904

[28] Maurice Fréchet. Généralisation d'un Théorème de Weierstrass. *C.R. Ac. Sc., t.139*, Paris, 21 Nov. 1904

[29] Maurice Fréchet, Sur les Opérations linéaires (Note 1) Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 5, No. 4 (Oct., 1904), 493-499.

[30] Maurice Fréchet, Sur les Opérations linéaires (Note 2) Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 6, No. 2 (Apr., 1905), 134-140.
[31] Maurice Fréchet, Sur les Opérations linéaires (Note 3) Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 8, No. 4 (Oct., 1907), 433-446.
[32] Maurice Fréchet. Sur quelques Points du Calcul fonctionnel *Thèse*, Université des Sciences, Paris, 1906
[33] Maurice Fréchet. Sur la notion de différentielle, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris,152, 845–847 (1911).
[34] Maurice Fréchet. Sur la notion de différentielle, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris,152, 1050–1051
[35] Maurice Fréchet. Sur la notion de différentielle dans le calcul fonctionnel. Congrès Soc. Sav. Paris, 1912
[36] Maurice Fréchet. Sur la notion de différentielle d'une fonction de ligne. Transactions of the American Mathématical Society, 15, 1914, 135-161
[37] Hélène Freda. Méthode des caractéristiques pour l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Mémorial des sciences mathématiques. Fascicule 84. Gauthier-Villars, 1937
[38] Johan Gielis, Diego Caratelli, Stefan Haesen and Paolo E. Ricci. Rational mechanics and science rationnelle unique p. 29-43 *in* Stephanos A. Paipetis and Marco Ceccarelli (Editors). The Genius of Archimedes. 23 Centuries of Influence on Mathematics, Science and Engineering. Springer, 2010.
[39] Hélène Gispert. La correspondance de G Darboux avec J Houël : chronique d'un rédacteur (déc. 1869-nov. 1871). Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 8, Inst. Henri Poincaré, 1987, 67-202.
[40] Judith R. Goodstein, The Volterra Chronicles. The Life and Times of an Extraordinary Mathematician, 1860-1940, AMS/LMS, 2007.
[41] Jeremy Gray. Mathematics and natural science in the nineteenth century : the classical approaches of Poincaré, Volterra and Hadamard. Chapter 6 (p.113-135) in U.Botazzini and Amy Dahan-Dalmedico. Changing images in mathematics. From the French Revolution to the New Millenium. Studies in the History of Science, Technology and Medicine. Routledge, 2001
[42] Angelo Guerraggio & Giovanni Paoloni. Vito Volterra. Springer Verlag, 2013.
[43] J. Hadamard. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, Thèse de l'Université de Paris, 1892.
[44] J. Hadamard. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. 1892.
[45] Jacques Hadamard. Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles" (Verhandlungen des ersten Internationalen Mathematiker- Kongresses in Zürich, 201-202, 1897
[46] Jacques Hadamard. Sur l'intégrale résiduelle. Bulletin de la Société Mathématique de France, 28, 69-90, 1900
[47] Jacques Hadamard. Sur les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles. Compte Rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiciens, tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Gauthier-Villars, 1902, 373-376
[48] Jacques Hadamard. Série de Taylor et prolongement. Scientia : Physique-Mathématique n°12. Mai 1901
[49] Jacques Hadamard. Sur les dérivées des fonctions de lignes. Bulletin de la Société Mathématique de France. 30, 40-43, 1902
[50] J. Hadamard. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développements de Taylor. Étude sur les propriétés des fonctions entières, et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. (Mémoire couronné par l'Académie des Sciences.). Paris : Hermann. 132 S. 4e, 1902.

