L'Hôpital

ANALYSE DES INFINIMENT PETITS.

PREMIERE PARTIE.

DU CALCUL DES DIFFERENCES.

SECTION PREMIERE.

Où l'on donne les regles de ce calcul.

DÉFINITION I.

ON appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le parametre est une quantité constante.

A

DÉFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminuë continuellement, en est appellée la *Différence*. Soit par exemple une ligne courbe quelconque *AMB*, qui ait pour axe ou diametre la ligne *AC*, & pour une de ses appliquées la droite *PM*; & soit une autre appliquée *pm* infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on mene *MR* parallele à *AC*; les cordes *AM*, *Am*; & qu'on décrive du centre *A*, de l'intervalle *AM* le petit arc de cercle *MS*: *Pp* sera la différence de *AP*, *Rm* celle de *PM*, *Sm* celle de *AM*, & *Mm* celle de l'arc *AM*. De même le petit triangle *MAm* qui a pour base l'arc *Mm*, sera la différence du segment *AM*; & le petit espace *MPpm*, celle de l'espace compris par les droites *AP*, *PM*, & par l'arc *AM*.

FIG. I.

COROLLAIRE.

1. IL est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zero: ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

AVERTISSEMENT.

On se servira dans la suite de la note ou caracteristique d *pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre; & pour éviter la confusion, cette note* d *n'aura point d'autre usage dans la suite de ce calcul. Si l'on nomme par exemple les variables* AP, x; PM, y; AM, z; *l'arc* AM, u; *l'espace mixtiligne* APM, s; *& le segment* AM, t: dx *exprimera la valeur de* Pp, dy *celle de* Rm, dz *celle de* Sm, du *celle du petit arc* Mm, ds *celle du petit espace* MPpm, *&* dt *celle du petit triangle mixtiligne* MAm.

I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. ON demande qu'on puisse prendre indifferemment l'une pour l'autre deux quantités qui ne different entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considerée comme demeurant la même. On demande par exemple qu'on puisse prendre *Ap* pour *AP*, *pm* pour *PM*, l'espace *Apm* pour l'espace *APM*, le petit espace *MPpm* pour le petit rectangle *MPpR*, le petit secteur *AMm* pour le petit triangle *AMS*, l'angle *pAm* pour l'angle *PAM*, &c.

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. ON demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par exemple que la portion de courbe *Mm* & l'arc de cercle *MS* puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle *mSM* puisse être censé réctiligne.

AVERTISSEMENT.

On suppose ordinairement dans la suite que les dernieres lettres de l'alphabet, z, y, x, *&c. marquent des quantités variables; & au contraire que les premieres* a, b, c, *&c. marquent des quantités constantes: de sorte que* x *devenant* x + dx; y, z, *&c. deviennent* y + dy, z + dz, *&c.* **Et* a, b, c, *&c. demeurent les mesmes* a, b, c, *&c.* * Art. 1.

PROPOSITION I.

Problême.

4. PRENDRE *la différence de plusieurs quantités ajoûtées ensemble, ou soustraites les unes des autres.*

Soit $a + x + y - z$ dont il faut prendre la différence. Si l'on suppose que x soit augmentée d'une portion infiniment petite; c'est-à-dire qu'elle devienne $x + dx$; y de-

Art. 1. viendra alors $y+dy$; & z, $z+dz$; pour la constante a, *elle demeurera la même a: de sorte que la quantité proposée $a+x+y-z$ deviendra $a+x+dx+y+dy-z-dz$; & sa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette derniere, sera $dx+dy-dz$. Il en est ainsi des autres; ce qui donne cette régle.

REGLE I.

Pour les quantités ajoûtées, ou soustraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes, on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée.

PROPOSITION II.

Problême.

5. PRENDRE *la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La différence de xy est $ydx+xdy$. Car y devient $y+dy$ lors que x devient $x+dx$, & partant xy devient alors $xy+ydx+xdy+dxdy$ qui est le produit de $x+dx$ par $y+dy$, & sa différence sera $ydx+xdy+dxdy$, c'est-à-dire *$ydx+xdy$: puisque $dxdy$ est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy; car si l'on divise par exemple ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la premiere. Art. 2.

