THÉORIE

DES

FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

Les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

INTRODUCTION.

Des Fonctions en général. Des Fonctions primitives et dérivées. Des différentes manières dont on a envisagé le Calcul différentiel. Objet de cet Ouvrage.

On appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi, dans les fonctions, on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.

Le mot *fonction* a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité. Depuis, on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité. *Leibnitz* et les *Bernoulli* l'ont employé les premiers dans cette acception générale, et il est aujourd'hui généralement adopté.

Lorsqu'à la variable d'une fonction on attribue un accroissement quelconque, en ajoutant à cette variable une quantité indéterminée, on peut par les règles ordinaires de l'algèbre, si la fonction est algébrique, la développer suivant les puissances de cette indéterminée. Le premier terme du développement sera la fonction proposée qu'on appellera *fonction primitive;* les termes suivans seront formés de différentes fonctions de la même variable, multipliées par les puissances successives de l'indéterminée. Ces nouvelles fonctions dépendront uniquement de la fonction primitive dont elles dérivent, et pourront s'appeler *fonctions dérivées.* En général, quelle que soit la fonction primitive, algébrique ou non, elle peut toujours être développée ou censée developpée de la même manière, et donner ainsi naissance à des fonctions dérivées. Les fonctions considérées sous ce point de vue, constituent une analyse d'un genre supérieur à l'analyse ordinaire, par sa généralité et ses nombreux usages; et l'on verra dans cet ouvrage que l'analyse qu'on appelle vulgairement *transcendante* ou *infinitésimale*, n'est au fond que l'analyse des fonctions primitives et dérivées, et que les calculs différentiel et intégral ne sont, à proprement parler, que le calcul de ces mêmes fonctions.

Les premiers géomètres qui ont employé le calcul différentiel, *Leibnitz*, les *Bernoulli*, l'*Hopital*, etc. l'ont fondé sur la considération des quantités infiniment petites de différens ordres, et sur la supposition qu'on peut regarder et traiter comme égales, les quantités qui ne diffèrent entre elles que par des quantités infiniment petites à leur égard. Contens d'arriver par les procédés de ce calcul d'une manière prompte et sûre à des résultats exacts, ils ne se sont point occupés d'en démontrer les principes. Ceux qui les ont suivis, *Euler*, d'*Alembert*, etc., ont cherché à suppléer à ce défaut, en faisant voir, par des applications particulières, que les différences qu'on suppose infiniment petites, doivent être absolument nulles, et que leurs rapports, seules quantités qui entrent réellement dans le calcul, ne sont autre chose que les limites des rapports des différences finies ou indéfinies.

Mais il faut convenir que cette idée, quoique juste en elle-même, n'est pas assez claire pour servir de principe à une science dont la certitude doit être fondée sur l'évidence, et surtout pour être présentée aux commençans; d'ailleurs, il me semble que comme dans le calcul différentiel, tel qu'on l'emploie, on considère et on calcule en effet les quantités infiniment petites ou supposées infiniment petites elles-mêmes, la véritable métaphysique de ce calcul consiste en ce que l'erreur résultant de cette fausse supposition est redressée ou compensée par celle qui naît des procédés mêmes du calcul, suivant lesquels on ne retient dans la différentiation que les quantités infiniment petites du même ordre. Par exemple, en regardant une courbe comme un polygone d'un nombre infini de côtés chacun infiniment petit, et dont le prolongement est la tangente de la courbe, il est clair qu'on fait une supposition erronée; mais l'erreur se trouve corrigée dans le calcul par l'omission qu'on y fait des quantités infiniment petites. C'est ce qu'on peut faire voir aisément dans des exemples, mais dont il serait peut-être difficile de donner une démonstration générale.