[51] Jacques Hadamard. Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Hermann, 1903
[52] Jacques Hadamard. Sur les opérations fonctionnelles, 136, 351-354, 1903
[53] Jacques Hadamard. Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mémoires présentés par différents savants à l'Académie des Sciences, XXXIII, 4, 1907
[54] Jacques Hadamard. Leçons sur le calcul des variations. Tome premier : La variation première et les conditions du premier ordre ; les conditions de l'extremum libre. Paris : A. Hermann et Fils. VIII + 520 S. 4e, 1910
[55] Jacques Hadamard. L'œuvre de Duhem dans son aspect mathématique. Mémoire de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 1, 637-665, 1927
[56] Jacques Hadamard. Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel, Atti del Congresso dei Matematici di Bologna, Volume 1, 143-161, 1928
[57] Jacques Hadamard : An essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field. Princeton University Press, 1945.
[58] Thomas Hawkins. Lebesgue's theory of integration,its origin and development, AMS, 2001.
[59] Hermann von Helmoltz. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 57,1.,1-72. 1860
[60] Stanley L.Jacki : Lettres de Pierre Duhem à sa fille Héléne, Beauchesne, 1894
[61] Frédéric Jaëck, Éléments structurels en analyse fonctionnelle : trois notes de Fréchet sur les opérations linéaires. Archive for History of Exact Sciences, 2010, 64, 461-483.
[62] Gustav Kirchhoff. Zur Theorie des Lichtstrahlen. Annalen der Physik, Volume 254, Issue 4, 663-695, 1883
[63] Sophie Kowalevski. Über die Brechung des Lichtes In Cristallinischen Mitteln. Acta Mathematica 6, 1885, 249–304
[64] Gabriel Lamé. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps. Bachelier, 1852. (2ème édition. Gauthier-Villars, Paris, 1866)
[65] J.-M.Le Roux : Sur les intégrales des EDP linéaires du second ordre à deux variables indépendantes, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, XII, 1895
[66] Paul Lévy : Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien, Blanchard, 1970.
[67] Maggi G.-A. Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in mezzo isotropo. Annali di Matematica Pura ed Applicata. 16, 21-48.1888-1889
[68] Laurent Mazliak.The Ghosts of the Ecole Normale : Life, death and destiny of René Gateaux. 2011. To appear.
[69] Laurent Mazliak. Volterra and the exchanges of students between Italy and France. To appear. 2015
[70] Laurent Mazliak and Rossana Tazzioli. Mathematicians at war, Springer, 2009
[71] Vladimir Maz'ya and Tatyana Shaposhnikova. Jacques Hadamard, A Universal Mathematician. American Mathematical Society-London Mathematical Society, 1998
[72] Pietro Nastasi and Emma Sallent del Colombo : Mittag-Leffler Volterra correspondence, to appear
[73] Padova, Ernesto. Una nuova interpretazione dei fenomeni elettrici, magnetici e luminosi. Pisa, Tip. Pieraccini, 1891.
[74] Giuseppe Peano. Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale. Fratelli Bocca, Torino, 1887.

[75] Giuseppe Peano. Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva. Fratelli Bocca Editore, 1888
[76] Salvatore Pincherle e Ugo Amaldi. Le operazioni distributive e le loro applicazioni all' analisi. Zanichelli, 1901.
[77] François Plantade : La diffusion des géométries non euclidiennes dans le bassin méditerranéen vers 1870 sous l'impulsion de Jules Houël (1823-1886), preprint, 2014
[78] Bernhard Riemann. Sur la propagation d'ondes aériennes planes. Académie Royale des Sciences de Göttingen, VIII, 1860
[79] Joseph-Alfred Serret. Cours de Calcul Différentiel et Intégral. Gauthier-Villars, 1868.
[80] Reinhardt Siegmund-Schultze. Die Anfänge der Funktionalanalysis und ihr Platz im Umwälzungsprozeß der Mathematik um 1900, Archive for History of Exact Sciences Volume 26, Issue 1 , pp 13-71
[81] Angus E. Taylor. A Study of Maurice Fréchet. I. His Early Work on Point Set Theory and the Theory of Functionals. *Archive for History of Exact Sciences*, 27(3), 1982.
[82] Angus E. Taylor. A Study of Maurice Fréchet. II. Mainly about his Work on General Topology, 1909–1928. *Archive for History of Exact Sciences*, 34(4), 1985.
[83] Angus E. Taylor. A Study of Maurice Fréchet. III. Fréchet as Analyst, 1909–1930. *Archive for History of Exact Sciences*, 37(1), 1987.
[84] Michael E.Taylor : Partial Differential Equations I. Basic theory. 2nd Edition. Springer, 2011 -
[85] R.Tazzioli. Ether and Theory of Elasticity in Beltrami's Work , Archive for History of Exact Science, 46 , 1-38, 1993
[86] R.Tazzioli. Construction engineering and natural philosophy : the work by Gabriel Lamé, in P.Radelet-de Grave, Edoardo Benvenuto : Between Mechanics and Architecture, Birkhäuser, 1995, 316-330
[87] Tazzioli, Rossana. Green's Function in Some Contributions of 19th Century Mathematicians. Historia Mathematica 28, 232–252, 2001.
[88] Orazio Tedone. Sull'integrazione dell'equazione $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \sum_{1^m} \frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_i}^2} = 0$.Annali di Matematica,III, 1. 1-23, 1898
[89] M.Vezes. Rapport. Cinquantenaire de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, Gauthier-Villars, 17-18. 1906
[90] Vito Volterra. Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue. Giornale di Matematiche, 19, 1881, 76-87
[91] Vito Volterra. Sui principii del calcolo integrale. Giornale di Matematiche, 19, 1881, 333-372
[92] Vito Volterra. Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents. Acta Mathematica, 16, 1892, 153-215
[93] Vito Volterra. Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari. Memorie della Società Italiana delle Scienze detta dei XL, III, 6, 1887, 1-107
[94] Vito Volterra. Sulle equazioni differenziali lineari. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, IV, 3, 1887, 393-396
[95] Vito Volterra. Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 2, 1888, 69-75
[96] Vito Volterra. Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni (Nota I). Rendiconti dell'Accademia dei Lincei. IV, 3, 1887, 97-105
[97] Vito Volterra. Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni (Nota II). Rendiconti dell'Accademia dei Lincei. IV, 3, 1887, 141-146