2°. La différence de xyz est $yzdx+xzdy+xydz$. Car en considérant le produit xy comme une seule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de sa différence $ydx+xdy$ par la seconde z (ce qui donne $yzdx+xzdy$) plus le produit de la différence dz

de la seconde z par la premiere xy (ce qui donne $xydz$); & partant la différence de xyz sera $yzdx+xzdy+xydz$.

3°. La différence de $xyzu$ est $uyzdx+uxzdy+uxydz+xyzdu$. Ce qui se prouve comme dans le cas précédent en regardant le produit xyz comme une seule quantité. Il en est ainsi des autres à l'infini, d'où l'on forme cette régle.

REGLE II.

Pour les quantités multipliées.

La différence du produit de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres, est égale à la somme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainsi la différence de ax est $xo+adx$, c'est-à-dire adx. Celle de $\overline{a+x}\times\overline{b-y}$ est $bdx-ydx-ady-xdy$.

PROPOSITION III.

Problême.

6. PRENDRE *la différence d'une fraction quelconque.*

La différence de $\frac{x}{y}$ est $\frac{ydx-xdy}{yy}$. Car supposant $\frac{x}{y}=z$, on aura $x=yz$, & comme ces deux quantitez variables x & yz doivent toûjours être égales entr'elles, soit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'ensuit que leur différence, c'est-à-dire leurs accroissemens ou diminutions seront aussi égales entr'elles; & partant *on aura $dx=ydz+zdy$, & $dz=\frac{dx-zdy}{y}=\frac{ydx-xdy}{yy}$ en mettant pour z sa valeur $\frac{x}{y}$. Ce qu'il falloit, &c. d'où l'on forme cette regle. * Art. 5.

REGLE III.

Pour les quantités divisées, ou pour les fractions.

La différence d'une fraction quelconque est égale au produit de la différence du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur : le tout divisé par le quarré du dénominateur.

Ainsi la différence de $\frac{a}{x}$ sera $\frac{-adx}{xx}$, celle de $\frac{x}{a+x}$ sera $\frac{adx}{aa+2ax+xx}$.

PROPOSITION IV.

Problême.

7. PRENDRE *la différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable.*

Il est nécessaire afin de donner une régle générale qui serve pour les puissances parfaites & imparfaites, d'expliquer l'analogie qui se rencontre entre leurs exposans.

Si l'on propose une progression geométrique dont le premier terme soit l'unité, & le second une quantité quelconque x, & qu'on dispose par ordre sous chaque terme son exposant, il est clair que ces exposans formeront une progression arithmetique.

Prog. geom. $1,\ x,\ xx,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6,\ x^7$, &c.
Prog. arith. $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$, &c.

Et si l'on continuë la progression geométrique au dessous de l'unité, & l'arithmetique au dessous de zero, les termes de celle-cy seront les exposans de ceux ausquels ils répondent dans l'autre. Ainsi -1 est l'exposant de $\frac{1}{x}$, -2 celuy de $\frac{1}{xx}$, &c.

Prog. geom. $x,\ 1,\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{xx},\ \frac{1}{x^3},\ \frac{1}{x^4}$, &c.
Prog. arith. $1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4$, &c.

Mais si l'on introduit quelque nouveau terme dans la progression geométrique, il faudra pour avoir son exposant, en introduire un semblable dans l'arithmetique.

Ainsi $\sqrt{x}$ aura pour exposant $\frac{1}{2} : \sqrt[3]{x},\ \frac{1}{3} : \sqrt[5]{x^4},\ \frac{4}{5} : \frac{1}{\sqrt{x^3}},\ -\frac{3}{2} : \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}},\ -\frac{5}{3} : \frac{1}{\sqrt{x^7}},\ -\frac{7}{2}$: &c. de sorte que ces expressions $\sqrt{x}$ & $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$ & $x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{x^4}$ & $x^{\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ & $x^{-\frac{3}{2}}$, &c. ne signifient que la même chose.

