Demande d'habilitation à diriger les recherches présentée à l'Université Paris VI

Laurent MAZLIAK
Laboratoire de Probabilités
Université Paris VI

soutenue le Vendredi 13 octobre 2000
à l'Université Paris VI

Jury:

Nicole EL KAROUI, Professeur à l'Ecole Polytechnique

Monique JEANBLANC, Professeur à l'Université d'Evry-Val d'Essonne

Jean JACOD, Professeur à l'Université Paris VI

Pierre PRIOURET, Professeur à l'Université Paris VI

———————-

Rainer BUCKDAHN, Professeur à l'Université de Brest (Rapporteur)

Gianbattista DI MASI, Professeur à l'Université de Padoue (Rapporteur)

Shige PENG, Professeur à l'Université de Shandong (Rapporteur)

Prélude

Dix ans se sont écoulés depuis la soutenance de ma thèse d'université. L'année 1990 fut pour moi particulièrement riche. Qu'il me soit permis ici d'utiliser cette tribune pour parler de l'anniversaire d'un autre événement...

Il est difficile en quelques lignes de parler de façon convaincante d'une formation aussi mouvante et profonde qu'un quatuor à cordes. Ceux qui la connaissent n'apprendront rien et ceux qui l'ignorent auront sans doute du mal sur un temps aussi court à saisir la prodigieuse alchimie de cette action de grâce à quatre voix.Une des manières les plus propres à surprendre le profane vient certainement de la simple énumération d'un répertoire dont la richesse est alimentée depuis deux siècles par les créateurs musicaux les plus inventifs de leur époque.

Ce partage entre mathématique et musique n'est pas allé de soi. Le microcosme scientifique - à l'instar du milieu musical qui évidemment est lui plus à son aise dans le show-business - cultive trop l'idée que l'activité en soi ne doit avoir pour but que d'épater la galerie et de marquer les esprits forts du temps, même si cette pensée n'est que rarement explicitée, pour que l'on puisse faire l'économie d'être assailli de doutes.

On peut rêver, rêvasser à ce qu'on aurait pu être

Mais c'est foutu c'est classé ce n'est pas plus mal peut être...

Je ne rentrerai pas dans l'histoire (ni de la science ni de la musique!) mais est-ce que rentrer dans l'histoire est l'unique achèvement d'une vie? Ces doutes ont été jusquà présent, bon an mal an, surmontés.

Il en eut fallu bien d'autres

Que quelques mauvais apôtres...

Avec ce que j'ai dit jusque là, on pourrait penser que cette aventure relève d'abord d'une pure et froide démarche intellectuelle. Or, dans la magie de cette fusion, dans cette tension vers l'écoute de 'l'Esprit qui parle' comme le disait Beethoven , il y a avant tout une rencontre humaine et une histoire d'amour. Avec les quelques fous qui m'ont accompagné dans cette marche au cours des années passées et de centaines de concerts sur les routes de France, il a fallu traverser crises et moments d'intense émotion, et à travers eux toujours chercher à découvrir l'autre dans ses questionnements, ses petitesses et ses grandeurs. Et je ne peux terminer ce prélude sans citer au moins ceux qui actuellement composent le Quatuor Hypoténuse pour passer le cap de ses dix ans: merci donc à vous Ludovic, Bertrand et Nicolas pour tant d'instants flamboyants que nous avons partagés...

Fugue

Après ce que je viens de dire, se livrer à l'exercice habituel d'ânonner une série de remerciements formels concernant les gens que j'ai pu côtoyer dans le milieu mathématique depuis que je le fréquente risque d'apparaître comme une insulte, d'autant plus que le risque toujours grand d'oublier quelqu'un lui fera se demander s'il aurait préféré se voir ou ne pas se voir dans la liste!

Aussi ne voudrais-je dire qu'une chose: c'est là aussi dans les richesses d'une rencontre humaine - et éventuellement bien entendu à travers le canal privilégié et magnifique d'échanges mathématiques que j'ai pu vivre avec plénitude ces années. La clarté d'esprit, la créativité, la force de conviction et l'humanité qu'il m'est arrivé de trouver chez mes interlocuteurs ont toujours été vécus par moi comme un acte d'amour dont ils me faisaient gratuitement le don.

Ceux à qui je dois quelque chose, et ils sont nombreux, sauront s'y reconnaître...

Les Ceriseaux, 20 septembre 2000

Sommaire

Document de Synthèse

Introduction

L'essentiel des travaux qui composent cette habilitation se situent dans le cadre de l'opti misation stochastique, et plus précisément du contrôle stochastique. J'ai cependant tenu à joindre en complément quatre articles très différents que je commenterai plus loin pour donner une idée de ce qui m'a interessé depuis une dizaine d'années.

Il est peut être souhaitable en préambule d'expliquer pourquoi les sujets tournant autour du contrôle stochastique m'ont paru suffisamment riches pour occuper une grande partie de mon activité de recherche. En effet, avec le recul dont nous disposons maintenant, il semble clair que l'heure de gloire de la théorie abstraite du contrôle stochastique s'est située dans la décennie 1970-1980 [15]. Les raisons pour cela sont diverses mais on peut y voir avant tout la conjonction entre la disponibilité d'une théorie générale des processus parachevée (on a un repère en sachant que l' édition finale [9] du traité de Dellacherie et Meyer date de 1980) et le désir de prendre un (timide) contact avec des applications des probabilités. En 1987, lorsque j'ai commencé ma thèse sous la direction de Nicole El Karoui, l'intérêt porté à la théorie du contrôle était en nette décrue, décrue qui s'est finalement terminée en affaissement lors de l'apparition tumultueuse des mathématiques aléatoires de la finance. Pourtant, trois faits retenaient un peu l'attention. Dans les cinq années précédentes, un certain nombre de méthodes (technique de compactification, principe stochastique de Pontryagin...) avaiet été mises au point pour assurer l'existence dans un cadre très général de contrôles optimaux ayant de bonnes propriétés (markoviens dans un sens assez faible): ces méthodes méritaient qu'on s'y attarde un peu et qu'on cherche à les étendre et à les exploiter. Par ailleurs, les gens (du moins en France) s'étaient assez peu préoccupés de résolutions algorithmiques des problèmes et les exceptions (A.Bensoussan et J-L.Lions, P-L.Lions,...) l'avaient fait par des méthodes relevant plutôt de l'analyse fonctionnelle que des probabilités. On peut quand même citer par exemple Quadrat [26] qui à la suite de techniques dont Kushner [17] fut un grand promoteur, a regardé de multiples méthodes de résolution pratique. Enfin, les problèmes partiellement observables restaient largement à étudier, tout spécialement dans le cas du contrôle mixte (choix simultané d'un contrôle et d'un temps d'arrêt).