Newton, pour éviter la supposition des infiniment petits, a considéré les quantités mathématiques comme engendrées par le mouvement, et il a cherché une méthode pour déterminer directement les vîtesses ou plutôt le rapport des vîtesses variables avec lesquelles ces quantités sont produites; c'est ce qu'on appelle, d'après lui, la *méthode des fluxions* ou *le calcul fluxionnel*, parce qu'il a nommé ces vîtesses *fluxions* des quantités. Cette méthode ou ce calcul s'accorde pour le fond et pour les opérations, avec le calcul différentiel, et n'en diffère que par la métaphysique qui paraît en effet plus claire, parce que tout le monde a ou croit avoir une idée de la vîtesse. Mais, d'un côté, introduire le mouvement dans un calcul qui n'a que des quantités algébriques pour objet, c'est y introduire une idée étrangère, et qui oblige à regarder ces quantités comme des lignes parcourues par un mobile; de l'autre, il faut avouer qu'on n'a pas même une idée bien nette de ce que c'est que la vîtesse d'un point à chaque instant, lorsque cette vîtesse est variable; et on peut voir par le savant Traité des fluxions de *Maclaurin*, combien il est difficile de démontrer rigoureusement la méthode des fluxions, et combien d'artifices particuliers il faut employer pour démontrer les différentes parties de cette méthode.

Aussi *Newton* lui-même, dans son livre des Principes, a préféré, comme plus courte, la méthode des dernières raisons des quantités évanouissantes; et c'est aux principes de cette méthode que se réduisent en dernière analyse les démonstrations relatives à celle des fluxions. Mais cette méthode a, comme celle des limites dont nous avons parlé plus haut, et qui n'en est proprement que la traduction algébrique, le grand inconvénient de considérer les quantités dans l'état où elles cessent, pour ainsi dire, d'être quantités; car quoiqu'on conçoive toujours bien le rapport de deux quantités tant qu'elles demeurent finies, ce rapport n'offre plus à l'esprit une idée claire et précise, aussitôt que ses termes deviennent l'un et l'autre nuls à-la-fois.

C'est pour prévenir ces difficultés, qu'un habile Géomètre anglais, qui a fait dans l'analyse des découvertes importantes, a proposé dans ces derniers temps, de substituer à la méthode des fluxions jusqu'alors suivie scrupuleusement par tous les géomètres anglais, une autre méthode purement analytique, et analogue à la méthode différentielle, mais dans laquelle, au lieu de n'employer que les différences infiniment petites ou nulles des quantités variables, on emploie d'abord des valeurs différentes de ces quantités, qu'on égale ensuite, après avoir fait disparaître par la division, le facteur que cette égalité rendrait nul. Par ce moyen, on évite à la vérité les infiniment petits et les quantités évanouissantes; mais les procédés et les applications du calcul sont embarrassans et peu naturels, et on doit convenir que cette manière de rendre le calcul différentiel plus rigoureux dans ses principes, lui fait perdre ses principaux avantages, la simplicité de la méthode et la facilité des opérations. *Voyez* l'ouvrage intitulé : *the residual analysis a new branch of the Algebric art*, *by* John Landen, *London*, 1764, ainsi que le discours publié par le même auteur, en 1758, sur le même objet.

Ces variations dans la manière d'établir et de présenter les principes du calcul différentiel, et même dans la dénomination de ce calcul, montrent, ce me semble, qu'on n'en avait pas saisi la véritable théorie, quoiqu'on eût trouvé d'abord les règles les plus simples et les plus commodes pour le mécanisme des opérations.

On trouvera de nouvelles considérations sur cet objet dans la première leçon sur le Calcul des fonctions.

Dans un mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin, de 1772, et dont l'objet était l'analogie entre les différentielles et les puissances positives, et entre les intégrales et les puissances négatives, j'avançai que la théorie du développement des fonctions en série, contenait les vrais principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou de limites, et je démontrai par cette théorie le théorème de *Taylor*, qui est le fondement de la méthode des séries, et qu'on n'avait encore démontré que par le secours de ce calcul, ou par la considération des différences infiniment petites.