Prog. geom. $1,\ \sqrt{x},\ x.\ 1,\ \sqrt[3]{x},\ \sqrt[3]{xx},\ x.\ 1,\ \sqrt[5]{x},\ \sqrt[5]{xx},\ \sqrt[5]{x^3},\ \sqrt[5]{x^4},\ x.$
Prog. arith. $0,\ \frac{1}{2},\ 1.\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1.\ 0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 1.$
Prog. geom. $\frac{1}{x},\ \frac{1}{\sqrt{x^3}},\ \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}},\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}},\ \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x^3},\ \frac{1}{\sqrt{x^7}},\ \frac{1}{x^4}.$
Prog. arith. $-1,\ -\frac{3}{2},\ -2.\ -1,\ -\frac{4}{3},\ -\frac{5}{3},\ -2.\ -3,\ -\frac{7}{2},\ -4.$

Où l'on voit que de même que $\sqrt{x}$ est moyenne geométrique entre 1 & x, de même aussi $\frac{1}{2}$ est moyenne arithmetique entre leurs exposans zero & 1 : & de même que $\sqrt[3]{x}$ est la premiere des deux moyennes geométriquement proportionnelles entre 1 & x, de même aussi $\frac{1}{3}$ est la premiere des deux moyennes arithmetiquement proportionnelles entre leurs exposans zero & 1 : & il en est ainsi des autres. Or il suit de la nature de ces deux progressions.

1°. Que la somme des exposans de deux termes quelconques de la progression geométrique sera l'exposant du terme qui en est le produit. Ainsi x^{4+3} où x^7 est le produit de x^3 par x^4, & $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{5}{6}}$ est le produit de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$ où $x^{-\frac{2}{15}}$ est le produit de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{5}}$, &c. De même $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{2}{3}}$ est le produit de $x^{\frac{1}{3}}$ par luy même, c'est-à-dire son quarré, & x^{+2+2+2} où x^6 est le produit de x^2 par x^2 par x^2, c'est-à-dire son cube, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ ou $x^{-\frac{4}{3}}$ est la quatriéme puissance de $x^{-\frac{1}{3}}$, & il en est ainsi des autres puissances. D'où il est évident que le double, le triple, &c. de l'exposant d'un terme quelconque de la progression geométrique est l'exposant du quarré, du cube, &c. de ce terme ; & partant que la moitié, le tiers, &c. de l'exposant d'un terme quelconque de la progression geométrique sera l'exposant de la racine quarrée, cubique, &c. de ce terme.

2°. Que la différence des exposans de deux termes quelconques de la progression geométrique sera l'exposant du quotient de la division de ces termes. Ainsi $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$ sera l'exposant du quotient de la division de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{7}{12}}$ sera l'exposant du quotient de la division de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$; où l'on voit que c'est la même chose de multiplier $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{-\frac{1}{4}}$ que de diviser $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$. Il en est ainsi des autres. Ceci bien entendu, il peut arriver deux différens cas.

Premier cas lorsque la puissance est parfaite, c'est-à-dire lorsque son exposant est un nombre entier. La différence de xx est $2xdx$, de x^3 est $3xxdx$, de x^4 est $4x^3dx$, &c. Car le quarré de x n'étant autre chose que le produit de x par x, sa différence* sera $xdx + xdx$, c'est-à-dire $2xdx$. De même le cube de x n'étant autre chose que le produit de x par x par x, sa différence* sera $xxdx + xxdx + xxdx$, c'est-à-dire $3xxdx$; & comme il en est ainsi des autres puissances à l'infini, il s'ensuit que si l'on suppose que m marque un nombre entier tel que l'on voudra, la différence de x^m sera $mx^{m-1}dx$.

*Art. 5.

Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de x^{-m} ou de $\frac{1}{x^m}$ sera $\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx$.