Je vais dans un premier temps présenter les travaux théoriques qui composent ce recueil qui portent sur le prolongement des méthodes de compactification à différents cas de contrôle mixte.

1 Autour des méthodes de compactification

La note au CRAS " Etude d'un problème de contrôle stochastique partiellement observable avec sauts" qui date de 1989 donne le programme général auquel nous nous sommes attelés: prolonger les méthodes de compactification obtenues dans le cas des diffusions continues par [12],[13] au cas de processus avec sauts. Notre espoir initial était paradoxalement de pouvoir avancer dans l'étude de certains de ces problèmes à travers la résolution de l'équation d'HJB qui est ici intégro-différentielle mais il a vite fallu déchanter même dans le cas simple présenté par la Note où l'état est à valeurs dans un ensemble fini et l'observation un processus ponctuel. Du coup, cependant, l'intérêt des méthodes probabilistes se trouvait renforcé et nous avons regardé le problème dans un cadre plus général, composant l'article "Mixed Control Problem Under Partial Observation". Ici, le couple état / observation (x_t, y_t) est un processus dont le générateur contrôlé Λ^u est donné par

$$\Lambda^u f(t,x,y) = A^u f(t,x,y) + h(t,x)\{f(t,x,y+1) - f(t,x,y)\}$$

où A^u est supposé ne concerner que la variable x. Le but est de trouver un contrôle (u_t) à valeurs dans un espace métrique U et un temps d'arrêt S adapté à la filtration de l'observation $\mathcal{Y}_t = \sigma(y_s, s \leq t)$ de façon à minimiser un coût $J = E(\int_0^S L(t, x_t, y_t, u_t)dt + g(S, x_S, y_S))$.

Les méthodes de compactification sont alors fondées sur trois arguments:

a) Le problème est projeté sur la filtration de l'observation de façon à se ramener à un problème complètement observable dont la dynamique est le filtre $\pi_t(f) = P(f(x_t)/\mathcal{Y}_t)$ qui satisfait une équation de Kushner-Stratonovitch (K-S):

$$\begin{cases} d\pi_t(f) = & \pi_{t-}(A^{u_t} f)dt + \dfrac{\mathrm{cov}\pi_{t-}(f,h)}{\pi_{t-}(h)}(dy_t - \pi_{t-}(h)dt) \\ \pi_r(f) = & f(x). \end{cases}$$

b) Les contrôles sont relaxés c'est à dire qu'on remplace le contrôle u_t par une probabilité q_t sur l'espace des valeurs de contrôle U. Plus précisément, toute quantité du type $\int_0^T g(t, u_t)dt$ est remplacée par $\int_0^T \int_A g(t,u)q(dt,du)$ où la mesure aléatoire $q(dt,du)$ est supposée se décomposer sous la forme $q_t(du)dt$ où pour chaque t, q_t est une probabilité sur U. En particulier, les processus de contrôle usuels (u_t) sont identifiés avec le contrôle relaxé $\delta_{u_t}(du)dt$ (où δ_η désigne la mesure de Dirac en η).

c) On prend des contrôles faibles où l'espace de probabilités entre lui-même dans la définition du contrôle. Autrement dit, on se permet de ne travailler qu'en loi, ce qui autorise l'énoncé d'une forme canonique du problème en définissant des règles de contrôle - arrêt, comme les lois des processus (π, y, q, S).

Quatre espaces canoniques (munis des processus canoniques des coordonnées) rentrent en jeu:

- $(Y, (y_t))$, ensemble des fonctions càdlàg de $[0,T]$ dans $\mathbf{N}$ (espace de l'observation)

- $(\Pi, (\pi_t))$, ensemble des fonctions càdlàg de $[0,T]$ dans $\mathcal{P}(E)$ (espace du filtre)

- $(V, (q_t))$, ensemble des mesures sur $[0,T] \times U$ dont la projection sur $[0,T]$ est la mesure de Lebesgue.

- $(A, (a_t))$, ensemble des fonctions croissantes continues à gauche de $[0,T]$ dans $\{0,1\}$ (espace des temps d'arrêt, représentés par leur "fonction de répartition")

Definition 1.1 *On appelle règle de contrôle-arrêt de conditions initiales* (r, μ, y) *une probabilité* R *sur* $\Pi \times Y \times V \times A$ *telle que*

(i) $R(a_r = 0) = 1$

(ii) $R(y_s = y, \pi_s = \mu, s \leq r) = 1$

(iii) Sous R, (y_s) *est un processus ponctuel d'intensité* $\pi_s(h)$ *et* (π_s) *est une solution de l'équation (K-S).*

Ceci fait, et c'est le grand mérite des méthodes probabilistes, on peut énoncer dans un cadre extrêmement général, un Principe de Programmation Dynamique et obtenir comme corollaire un critère d'optimalité pour une règle de contrôle- arrêt; en termes non ésotériques, ce résultat traduit le fait que pour tout contrôle q et tout temps d'arrêt S, désignant par Q la fonction de valeur du problème, le processus

$$(\int_r^{t\wedge S} L(\alpha, \pi_\alpha, y_\alpha, q_\alpha)d\alpha + \mathbf{1}_{S>t}Q(t, \pi_t, y_t) + \mathbf{1}_{S\leq t}g(S, \pi_S, y_S))_{t\geq r}$$

est une sous-martingale et une martingale si et seulement si le couple (q, S) est optimal.