Depuis, *Arbogast* a présenté à l'Académie des Sciences, un Mémoire où la même idée est exposée avec des développemens et des applications qui lui appartiennent. Mais l'auteur n'ayant encore rien publié sur ce sujet (*), et m'étant trouvé engagé par des circonstances particulières à développer les principes généraux de l'analyse, j'ai rappelé mes anciennes idées sur ceux du calcul différentiel, et j'ai fait de nouvelles réflexions tendantes à les confirmer et à les généraliser; c'est ce qui a occasionné cet Ecrit, que je ne me détermine à publier que par la considération de l'utilité dont il peut être à ceux qui étudient cette branche importante de l'analyse.

Il peut, au reste, paraître surprenant que cette manière d'envisager le calcul différentiel ne se soit pas offerte plus tôt aux géomètres, et surtout qu'elle ait échappé à *Newton*, inventeur de la méthode des séries et de celle des fluxions. Mais nous observerons à cet égard qu'en effet *Newton* n'avait d'abord employé que la simple considération des séries pour résoudre le problème

---

(*) L'ouvrage que feu *Arbogast* a donné en 1800, sous le titre de *Calcul des Dérivations*, a un objet différent, comme l'auteur en avertit lui-même à la fin de sa préface.

troisième du second livre des Principes, dans lequel il cherche la loi de la résistance nécessaire pour qu'un corps pesant décrive librement une courbe donnée, problème qui dépend naturellement du calcul différentiel ou fluxionnel. On sait que *Jean Bernoulli* trouva cette solution fausse, en la comparant avec celle qui résulte du calcul différentiel; et son neveu, *Nicolas*, prétendit que l'erreur venait de ce que *Newton* avait pris le troisième terme de la série convergente dans laquelle il réduisait l'ordonnée de la courbe donnée, pour la différentielle seconde de cette ordonnée, et le quatrième pour la différentielle troisième, au lieu que, suivant les règles du calcul différentiel, ces termes ne sont, l'un que la moitié, l'autre que la sixième partie des mêmes différentielles. (*Voyez* les Mémoires de l'Académie des Sciences, de 1711, et le tome I des Œuvres de *Jean Bernoulli.*) *Newton*, sans répondre, abandonna entièrement sa première méthode, et donna dans la seconde édition des Principes, une solution différente du même problème, fondée sur la méthode même du calcul différentiel. Depuis, on n'a plus parlé de l'application de la méthode des séries à ce genre de problèmes, que pour avertir de la méprise dans laquelle *Newton* était tombé, et faire sentir la nécessité d'avoir égard à l'observation de *Nicolas Bernoulli.* (*Voyez* l'Encyclopédie, aux articles *différentiel*, *force.*) Mais nous ferons voir que cette méprise ne vient point du fond de la méthode, mais simplement de ce que *Newton* n'a pas tenu compte de tous les termes auxquels il fallait avoir égard; et nous rectifierons de cette manière sa première solution, dont aucun des commentateurs des Principes n'a fait mention.

L'objet de cet Ouvrage est de donner la théorie des fonctions, considérées comme primitives et dérivées; de résoudre par cette théorie, les principaux problèmes d'analyse, de géométrie et de mécanique, qu'on fait dépendre du calcul différentiel; et de donner par là, à la solution de ces problèmes, toute la rigueur des démonstrations des Anciens.

PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSITION DE LA THÉORIE, AVEC SES PRINCIPAUX USAGES DANS L'ANALYSE.

CHAPITRE PREMIER.

Développement en série d'une fonction d'une variable, lorsqu'on attribue un accroissement à cette variable. Formation successive des termes de la série. Théorème important sur la nature de ces séries.

1. Nous désignerons en général par la caractéristique f ou F, placée devant une variable, toute fonction de cette variable, c'est-à-dire, toute quantité dépendante de cette variable, et qui varie avec elle suivant une loi donnée. Ainsi fx ou Fx désignera une fonction de la variable x; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée de cette variable, comme x^2, $a+bx$, etc., on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi fx désignera une fonction de x, $f(x^2)$, $f(a+bx)$, etc. désigneront des fonctions de x^2, de $a+bx$, etc.

Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes, comme de x, y, nous écrirons $f(x, y)$, et ainsi des autres.

Lorsque nous voudrons employer d'autres caractéristiques pour marquer les fonctions, nous aurons soin d'en avertir.

Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x. Si à la place de x, on y met $x+i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$, et par la théorie des séries, on pourra la développer en une série de cette forme

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + \text{etc.},$$

dans laquelle les quantités p, q, r, etc., coefficiens des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive x, et indépendantes de l'indéterminée i.

2. Mais pour ne rien avancer gratuitement, nous commencerons par examiner la forme même de la série qui doit représenter le développement de toute fonction fx, lorsqu'on y substitue $x + i$ à la place de x, et que nous avons supposée ne devoir contenir que des puissances entières et positives de i.

Cette supposition se vérifie en effet par le développement des différentes fonctions connues; mais personne, que je sache, n'a cherché à la démontrer *à priori;* ce qui me paraît néanmoins d'autant plus nécessaire, qu'il y a des cas particuliers où elle ne peut pas avoir lieu. D'ailleurs, le calcul différentiel porte expressément sur cette même supposition, et les cas qui font exception, sont précisément ceux où ce calcul a été accusé d'être en défaut.

Je vais d'abord démontrer que dans la série résultante du développement de la fonction $f(x+i)$, il ne peut se trouver aucune puissance fractionnaire de i, à moins qu'on ne donne à x des valeurs particulières.

En effet, il est clair que les radicaux de i ne pourraient venir que des radicaux renfermés dans la fonction primitive fx, et il est clair en même temps que la substitution de $x + i$ au lieu de x, ne pourrait ni augmenter ni diminuer le nombre de ces radicaux, ni en changer la nature, tant que x et i sont des quantités indéterminées. D'un autre côté, on sait par la théorie des équations, que tout radical a autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans son exposant, et que toute fonction irrationnelle a par conséquent autant de valeurs différentes qu'on peut faire de combinaisons des différentes valeurs des radicaux qu'elle renferme. Donc si le développement de la fonction $f(x+i)$ pouvait contenir un terme de la forme $ui^{\frac{m}{n}}$, la fonction fx serait nécessairement

sairement irrationnelle, et aurait par conséquent un certain nombre de valeurs différentes, qui serait le même pour la fonction $f(x+i)$, ainsi que pour son développement. Mais ce développement étant représenté par la série $fx+pi+qi^2+$ etc. $+ui^{\frac{m}{n}}+$ etc., chaque valeur de fx se combinerait avec chacune des n valeurs du radical $\sqrt[n]{i^m}$; de sorte que la fonction $f(x+i)$ développée, aurait plus de valeurs différentes que la même fonction non développée, ce qui est absurde.

Cette démonstration est générale et rigoureuse, tant que x et i demeurent indéterminées; mais elle cesserait de l'être, si on donnait à x des valeurs déterminées; car il serait possible que ces valeurs détruisissent quelques radicaux dans fx, qui pourraient néanmoins subsister dans $f(x+i)$. Nous examinerons plus bas (chap. IV) ces cas particuliers et les conséquences qui en résultent.

Nous venons de voir que le développement de la fonction $f(x+i)$ ne saurait contenir en général des puissances fractionnaires de i; il est facile de s'assurer aussi qu'il ne pourra contenir non plus des puissances négatives de i.

Car si parmi les termes de ce développement, il y en avait un de la forme $\frac{r}{i^m}$, m étant un nombre entier positif, en faisant $i=0$, ce terme deviendrait infini; donc la fonction $f(x+i)$ devrait devenir infinie lorsque $i=0$; par conséquent il faudrait que fx devînt infinie, ce qui ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières de x.

3. Nous étant ainsi assurés de la forme générale du développement de la fonction $f(x+i)$, voyons plus particulièrement en quoi ce développement consiste, et ce que signifie chacun de ses termes.