Second cas, lorsque la puissance est imparfaite, c'est-à-dire lorsque son exposant est un nombre rompu. Soit proposé de prendre la différence de $\sqrt[n]{x^m}$ ou $x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ exprime un nombre rompu quelconque) on supposera $x^{\frac{m}{n}} = z$, & en élevant chaque membre à la puissance n on aura $x^m = z^n$, & en prenant les différences comme l'on vient d'expliquer dans le premier cas, on trouvera $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$, & $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$, ou $\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}}$, en mettant à la place de nz^{n-1} sa valeur $nx^{m-\frac{m}{n}}$. Si l'exposant est négatif, on trouvera que la difference de $x^{-\frac{m}{n}}$ ou de $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ sera $\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$.

Ce

Ce qui donne cette regle générale.

REGLE IV.

Pour les puissances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, est égale au produit de l'exposant de cette puissance, par cette même quantité élevée à une puissance moindre d'une unité, & multipliée par sa différence.

Ainsi si l'on suppose que m exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, soit positif, soit négatif, & x une quantité variable quelconque, la différence de x^m sera toûjours $mx^{m-1}dx$.

EXEMPLES.

La différence du cube de $ay - xx$, c'est-à-dire de $\overline{ay-xx}^3$, est $3 \times \overline{ay-xx}^2 \times \overline{ady - 2xdx} = 3a^2yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aayyxdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$.

La différence de $\sqrt{xy+yy}$ ou de $\overline{xy+yy}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times \overline{xy+yy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ydx + xdy + 2ydy}$, ou $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$. Celle de $\sqrt{a^4+axyy}$ ou de $\overline{a^4+axyy}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times \overline{a^4+axyy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ayydx + 2axydy}$, ou $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}$. Celle de $\sqrt[3]{ax+xx}$, ou de $\overline{ax+xx}^{\frac{1}{3}}$, est $\frac{1}{3} \times \overline{ax+xx}^{-\frac{2}{3}} \times \overline{adx + 2xdx}$, ou $\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax+xx}^2}}$.

La différence de $\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}$ ou de $\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times \overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{adx + 2xdx + \frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}}$, ou $\frac{adx+2xdx}{2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}} + \frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy} \times 2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}$.

Art. 7. 6. La différence de $\frac{\sqrt[3]{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$ sera selon cette regle* & celle des fractions $\dfrac{\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{ax+xx}^{2}}\times\sqrt{xy+yy}\;\frac{-ydx-xdy-2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}\times\sqrt[3]{ax+xx}}{xy+yy}$.

REMARQUE.

8. IL est à propos de bien remarquer que l'on a toûjours supposé en prenant les différences, qu'une des variables x croissant, les autres y, z, &c. croissoient aussi; c'est-à-dire que les x devenant $x+dx$, les y, z, &c. devenoient $y+dy$, $z+dz$, &c. C'est-pourquoy s'il arrive que quelques-unes diminüent pendant que les autres croissent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives par rapport à celles des autres qu'on suppose croître, & changer par-conséquent les signes des termes où les différences de celles qui diminüent se rencontrent. Ainsi si l'on suppose que les x croissant, les y & les z diminüent, c'est-à-dire que les x devenant $x+dx$, les y & les z deviennent $y-dy$ & $z-dz$, & que l'on veüille prendre la différence du produit xyz; il faudra changer dans la différence $xydz+xzdy+yzdx$ trouvée*, les signes des termes où dy & dz se rencontrent: ce qui donne $yzdx-xydz-xzdy$ pour la différence cherchée.

Art. 5.

SECTION II.

Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.

DÉFINITION.

SI l'on prolonge un des petits côtés *Mm* du poligone qui compose* une ligne courbe; ce petit côté ainsi prolongé sera appellé la *Tangente* de la courbe au point *M* ou *m*. FIG. 2. *Art. 3.

PROPOSITION I.

Problême.

9. SOIT *une ligne courbe* AM *telle que la relation de la coupée* AP *à l'appliquée* PM, *soit exprimée par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné* M *sur cette courbe mener la tangente* MT. FIG. 3.