On obtient également "gratuitement" la forme standard d'un temps d'arrêt ε-optimal

$$D^\varepsilon = \inf\{t, Q(t, \pi_t, y_t) \geq g(t, \pi_t, y_t) - \varepsilon\}.$$

Au prix de quelques hypothèses supplémentaires sur la continuité des fonctions intervenant dans le problème et sur la compacité de l'ensemble A des valeurs de contrôle , on peut démontrer la continuité du coût (elle était évidente en l'absence de sauts mais recquiert ici un peu de travail), la compacité de l'ensemble des règles de contrôle-arrêt (en tant qu'ensemble de lois), et finalement l'existence d'une règle de contrôle-arrêt optimale dont on prouve également le caractère markovien (Théorème 2.18).

Reste encore un (gros) problème: s'assurer que le coût optimal (la fonction de valeurs) n'a pas été modifiée en s'autorisant les " élargissements" a,b,c. Ce travail pénible et extrêmement technique fait l'objet de la troisième partie de l'article ; il repose sur une hypothèse supplémentaire d' " unicité faible" de l'équation de Kushner-Stratonovitch. Toujours sous cette hypothèse, nous avons montré le même type de résultat dans le cas où l'intensité du processus ponctuel (y_t) dépend du contrôle c'est à dire quand la fonction h est de la forme $h(t, x, u)$ ("Comparison between optimal costs for relaxed and non-relaxed control problems with jumps") .

Je présente ensuite trois papiers illustrant l'utilisation qui peut être faite des méthodes probabilistes pour le contrôle. Le premier d'entre eux ("An algorithm for a stochastic control problem under partial observation") prolonge l'étude qui avait été faite par Pragarauskas [25] en 1983 pour obtenir un algorithme de calcul de la fonction de valeurs d'un problème de contrôle de diffusion avec sauts, en utilisant les méthodes introduites par Kushner [17] dans les années 70. L'idée principale est de discrétiser en temps et en espace le générateur du processus contrôlé et de regarder le résultat obtenu comme le générateur d'une chaîne de Markov discrète. Le cas étudié dans l'article est celui qui correspond à l'étude théorique présentée dans la Note au CRAS (problème mixte avec état prenant deux valeurs et observation donnée par un processus ponctuel); dans ce cas l'équation pour le filtre est uni-dimensionnelle donnée par

$$\pi_t = \pi_0 + \textstyle\int_0^t \Big\{ \begin{array}{l} \lambda(1-2\pi_s) + [h_1\pi_{s-} + h_2(1-\pi_{s-}) - h_1]\Big\} u_s ds + \\ \int_0^t \pi_{s-}\big(\frac{h_1}{h_1\pi_{s-}+h_2(1-\pi_{s-})} - 1\big) dy_s \end{array}$$

et l'équation d'HJB

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t}(s,x) + u^*(\widetilde{L}(s,x) + \psi(s,x))\{\widetilde{L}V(s,x) + \psi(s,x)\}$$

avec

$$u^* = \begin{cases} a_{\min}, & y \geq 0 \\ a_{\max}, & y < 0 \end{cases}$$

où

$$\begin{array}{ll} \widetilde{L}F(s,x) = \Big[\{F(s, \frac{h_1 x}{h_1 x + h_2(1-x)} &) - F(s,x) \\ & -\frac{\partial F}{\partial x}(s,x)x(\frac{h_1 x}{h_1 x + h_2(1-x)} - 1)\} \\ (h_1 x + h_2(1-x)) + & \frac{\partial F}{\partial x}(s,x)\lambda(1-2x)\Big]. \end{array}$$

On choisit alors des pas de discrétisation $\Delta_n t$ et $\Delta_n x$ en temps et en espace et on considère le générateur L_n^u

$$L_u^n F(s,x) = \sum_{t=0}^{T_n-1} \sum_{i=0}^{K_n-1} \mathbf{1}_{t\Delta_n t \leq s < (t+1)\Delta_n t} \mathbf{1}_{t\Delta_n x \leq x < (t+1)\Delta_n x}$$

$$\begin{aligned} \Big\{ & (1 + \frac{\Delta_n t u}{\Delta_n x} \mid b(i) \mid -(h_1 i\Delta_n x + h_2(1 - i\Delta_n x))(F(t\Delta_n t, i\Delta_n x) - F((t-1)\Delta_n t, i\Delta_n x)) \\ & +(-b(i)u\frac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{1}_{b(i)\leq 0})(F(t\Delta_n t, (i-1)\Delta_n x) - F((t-1)\Delta_n t, i\Delta_n x)) \\ & +(b(i)u\frac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{1}_{b(i)\geq 0})(F(t\Delta_n t, (i+1)\Delta_n x) - F((t-1)\Delta_n t, i\Delta_n x)) \\ & \Delta_n t.u.(\frac{h_1 i}{h_1 i\Delta_n x + h_2(1 - i\Delta_n x)} - i^*)(F(t\Delta_n t, i^*\Delta_n x) - F((t-1)\Delta_n t, i\Delta_n x)) \\ & \Delta_n t.u.(1 + i^* - \frac{h_1 i}{h_1 i\Delta_n x + h_2(1 - i\Delta_n x)} - i^*)(F(t\Delta_n t, (i^*+1)\Delta_n x) - F((t-1)\Delta_n t, i\Delta_n x))\Big\}. \end{aligned}$$

C'est le générateur d'une chaîne de Markov contrôlée discrète. Pragarauskas a montré que la fonction de valeurs du problème de contrôle qui y est naturellement associé converge vers celle du problème initial. La preuve du résultat d'approximation dans le cas du contrôle mixte arrive à se raccrocher à celle de Pragarauskas en utilisant la forme explicite d'un temps d'arrêt ε-optimal, D^ε, obtenu dans l'étude générale (voir ci-dessus).