On voit d'abord que si on cherche dans cette fonction ce qui est indépendant de la quantité i, il n'y a qu'à faire $i=0$, ce qui la réduit à fx. Ainsi fx est la partie de $f(x+i)$, qui reste lorsque la quantité i devient nulle; de sorte que $f(x+i)$ sera égale à fx, plus à une quantité qui doit disparaître en faisant $i=0$, et qui sera par conséquent, ou pourra être censée multipliée par une puissance positive de i : et comme nous venons de démontrer que dans le développement de $f(x+i)$, il ne peut entrer aucune puissance fractionnaire de i, il s'ensuit que la quantité dont il s'agit, ne pourra être multipliée que par une puissance positive et entière de i; elle sera donc de la forme iP, P étant une fonction de x et i, qui ne deviendra point infinie lorsque $i=0$.

On aura donc ainsi

$$f(x+i)=fx+iP;$$

donc $f(x+i)-fx=iP$, et par conséquent divisible par i; la division faite, on aura

$$P=\frac{f(x+i)-fx}{i}.$$

Or, P étant une nouvelle fonction de x et i, on pourra de même en séparer ce qui est indépendant de i, et qui par conséquent ne s'évanouit pas lorsque i devient nul. Soit donc p ce que devient P lorsqu'on fait $i=0$, p sera une fonction de x sans i; et par un raisonnement semblable au précédent, on prouvera que $P=p+iQ$, iQ étant la partie de P, qui devient nulle lorsque $i=0$, et Q étant une nouvelle fonction de x et i, qui ne devient pas infinie lorsque $i=0$.

On aura donc $P-p=iQ$, et par conséquent divisible par i; la division faite, on aura

$$Q=\frac{P-p}{i}.$$

Soit q la valeur de Q, en y faisant $i=0$, q sera une fonction de x sans i, et la partie de Q, qui devient nulle lorsque i devient nul, sera comme ci-dessus de la forme iR, R étant une fonction de x et i, qui ne deviendra pas infinie lorsque $i=0$, et qu'on trouvera en divisant $Q-q$ par i, et ainsi de suite.

On aura, par ce procédé,

$$f(x+i)=fx+iP,\ P=p+iQ,\ Q=q+iR,\ R=r+iS,\ \text{etc.};$$

donc, substituant successivement

$$f(x+i)=fx+iP=fx+ip+i^2Q=fx+ip+i^2q+i^3R=\text{etc.};$$

ce qui donnera pour le développement de $f(x+i)$, une série de la forme que nous avons supposée au commencement.

4. Soit, par exemple, $fx=\frac{1}{x}$, on aura

$$f(x+i)=\frac{1}{x+i};$$

donc

$$iP=\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x}=-\frac{i}{x(x+i)};\quad P=-\frac{1}{x(x+i)};\quad p=-\frac{1}{x^2};$$

$$iQ=-\frac{1}{x(x+i)}+\frac{1}{x^2}=\frac{i}{x^2(x+i)};\quad Q=\frac{1}{x^2(x+i)};\quad q=\frac{1}{x^3};$$

$$iR=\frac{1}{x^2(x+i)}-\frac{1}{x^3}=-\frac{i}{x^3(x+i)};\ R=-\frac{1}{x^3(x+i)};\quad r=-\frac{1}{x^4};$$

etc.;

ainsi on aura

$$\frac{1}{x+i}=\frac{1}{x}-\frac{i}{x(x+i)}=\frac{1}{x}-\frac{i}{x^2}+\frac{i^2}{x^2(x+i)};$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{i}{x^2}+\frac{i^2}{x^3}-\frac{i^3}{x^3(x+i)}=\text{etc.},$$

comme il résulte de la division actuelle.