[98] Vito Volterra. Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni (Nota III). Rendiconti dell'Accademia dei Lincei. IV, 3, 1887, 153-158
[99] Vito Volterra. Sopra le funzioni dipendenti da linee (Nota I). Rendiconti dell'Accademia dei Lincei. IV, 3, 1887, 225-230
[100] Vito Volterra. Sopra le funzioni dipendenti da linee (Nota II). Rendiconti dell'Accademia dei Lincei. IV, 3, 1887, 274-281
[101] Vito Volterra. Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse. Nota I. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, IV, 3, 1887, 281-287
[102] Vito Volterra. Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse. Nota II. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, IV, 4, 1888, 107-115
[103] Vito Volterra. Nota III. Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, IV, 4, 1888, 196-202
[104] Vito Volterra. Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni. Rendiconti Accademia dei Lincei, 3, 97-105, 1887
[105] Vito Volterra. Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni (Nota I). Rendiconti Accademia dei Lincei, 3, 97-105, 1887
[106] Vito Volterra. Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni (Nota II). Rendiconti Accademia dei Lincei, 3, 141–146, 1887
[107] Vito Volterra. Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni (Nota III). Rendiconti Accademia dei Lincei, 3, 153–158, 1887
[108] Vito Volterra. Sopra le funzioni dependenti da linee. (Nota I) Rendiconti Accademia dei Lincei, 3, 225–230, 1887.
[109] Vito Volterra. Sopra le funzioni dependenti da linee. (Nota II) Rendiconti Accademia dei Lincei, 3, 274–281, 1887.
[110] Vito Volterra. Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. Acta Mathematica, 12, 1889, 233-286
[111] Vito Volterra. Sur une Généralisation de la Théorie des Fonctions d'une Variable imaginaire. Acta. Math. t.12, pp.233–286, 1889.
[112] Vito Volterra. Sopra le equazioni di Hertz. Nuovo Cimento, 39, 53-63. 1891
[113] Vito Volterra. Sopra un'estensione della teoria Jacobi-Hamilton del calcolo delle variazioni. IV, 6, 1891, 127-138
[114] Vito Volterra. Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents. Acta Mathematica, t. XVI, 153-215, 1892.
[115] Vito Volterra. Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, s. V, vol. I2. 161-170. 1892.
[116] Vito Volterra. Un teorema sugli integrali multipli. Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino. 32, 1896-97, 859-868
[117] Vito Volterra. Sur les équations aux dérivées partielles. Compte Rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiciens, tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Gauthier-Villars, 1902, 377-378
[118] Vito Volterra. Leçons sur les fonctions de ligne, rédigées par Joseph Pérès. Gauthier-Villars, Paris, 1913
[119] Vito Volterra and Joseph Pérès, Théorie générale des fonctionnelles, Gauthier-Villars, Paris, 1936.