La deuxième des applications concerne les problèmes de viabilité pour une diffusion contrôlée. Michta [20] en 1998 avait introduit la notion de viabilité faible pour une diffusion solution de l'EDS

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t : \tag{1.1}$$

l'ensemble K est dit faiblement viable si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $x \in K$ et une solution faible de (1.1) tels que $X_0 = x$ et $\forall t \in [0,T], P^{X_t}(K) \geq 1 - \varepsilon$ où P^{X_t} désigne la loi de X_t. Il avait montré qu'une telle condition est presque équivalente à une condition tangentielle faible signifiant qu'il est toujours possible de poursuivre sur un petit intervalle de temps $[t, t']$ en restant dans K avec une forte probabilité une solution faible de l'équation qui est dans K à l'instant t. Précisément, cette condition stipule que pour tout $t \in [0,T]$ et tout vecteur aléatoire $\xi, \mathcal{F}_t$- mesurable tel que $P(\xi \in K) \geq 1 - \varepsilon$, on peut trouver $\eta > 0$, une solution faible de (1.1) - dont on sait qu'on peut l'écrire $X_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\widetilde{W}_t$ pour un certain mouvement brownien $\widetilde{W}$ et une suite de processus adaptés et continus sur $[t, t+\eta], (U_s^n, V_s^n)_{s \in [t, t+\eta]}$ tels que pour tout $\alpha \in [t, t+\eta]$:

(i)

$$P^{\xi + \int_t^\alpha U_s^n ds + \int_t^\alpha V_s^n d\widetilde{W}_s}(K) \geq 1 - \varepsilon$$

(ii) $(U_s^n, V_s^n)_{s \in [t, t+\eta]}$ converge en probabilités vers $(b(s, Y_s), \sigma(s, Y_s))_{s \in [t, t+\eta]}$ dans $\mathcal{C}([t, t+\eta], \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n \times n})$

J'ai étendu dans " A note on weak viability for a controlled diffusion" ce résultat en considérant une diffusion contrôlée $dX_t^u = b(t, X_t^u, u_t)dt + \sigma(t, X_t^u, u_t)dW_t$ et en définissant la viabilité faible de K par: $\forall \varepsilon > 0, \exists u, \forall t \in [0,T], P^{X_t^u}(K) \geq 1 - \varepsilon$. La condition tangentielle revient ici à demander qu'on puisse poursuivre dans K au delà du temps t pendant un petit intervalle de temps $[t, t+\eta]$ en gardant un contrôle constant (en temps) sur l'intervalle. La preuve qui use d'arguments topologiques repose fortement sur les méthodes de compactification.

Le troisième article écrit en commun avec N.El Karoui et A.Gerardi avait trouvé son origine dans une belle rencontre mathématique en 1988. Des chercheurs italiens de l'Université de Rome avaient eu à étudier un problème de fiabilité pour l'Agence Nucléaire Italienne. Ce problème une fois posé se trouvait être exactement un problème de contrôle mixte partiellement observable où l'état était une variable aléatoire inconnue et l'observation un processus ponctuel. Un bienheureux hasard m'avait fait entendre G.Del Grosso exposant le problème lors du congrès Bernoulli [8] et une collaboration chaleureuse a pu commencer. A la base, donc, un certain nombre N_t (modifiable en temps réel) d'objets susceptibles de panne est soumis à un test (stress au niveau S_t, également modifiable en temps réel). On observe alors le processus ponctuel que composent les temps de panne successifs des objets, Y_t, dont l'intensité est de la forme $\alpha S_t \beta(N_t - Y_t)$. Le problème central est que α et β sont inconnues. On cherche lors du test à obtenir des informations sur elles, par exemple en se plaçant dans une optique bayésienne où α et β sont munies d'une loi *a priori* dont on cherche en fin de test à avoir diminué la variance, tout en limitant le coût engendré par le stress : l'idée est bien sûr que plus le stress est élevé, plus on obtient rapidement des informations sur α et β, mais plus, aussi, le coût de réalisation du test est grand. Bref, une situation typique de contrôle: l'état (ici fixe) est le couple (α, β), l'observation le processus Y_t, le contrôle le couple (N_t, S_t) et on cherche a minimiser un coût de la forme

$$J(U) = E(\int_r^T cS_t(N_t - Y_t)dt + I(\pi_T))$$

(π désignant comme d'habitude le filtre). Une idée centrale dans le papier est qu'on peut se ramener, en raison de la forme particulière du générateur du couple (Y_t, π_t), à établir une équivalence entre le problème en question et un problème de contrôle mixte, le processus N_t étant remplacé par le temps d'arrêt $\rho = \inf\{t, N_t - Y_t = 0\}$ (cf. partie 4, pp.317 *et seq.*) [1]. L'article "Stochastic Control Methods in Optimal Design of Life Testing" présente la façon dont les méthodes de compactification peuvent être appliquées à de tels problèmes pour obtenir des résultats d'existence de contrôle optimaux, la forme des temps d'arrêt ε-optimaux, des algorithmes d'approximation de la fonction de valeurs. Il présente aussi quelques résultats autour des mêmes méthodes appliquées quand l'observation est un processus de branchements au lieu d'un processus ponctuel, un modèle vaguement inspiré d'une situation biologique, les objets inertes précédents étant remplacés par des graines se multipliant.