Prenons encore pour exemple, la fonction irrationnelle $\sqrt{x}$. On aura donc

$$fx=\sqrt{x},\quad f(x+i)=\sqrt{(x+i)}=\sqrt{x}+iP;$$

donc

$$iP=\sqrt{(x+i)}-\sqrt{x}=\frac{i}{\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}};$$

$$P=\frac{1}{\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}};\quad p=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$iQ = P - p = \frac{1}{\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{(x+i)}}{2\sqrt{x}\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]}$$

$$= -\frac{i}{2\sqrt{x}\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2};$$

$$Q = -\frac{1}{2\sqrt{x}\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2}; \quad q = -\frac{1}{8x\sqrt{x}};$$

$$iR = Q - q = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{i - 2x + 2\sqrt{x} \times \sqrt{x+i}}{4x\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2}$$

$$= \frac{i}{2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}}{4x\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^3};$$

$$R = \frac{\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^3}; \quad r = \frac{1}{16x^2\sqrt{x}};$$

etc.

De sorte qu'on aura, de cette manière,

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + \frac{i}{\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^3}\,i^3$$

$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{i^3}{16x^2\sqrt{x}} - \text{etc.}$$

Cette dernière série est celle que l'on trouve par l'extraction actuelle de la racine quarrée ou par la formule du binome.

5. Il serait difficile d'exécuter ces opérations sur des fonctions irrationnelles plus compliquées ; mais en faisant disparaître les irrationnalités par rapport à la quantité i, l'application de la méthode n'aura plus de difficulté.

Ainsi, en reprenant l'exemple précédent, on partira de l'équation

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + iP,$$

qui étant élevée au carré pour dégager l'i de dessous le signe radical, devient après la division par i,

$$1 = 2P\sqrt{x} + iP^2;$$

faisant $i = 0$, P devient p, et l'on aura

$$1 = 2p\sqrt{x}; \quad \text{d'où} \quad p = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On fera donc $P = p + iQ$, ce qui étant substitué, on aura, après la division par i,

$$0 = \frac{1}{4x} + 2Q\sqrt{x} + \frac{iQ}{\sqrt{x}} + i^2Q^2.$$

Faisant $i = 0$, Q devient q; donc on aura

$$\frac{1}{4x} + 2q\sqrt{x} = 0;$$

d'où l'on tire

$$q = -\frac{1}{8x\sqrt{x}}.$$

On fera donc $Q = q + iR$, et ainsi de suite.

On peut, à la vérité, trouver les valeurs de p, q, r, etc. d'une manière plus expéditive, en faisant tout de suite l'équation

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + pi + qi^2 + ri^3 + \text{etc.};$$

l'élevant au carré pour dégager la quantité i de dessous le signe, et comparant ensuite les termes affectés des mêmes puissances de i, pour que cette quantité puisse demeurer indéterminée, comme on le suppose; mais la méthode précédente a l'avantage de ne développer la série qu'autant qu'on veut, et de donner la valeur exacte du reste. En effet, si on voulait, par exemple, s'arrêter au second terme pi, on aurait Qi^2 pour la valeur du reste, et on pourrait déterminer Q par la résolution de l'équation en Q. Dans l'exemple ci-dessus, cette équation est

$$i^2Q^2 + Q\left(2\sqrt{x} + \frac{i}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{4x} = 0,$$

et pour la résoudre de manière que l'expression de Q ne présente pas la quantité i au dénominateur, il n'y a qu'à faire $Q=\frac{1}{V}$, ce qui réduira l'équation à cette forme,

$$V^2+4V(2x\sqrt{x}+i\sqrt{x})+4xi^2=0,$$

d'où l'on tire

$$V=-4x\sqrt{x}-2i\sqrt{x}\pm 4x\sqrt{(x+i)};$$

et comme Q ne doit pas devenir infini lorsque $i=0$ (art. 3), il faudra que V ne devienne pas nul dans le même cas; par conséquent, il faudra prendre le signe inférieur du radical; on aura ainsi

$$V=-2\sqrt{x}(2x+i)-4x\sqrt{(x+i)},$$

et de là

$$Q=-\frac{1}{2\sqrt{x}(2x+i)+4x\sqrt{(x+i)}}=-\frac{1}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^2},$$

comme plus haut. On en usera de même dans tous les cas semblables.