Ayant mené l'appliquée MP, & supposé que la droite MT qui rencontre le diametre au point T, soit la tangente cherchée; on concevra une autre appliquée mp infiniment proche de la premiere, avec une petite droite MR parallele à AP. Et en nommant les données AP, x; PM, y; (donc Pp ou $MR = dx$, & $Rm = dy$.) les triangles semblables mRM & MPT donneront $mR\,(dy).\ RM\,(dx :: MP\,(y).\ PT = \frac{ydx}{dy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dx en termes qui seront tous affectés par dy, laquelle étant multipliée par y & divisée par dy, donnera une valeur de la soutangente PT en termes entiérement connus & délivrés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée MT.

REMARQUE.

10. LORSQUE le point T tombe du côté opposé au point A origine des x, il est clair que x croissant, y dimi- FIG. 4.

* Art. 8. nüe, & qu'il faut changer par-conſéquent* dans la différence de l'équation donnée les ſignes de tous les termes où dy ſe rencontre : autrement la valeur de dx en dy ſeroit négative ; & partant auſſi celle de PT $(\frac{ydx}{dy})$. Il eſt mieux cependant, pour ne ſe point embaraſſer, de prendre toûjours la différence de l'équation donnée par les regles que l'on

* Sect. 1. a preſcrites* ſans y rien changer ; car s'il arrive à la fin de l'opération que la valeur de PT ſoit poſitive, il s'enſuivra qu'il faudra prendre le point T du même côté que le point A origine des x, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul : & au contraire ſi elle eſt négative, il le faudra prendre du côté oppoſé. Ceci s'éclaircira par les éxemples ſuivans.

EXEMPLE I.

Fig. 3. 11. 1°. Si l'on veut que $ax = yy$ exprime la relation de AP à PM ; la courbe AM ſera une parabole qui aura pour paramétre la droite donnée a, & l'on aura en prenant de part & d'autre les différences, $adx = 2ydy$, & $dx = \frac{2ydy}{a}$ & PT $(\frac{ydx}{dy}) = \frac{2yy}{a} = 2x$ en mettant pour yy ſa valeur ax. D'où il ſuit que ſi l'on prend PT double de AP, & qu'on mene la droite MT, elle ſera tangente au point M. Ce qui étoit propoſé.

Fig. 4. 2°. Soit l'équation $aa = xy$ qui exprime la nature de l'hyperbole entre les aſymptotes. On aura en prenant les différences $xdy + ydx = 0$, & partant PT $(\frac{ydx}{dy}) = -x$. D'où il ſuit que ſi l'on prend $PT = PA$ du côté oppoſé au point A, & qu'on mene la droite MT, elle ſera la tangente en M.

3°. Soit l'équation générale $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini lorſque l'expoſant m marque un nombre poſitif entier ou rompu, & de toutes les hyperpoles lorſqu'il marque un nombre négatif. On aura en prenant les différences $my^{m-1}dy = dx$, & partant PT $(\frac{ydx}{dy}) = my^m = mx$ en mettant pour y^m ſa valeur x.

Si $m = \frac{3}{2}$, l'équation ſera $y^3 = axx$ qui exprime la nature d'une des paraboles cubiques, & la ſoutangente $PT = \frac{3}{2}x$. Si $m = -2$, l'équation ſera $a^3 = xyy$ qui exprime la nature de l'une des hyperboles cubiques, & la ſoutangente $PT = -2x$. Il en eſt ainſi des autres.

Pour mener dans les paraboles la tangente au point A origine des x, il faut chercher quelle doit être la raiſon de dx à dy en ce point ; car il eſt viſible que cette raiſon étant connuë, l'angle que la tangente fait avec l'axe où le diametre, ſera auſſi déterminé. On a dans cet éxemple $dx . dy :: my^{m-1} . 1$. D'où l'on voit que y étant zero en A, la raiſon de dy à dx doit y être infiniment grande lorſque m ſurpaſſe 1, & infiniment petite lorſqu'elle eſt moindre : c'eſt-à-dire que la tangente en A doit être parallele aux appliquées dans le premier cas, & ſe confondre avec le diametre dans le ſecond.

EXEMPLE II.