2 Algorithmes

Comme je l'ai dit en introduction, une fois la théorie générale du contrôle stochastique une fois parachevée, on s'est naturellement tourné de plus en plus vers la mise en œuvre de procédures algorithmiques pour la résolution, et tout spécialement pour le calcul des fonctions de valeurs. Dans la partie précédente, on a déjà à plusieurs reprises évoqué d tels algorithmes.

Vers la fin des années 80, un regain d'intérêt s'est fait sentir autour de la version stochastique du principe de Pontryagin: je mentionne ici les méthodes d'équations stochastiques rétrogrades (BSDE) introduites initialement par Pardoux et Peng [23] qui ont été une conséquence de celui-ci. J'ai été co-rédacteur avec N.El Karoui du volume édité dans Pitman Research Notes in Mathematics en 1997 ("Backward Stochastic Differential Equations") [14], regroupant les exposés du groupe de travail "Optimisation Stochastique" de l'année 95-96 sur le sujet. Ma contribution personnelle à ce recueil décrit le principe de Pontryagin stochastique qui fut la motivation initiale à l'étude des Equations rétrogrades. Dans le cas d'une diffusion contrôlée $dy_t^u = f(t, y_t^u, u_t)dt + \sigma_t dB_t$ pour laquelle on cherche à minimiser un coût $J(u) = E(\int_0^T \ell(t, y_t^u, u_t)dt + g(y_T^u))$, ce principe affirme que le contrôle optimal u^* minimise l'Hamiltonien

$$H(t, y_t^{u^*}, u_t^*, p_t^{u^*}) = \ell(t, y_t^{u^*}, u_t^*) + p_t^{u^*}.f(t, y_t^{u^*}, u_t^*)$$

où le processus adjoint $p_t^{u^*}$ est solution d'une équation stochastique rétrograde.

Un peu auparavant, notre attention avait été attirée par un article intéressant de J-F.Bonnans [4] utilisant le principe de Pontryagin (déterministe) pour la mise au point d'un algorithme de résolution d'un problème de contrôle déterministe. L'idée centrale était d'augmenter l'Hamiltonien $H(t, y, u, p)$ par une quantité $\frac{1}{\varepsilon} \mid u - v \mid^2$ defaçon à travailler avec des fonctions strictement convexes permettant d'obtenir des suites de minima

[1] La pagination des reports fait référence à celle de l'article original, comme reproduit dans ce document

successifs convergeant vers un minimum global (qui est donc, en vertu du principe de Pontryagin, le contrôle optimal). J'ai étendu dans "An algorithm for solving a stochastic control problem" ces résultats au cas stochastique d'abord quand le terme de diffusion est un processus connu (les méthodes sont alors une extension simple de celles de Bonnans: partie A) puis dans le cas plus général où c'est une fonction de l'état y_t^u qui nécessite plus de travail et permet d'obtenir une convergence vers un contrôle ε- optimal (partie B). Pour être plus précis à propos du premier cas, en se replaçant dans le cadre précédemment décrit de la diffusion contrôlée (y_t^u), on définit l'Hamiltonien augmenté

$$K_\varepsilon(t,y,u,v,p) = H(t,y,u,p) + \frac{1}{2\varepsilon} \mid u - v \mid^2$$

qui, lui, va avoir, contrairement à H, de bonnes propriétés de stricte convexité. On définit alors un algorithme en se donnant un contrôle initial u_0 pour lequel on considère la diffusion y^0 et l'adjoint p^0 associés, et une suite de réels (ε_k) tendant vers 0. On considère alors (y_t^1) et (u_t^1) qui satisfont

$$K_{\varepsilon^1}(t, y_t^1, u_t^1, u_t^0, p_t^0) \leq K_{\varepsilon^1}(t, y_t^1, u, u_t^0, p_t^0), \forall u \in U$$

et on recommence... Après avoir démontré que l'algorithme est ainsi bien défini, on étudie sa convergence. Sous une hypothèse de convexité du coût, on obtient un résultat assez général de convergence (très) faible: toute valeur d'adhérence de la suite de processus (u^k) pour la topologie L^2-faible est un contrôle optimal. Le résultat général est du même ordre, mais encore plus faible puisque les valeurs d'adhérence sont alors des contrôles ε-optimaux.

Dans une direction complètement différente, à la suite des travaux de P.Del Moral sur un algorithme particulaire pour l'approximation du filtre, je me suis interessé à regarder comment un tel résultat pourrait être mis en œuvre dans le cadre du contrôle partiellement observable d'une chaîne de Markov discrète, ce problème se ramenant comme déjà mentionné au contrôle du filtre. On considère donc une équation d'évolution contrôlée du type de celle du filtrage (à temps discret) sur des mesures de probabilités sur un espace compact K

$$\begin{cases} \eta_n^u = & \Phi(n, u_n, \eta_{n-1}^u), n \geq 1 \\ \eta_0^u = & \eta \end{cases} \tag{2.1}$$

et le problème de contrôle associé à la fonction de coût terminal au temps N

$$J(u) = \int_E \psi(x) \eta_N^u(dx). \tag{2.2}$$

(où ψ est une fonction positive donnée). On construit alors pour chaque $k > 0$ une approximation $\eta_n^{k,u}$ de ce problème à travers les étapes suivantes

Etape 0: On pose $\eta_0^{k,u} = \eta$. On choisit (au hasard) k points dans K independemment avec la loi η: $x_1^0, \ldots, x_k^0$.

Etape 1: On pose $\eta_1^{k,u} = \Phi(1, u_1, \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\delta_{x_j^0})$

Etape 2: On chosit (au hasard) k points dans K independemment avec la loi $\eta_1^{k,u}$: $x_1^1, \ldots, x_k^1$

Etape 3: On pose $\eta_2^{k,u} = \Phi(2, u_2, \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\delta_{x_j^1})$ et on recommence à l'étape 2 jusqu'à ce que $\eta_N^{k,u}$ soit construite.