6. Mais le principal avantage de la méthode que nous avons exposée, consiste en ce qu'elle fait voir comment les fonctions p, q, r, etc. résultent de la fonction principale fx, et surtout en ce qu'elle prouve que les restes iP, iQ, iR, etc. sont des quantités qui doivent devenir nulles lorsque $i=0$; d'où l'on tire cette conséquence importante, que dans la série $fx+pi+qi^2+ri^3+$ etc. qui naît du développement de $f(x+i)$, on peut toujours prendre i assez petit pour qu'un terme quelconque soit plus grand que la somme de tous les termes qui le suivent; et que cela doit avoir lieu aussi pour toutes les valeurs plus petites de i.

Car, puisque les restes iP, iQ, iR, etc. sont des fonctions de i qui deviennent nulles, par la nature même du développement, lorsque $i=0$, il s'ensuit qu'en considérant la courbe dont i serait l'abscisse, et l'une de ces fonctions l'ordonnée, cette courbe coupera l'axe à l'origine des abscisses; et à moins que ce point ne soit un point singulier, ce qui ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières de x, comme il est facile de s'en convaincre avec un peu de réflexion, et par un raisonnement analogue à celui de l'article 2, le cours de la courbe sera nécessairement continu depuis ce point; donc elle s'approchera peu à peu de l'axe avant de le couper, et s'en approchera par conséquent d'une quantité moindre qu'aucune quantité donnée; de sorte qu'on pourra toujours trouver une abscisse i correspondant à une ordonnée moindre qu'une quantité donnée; et alors toute valeur plus petite de i répondra aussi à des ordonnées moindres que la quantité donnée.

On pourra donc prendre i assez petit, sans être nul, pour que iP soit moindre que fx, ou pour que iQ soit moindre que p, ou pour que iR soit moindre que q, et ainsi des autres; et par conséquent pour que i^2Q soit moindre que ip, ou que i^3R soit moindre que i^2q, etc.; donc, puisque (art. 3),

$$iP = ip + i^2q + i^3r + \text{etc.}, \quad i^2Q = i^2q + i^3r + \text{etc.}, \quad i^3R = i^3r + \text{etc.},$$

il s'ensuit qu'on pourra toujours donner à i une valeur assez petite pour que chaque terme de la série $fx + ip + i^2q + i^3r + \text{etc.}$ devienne plus grand que la somme de tous les termes suivans; et alors toute valeur de i plus petite que celle-là satisfera toujours à la même condition.

On doit regarder ce théorème comme un des principes fondamentaux de la théorie que nous nous proposons de développer: on le suppose tacitement dans le calcul différentiel et dans celui des fluxions; et c'est par cet endroit qu'on peut dire que ces calculs donnent le plus de prise sur eux, surtout dans leur application aux problèmes géométriques et mécaniques. Les doutes qui pourraient rester sur la démonstration de ce théorème, parce que le procédé que nous avons employé pour trouver les restes iP, iQ, iR, etc. n'est applicable qu'aux fonctions algébriques, seront levés dans le chapitre V, où nous donnerons l'expression générale de ces restes, et la manière d'en déterminer les limites.

7. Il faut remarquer au reste que la méthode que nous venons de donner pour trouver successivement les termes de la série qui

représente une fonction de $x+i$, développée suivant les puissances de i, ne peut s'appliquer en général au développement d'une fonction de x et de i, qu'autant que cette fonction est susceptible d'être réduite en une série qui procède suivant les puissances positives et entières de i. Car le raisonnement de l'article 2, par lequel nous avons prouvé que toute fonction de $x+i$ est, généralement parlant, susceptible de cette forme, ne pourrait pas s'appliquer à une fonction quelconque de x et i. Mais dans les cas où cette réduction est possible, on pourra toujours appliquer à la série résultante du développement suivant les puissances ascendantes de i, la conséquence que nous en avons tirée dans l'article précédent, savoir, que la quantité i pourra être prise assez petite pour qu'un terme quelconque de la série soit plus grand que tous ceux qui le suivent, pris ensemble.

CHAPITRE

CHAPITRE II.