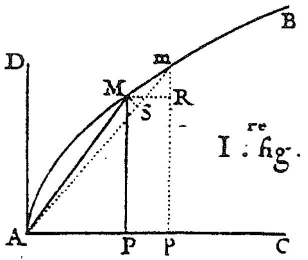
12. Soit une ligne courbe AMB telle que $AP \times PB$ $(x \times \overline{a - x}) . \overline{PM}^2$ $(yy) :: AB$ $(a) . AD$ (b). Donc $\frac{ayy}{b} = ax - xx$, & en prenant les différences, $\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx$, d'où l'on tire PT $(\frac{ydx}{dy}) = \frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, en mettant pour $\frac{ayy}{b}$ ſa valeur $ax - xx$; & $PT - AP$ ou $AT = \frac{ax}{a - 2x}$. Fig. 5.

Suppoſant à préſent que $\overline{AP}^3 \times \overline{PB}^2$ $(x^3 \times \overline{a - x}^2) . \overline{PM}^5$ $(y^5) :: AB$ $(a) . AD$ (b), on aura $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{a - x}^2$, & en prenant les différences $\frac{5ay^4dy}{b} = 3xxdx \times \overline{a - x}^2 - \overline{2adx + 2xdx} \times x^3$, d'où l'on tire $\frac{ydx}{dy} = \frac{5x^3 \times \overline{a - x}^2}{3xx \times \overline{a - x}^2 - \overline{2a + 2x} \times x^3} = \frac{5x \times \overline{a - x}}{3a - 3x - 2x}$ ou $\frac{5ax - 5xx}{3a - 5x}$ & $AT = \frac{2ax}{3a - 5x}$.

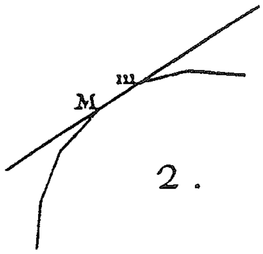
Et généralement ſi l'on veut que m marque l expoſant de la puiſſance de AP, & n celuy de la puiſſance de PB, on aura $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a-x}^n$ qui eſt une équation générale pour toutes les ellipſes à l'infini, dont la différence eſt $\frac{\overline{m+n}\,ay^{m+n-1}dy}{b} = mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - n\overline{a-x}^{n-1}dx \times x^m$, d'où l'on tire (en mettant pour $\frac{ay^{m+n}}{b}$ ſa valeur $x^m \times \overline{a-x}^n$) $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{\overline{m+n}\,x^m \times \overline{a-x}^n}{mx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - n\overline{a-x}^{n-1} \times x^m} = \frac{\overline{m+n}\,x \times \overline{a-x}}{m\overline{a-x} - nx}$, ou $PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax-xx}}{ma - \overline{m-n}\,x}$, & $AT = \frac{nax}{ma - \overline{m-n}\,x}$.

[. . .]

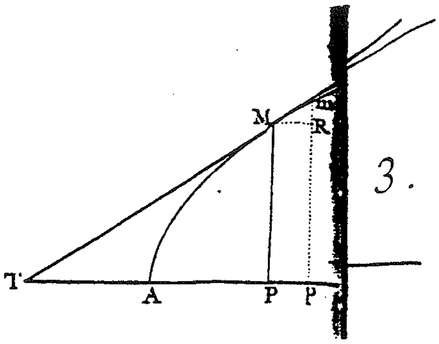
L'Hôpital : Figures



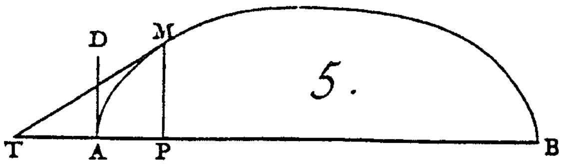
I.re fig.



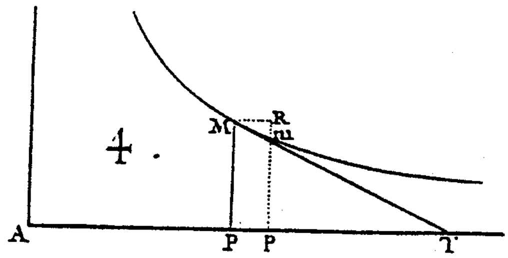
2.



3.



5.



4.