Dans "Approximation of a partially observable stochastic control problem", je montre que sous des hypothèses de régularité naturelles la fonction de valeurs du problème de contrôle associé à l'approximation particulaire du filtre converge vers celle du problème de contrôle associé au filtre.

3 Autres problèmes de contrôle

Je mentionne tout d'abord l'article "Filtering and Control with information increasing" en cours de révision écrit avec J-D.Benarous et R.Rouge. Il s'est agi au départ d'un exercice de style pour regarder ce que donnaient les méthodes de filtrage (notemment appliquées au contrôle partiellement observable) dans le cas où la filtration de l'observation était grossie par une observation terminale. Cette étude faisait suite à l'étude réalisée par I.Karatzas et I.Pikovsky[24] autour d'une modélisation du délit d'initié par les techniques de grossissement de filtration. Le problème que nous avons nous considéré est du même type, mais avec une observation partielle. Pour le présenter d'une manière imagée, on suppose qu'on désire ouvrir une mine d'or et qu'on s'intéresse aux investissements nécessaires sur l'intervalle de temps $[0, 1]$, dont le montant (en fait son logarithme) est représenté par une diffusion x_t; l'information sur ces investissements nécessaires n'est accessible qu'à travers (le logarithme de) la valeur du titre en bourse, y_t, qui en donne un reflet bruité. Par ailleurs, une Cassandre du marché vient vous révéler le prix que vaudrait l'action à l'instant 1 si on le laissait évoluer sans intervention. Comment utiliser au mieux cette information si on a la possibilité de réguler les investissements afin de minimiser le coût de l'opération? Malgré cet exemple, le papier n'est absolument pas écrit dans un cadre financier. On y montre que les méthodes du filtrage s'appliquent à la suite des équations du grossissement par la valeur y^1 menant par exemple à une étude numérique du cas linéaire. En particulier, il est clair que l'utilisation de l'information conduisant à une modification de l'équation de la dynamique des prix, on n'a pas nécessairement intérêt à utiliser cette information (voir la préface de [5] pour illustrer la dualité information/anti-information). Un travail fort intéressant serait de regarder le cas où Cassandre donne la vraie valeur du prix à l'instant 1 (ou en tout cas sa loi) et où la minimisation se fait parmi les contrôles qui amènent effectivement à cette valeur.

Pendant un an et demi, j'ai eu la chance d'encadrer la thèse de Claudia Ceci, étudiante de Rome venue en France avec une bourse Erasmus. Nous avions choisi de travailler sur le contrôle de processus de branchements représentés par un modèle d'arbre, ce modèle permettant de manière naturelle d'appliquer un contrôle spécifique à chacune des branches de l'arbre alors que jusqu'à présent le contrôle avait été effectué de manière globale sur la famille branchante par le biais des méthodes markoviennes standard. Le sujet semblait prometteur: la théorie des arbres élaborée entre autres par J.Neveu [21] et B.Chauvin [7] venait d'être complétée par l'obtention de martingales "produit" pour le mouvement brownien branchant qui étaient des candidats naturels pour jouer le rôle des martingales exponentielles pour le mouvement brownien standard. De là, on semblait pouvoir formuler un modèle dominé de contrôle stochastique sur les arbres et obtenir des résultats intéressants.

Autant le dire tout de suite, les conséquences n'ont pas été à la mesure de nos espoirs pour toute sorte de raisons techniques mais je tiens quand même à signaler que Claudia en a partiellement tiré un poste de *ricercatore* en Italie, ce qui était, après tout, le mieux à attendre des conséquences d'une thèse. Dans "Controlled Trees", nous avons formulé un modèle cohérent permettant de contrôler une famille branchante pour lequel la programmation dynamique était obtenue ainsi qu'un exemple *ad hoc* d'application sur un pseudo-modèle inspiré par l'écologie. Le contrôle sur chaque branche est défini comme une marque supplémentaire sur un espace convenable d'arbres marqués. La théorie générale de la programmation dynamique (voir par exemple [11]) nécessite alors de définir une bifurcation en une ligne d'arrêt d'un genre un peu plus général que celui introduit par [7]. L'article publié contient d'ailleurs une hypothèse très contraignante que nous avons pu éliminer par la suite. Nous nous sommes aussi interesséscà formuler un problème d'arrêt optimal pour lequel nous avons dû prolonger la propriété de branchements des arbres au cas de lignes d'arrêt plus générales que celle de [7] ("Some results about stopping times on the marked trees space").

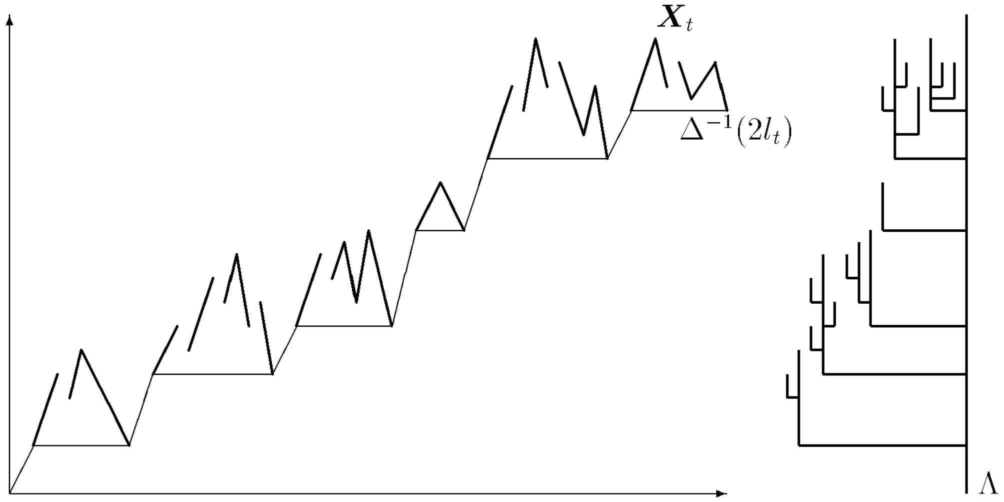
4 Aperçu de quelques autres travaux

Dans cette dernière partie, je voudrais mentionner quelques autres travaux ne rentrant pas dans les cadres précédents. Je commence par deux papiers spécifiquement mathématiques.

Le premier d'entre eux ("Homogenization of two randomly weakly connected materials") est issu d'une collaboration avec Marc Briane, à l'époque membre du Laboratoire d'Analyse Numérique de Paris VI et spécialiste des problèmes d'homogénéisation. Il s'était spécialement interessé à l'homogénéisation de problèmes de Neumann donnés sur des domaines ayant de fortes structures géométriques et se demandait comment une partie aléatoire pouvait être incluse au modèle. Ce qui est intéressant ici c'est que les modèles d'homogénéisation aléatoire habituellement traités (à la suite des travaux de Papanicolaou et Varadhan [22]) ne prenaient pas en compte de structure géométrique afin d'appliquer un théorème ergodique au champ aléatoire représentant la conductivité. Je rappelle pour mémoire le titre révélateur de l'Habilitation de Marc Briane: "Effets de la géométrie dans quelques problèmes d'homogénéisation" [6]. Au contraire donc des modèles usuellement considérés, nous avons cherché à préserver au maximum la structure. Le prototype est un système en 3 dimensions de tubes de deux matières différentes emboîtés l'un dans l'autre et reliés par des "petits ponts": une coupe est représentée ci-dessous.

L'aléa provient de la taille des petits ponts reliant les deux structures l'une à l'autre qui est suposé être une variable aléatoire dont la loi est donnée. En supposant la cellule de base de côtés de longueur ε, suivant la position par rapport à ε^2 de la largeur moyenne du pont (i.e. suivant que cette moyenne est $o(\varepsilon^2), O(\varepsilon^2), >> \varepsilon^2$), on obtient un comportement d'homogénéisation du modèle différent. Le cas le plus interessant est le cas critique (quand la moyenne est de l'ordre ε^2, où la taille des ponts est suffisamment grande pour qu'il se passe quelque chose mais pas assez pour que le matériau soit complètement conducteur): dans ce cas, à la limite, le matériau se comporte comme un matériau homogène dont les caractéristiques mélangent de manière assez complexe les caractéristiques des deux composants de base (cf. le système (9) p193). Sans doute serait-il intéressant de regarder maintenant des cas plus complexes.

Le deuxième article, écrit en commun avec Romain Abraham est plutôt un papier pédagogique sur le modèle d'arbre continu représentant l'excursion brownienne, un sujet en pleine explosion au début des années 90, particulièrement autour de J-F.Le Gall. Dans sa thèse, Romain Abraham [1] a introduit un arbre à branchements continus servant à représenter l'excursion brownienne standard et donc de réobtenir par une étude fine sur la loi de l'arbre des résultats obtenus précédemment par la théorie des excursions . Clairement, une telle construction pouvait être envisagée pour d'autres types de processus (pourvu qu'ils n'aient pas différents minima locaux à même hauteur) comme par exemple le mouvement brownien perturbé par son temps local. Le procédé est illustré ci-dessous:



arbre associé au brownien perturbé

Il n'y a donc rien de vraiement nouveau ici: par l'étude de l'arbre, on retrouve pour ce processus le théorème de Ray-Knight généralisé obtenu par Le Gall [18] et Yor [27]. Mais je voulais surtout témoigner du très grand plaisir que j'ai eu à étudier une situation inconnue et à chercher à traduire une magnifique construction comme celle-ci pour des non spécialistes.

Ceci m'amène naturellement aux trois derniers papiers qui rentrent dans le cadre d'une observation de l'interface entre la communauté mathématique et d'autres mondes. J'ai eu plusieurs fois l'occasion au cours des cinq ans passés à voir combien les mathématiciens ont à souffrir de la vision fort négative de leur discipline renvoyée par la société en général (c'est particulièrement net dans certains rapports parfois conflictuels avec des étudiants à qui on fait prendre de moins en moins conscience de la valeur culturelle de la discipline). Aussi je crois important de multiplier les tentatives vers l'extérieur non seulement pour expliquer *des* mathématiques ou des démarches mathématiques mais aussi pour sortir la communauté d'un isolement qu'elle paye très cher.

Je passe sur le petit papier publié dans Quadrature, revue de vulgarisation mathématique à destination des lycéens et jeunes étudiants, "Cartes de fidélité dans les cinémas" écrit avec François James joint ici pour la distraction du lecteur.

J'ai été interessé depuis quelques années par une réflexion sur les liens unissant (ou n'unissant pas!) les mathématiques et la musique. Le Forum Mathématique Diderot 4 de la Société Mathématique Européenne qui s'est tenu en décembre 1999 et a rassemblé plus de 200 participants d'horizons divers, dont j'étais un des co-organisateurs a été l'occasion d'échanges édifiants et parfois passionnels sur ce type de sujet. Auparavant, j'avais mené une enquête auprès de la communauté mathématique sur sa vision du phénomène et les résultats présentés dans l'article "Un lien vestige d'un passé révolu?" ont été publiés en deux temps au GRAME et à la Gazette de la SMF. Un questionnaire a été envoyé sous deux formes légèrement différentes aux adhérents de la SMF et à ceux de la Société Française de Chimie, questionnaire qui posait des questions sur la pratique musicale des interrogés et leur demandait aussi quelques formules personnelles pour qualifier leur vision des choses dans leur activité scientifique. Il n'y a pas eu de révolution (il n'y en avait pas d'espérée...) mais certaines lignes se dégageaient un peu. La plus évidente pour moi est un engouement un peu inattendu parmi les adhérents SMF puisque pratiquement 1 sur 10 a répondu (ce qui est beaucoup pour ce type de sondage) alors qu'ils n'étaient qu'un peu plus d'1 sur 20 parmi les chimistes. On peut aussi noter une différence significative entre les deux disciplines dans la "consommation musicale" (achat de disques, fréquentation de concerts...). J'ai lancé quelques pistes d'intérprétation sur ces phénomènes qui sûrement mériteraient un examen plus solide.

Enfin, dernier papier présenté ici, celui écrit pour la revue de Philosophie "Idées" destinée à des enseignants du second degré: un exercice délicat où toute technicité était interdite pour parler de la démarche mathématique et où il s'agissait d'écrire pour des "littéraires" dont la culture scientifique a souvent été assez peu alimentée dans leur formation universitaire. J'ai essayé de proposer une vision un peu historique de comment un mathématicien se positionne aujourd'hui vis à vis de la vérité mathématique, au prix, je l'avoue, de raccourcis un peu violents et simplificateurs sur des sujets qui ne m'étaient souvent pas familiers...Mon texte ne prétend donc évidemment pas se placer au même niveau de contenu et de réflexion que ceux par exemple d'H.Sinaceur dans un ouvrage comme [2]. Je reste ainsi critique sur ce que j'ai écrit, où je découvre pas mal d'idées reçues ou de contradictions, mais encore une fois, je voudrais surtout témoigner de l'importance qu'a à mes yeux le fait que des mathématiciens s'essaient au dialogue avec l'extérieur.

References

[1] R. Abraham: *Un arbre infini associé à l'excursion brownienne*, Séminaire de probabilités XXVI, Lecture Notes in Math. 1526; 384-397, Springer, 1992

[2] Les Philosophes et les Mathématiques, M.Barbin et M.Caveing, Editeurs; collection IREM, Ellipses, 1997

[3] A.Bensoussan et J-L.Lions: Applications des Inéquations quasi-variationnelles en contrôle stochastique, Dunod, 1978

[4] J.F.Bonnans: *On an algorithm for optimal control using Pontryagin's maximal principle*, SIAM J.Cont.Opt.,24,1;579-588, 1986

[5] N.Bouleau: Probabilités de l'Ingénieur, Hermann, 1988

[6] M.Briane: Quelques effets de la géométrie sur l'homogééisation, Habilitation à diriger des recherches, Université Paris VI, 1998

[7] B.Chauvin: *Product martingales and stopping lines for branching brownian motion*, Ann.Prob. 19,3, 1195-1205, 1991

[8] G.Del Grosso, A.Gerardi and G.Koch: *Optimality in accelerated life tests*, Math.Ope.Res. 17; 1992

[9] C.Dellacherie and P.A.Meyer: Probabilités et Potentiel, Hermann, 1980

[10] P.Del Moral *Measure Valued Processes and Interacting Particle Systems. Application to Non Linear Filtering Problems*, Markov Processes and Related Fields, 1997

[11] N.El Karoui: Les aspects probabilistes du contrôle stochastique, Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour 1979,LN in Maths 876, Springer-Verlag.

[12] N.El Karoui, D.Huu Nguyen and M.Jeanblanc-Picqué : *Compactification methods in the control of degenerate diffusions*, Stochastics,20;169-219, 1987

[13] N.El Karoui, D.Huu Nguyen and M.Jeanblanc-Picqué: *Existence of an Optimal Markovian Filter for the Control Under Partial Observations*, SIAM J.Cont.Opt,26,5;1025-1061, 1988

[14] Backward Stochastic Differential Equations, N.El Karoui and L.Mazliak (Editors), Pitman Research Notes in Mathematics, 364; 1997

[15] W.H.Fleming and R.Rishel: Deterministic and Stochastic Optimal Control, Applications of Mathematics 1, Springer-Verlag, 1975

[16] U.G.Haussmann: A stochastic maximum principle for optimal control of diffusions, Pitman Res.Notes in Math, 151, 1986

[17] H.J.Kushner: Probability methods for approximations in stochastic control and for elliptic equations, Academic-Press, 1977

[18] J.F. Le Gall: *Brownian excursions, trees and measure-valued branching processes.* Ann. Probab. 19; 1399-1438, 1991

[19] P.L.Lions: Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations, Pitman Research Notes in Math, 69; 1982

[20] M.Michta: *A note on viability under distribution constraints*, Disc.Math., Alg.Stoch.Meth, 18;215-225, 1998

[21] J.Neveu: *Arbres et Processus de Galton-Watson*, Ann.IHP, série B, 22,2, 199-207, 1986

[22] G.Papanicolaou and S.R.S.Varadhan: *Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients*, Proceedings of Colloq. on Random fields, Rigorous results in Stat.Mechanics and Quantum Field Theory (J.Fritz, J-L.Lebowitz, D.Szasz, Eds.), Colloquia Mathematica Society Jànos Bolyai 10. Amsterdam; 835-873, 1979

[23] E.Pardoux and S.Peng: *Adapted solution of a backward stochastic differential equation*, Systems and Control Letters, 14; 55-61, 1990

[24] I.Pikovsky and I.Karatzas: *Anticipative Portfolio Optimization*, Adv.Appl.Prob., 28; 1095-1122, 1996

[25] : H.Pragarauskas: *Ob approksimatsii upravlyaemykh resenii uravnyenii Itô upravlyaemymi Markovskimi tsepiami*, Lietuvos Matematikos Rinkinys, XXIII; 1983

[26] J-P.Quadrat: Sur l'identification et le contrôle de systèmes dynamiques stochastiques, Thèse d'Etat, INRIA, 1980

[27] M. Yor: Some aspects of Brownian motion. Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkäuser, 1992