Fonctions dérivées; leur notation et leur algorithme.

8. Nous avons vu que le développement de $f(x+i)$ donne naissance à différentes autres fonctions p, q, r, etc., toutes dérivées de la fonction principale fx, et nous avons donné la manière de trouver ces fonctions dans des cas particuliers. Mais pour établir une théorie sur ces sortes de fonctions, il faut rechercher la loi générale de leur dérivation.

Pour cela, reprenons la formule générale

$$f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \text{etc.},$$

et supposons que l'indéterminée x devienne $x+o$, o étant une quantité quelconque indéterminée et indépendante de i; il est visible que $f(x+i)$ deviendra $f(x+i+o)$, et l'on voit en même temps que l'on aurait le même résultat en mettant simplement $i+o$ à la place de i dans $f(x+i)$. Donc aussi, le résultat doit être le même, soit qu'on mette, dans la série $fx+pi+qi^2+ri^3+$ etc., $i+o$ à la place de i, soit qu'on y mette $x+o$ au lieu de x.

La première substitution donnera

$$fx + p(i+o) + q(i+o)^2 + r(i+o)^3 + \text{etc.};$$

savoir, en développant les puissances de $i+o$, et n'écrivant, pour plus de simplicité, que les deux premiers termes de chaque puissance, parce que la comparaison de ces termes suffira pour les déterminations dont nous avons besoin,

$$\begin{aligned} &fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \text{etc.}; \\ &\quad + po + 2qio + 3ri^2o + 4si^3o + \text{etc.} \end{aligned}$$

Pour faire l'autre substitution, soient $fx+f'xo+$etc., $p+p'o+$etc., $q+q'o+$ etc., $r+r'o+$ etc., ce que deviennent les fonctions fx, p, q, r, etc. en y mettant $x+o$ pour x, et ne considérant dans le développement que les termes qui contiennent la première puissance de o, il est clair que la même formule deviendra

$$\begin{aligned} &fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \text{etc.} \\ &+f'xo + p'io + q'i^2o + r'i^3o + \text{etc.} \end{aligned}$$

Comme ces deux résultats doivent être identiques, quelles que soient les valeurs de i et de o, on aura, en comparant les termes affectés de o, de io, de i^2o, etc.,

$$p = f'x, \quad 2q = p', \quad 3r = q', \quad 4s = r', \text{ etc.}$$

Maintenant, de même que $f'x$ est la première fonction dérivée de fx, il est clair que p' est la première fonction dérivée de p, que q' est la première fonction dérivée de q, r' la première fonction dérivée de r, et ainsi de suite. Donc, si, pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par $f'x$ la première fonction dérivée de fx, par $f''x$ la première fonction dérivée de $f'x$, par $f'''x$ la première fonction dérivée de $f''x$, et ainsi de suite, on aura

$$p = f'x, \qquad \text{et de là} \quad p' = f''x\,;$$

donc $$q = \frac{p'}{2} = \frac{f''x}{2}, \quad \text{et de là} \quad q' = \frac{f'''x}{2}\,;$$

donc $$r = \frac{q'}{3} = \frac{f'''x}{2.3}, \quad \text{et de là} \quad r' = \frac{f^{\text{IV}}x}{2.3}\,;$$

donc $$s = \frac{r'}{4} = \frac{f^{\text{IV}}x}{2.3.4}, \quad s' = \frac{f^{\text{V}}x}{2.3.4}\,;$$

et ainsi de suite.

Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction $f(x+i)$, on aura

$$f(x+i) = fx + f'xi + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x}{2.3}i^3 + \frac{f^{\text{IV}}x}{2.3.4}i^4 + \text{ etc.}$$

Cette nouvelle expression a l'avantage de faire voir comment les termes de la série dépendent les uns des autres, et surtout comment, lorsqu'on sait former la première fonction dérivée d'une fonction primitive quelconque, on peut former toutes les fonctions dérivées que la série renferme.

9. Nous appellerons la fonction fx, *fonction primitive*, par rapport aux fonctions $f'x$, $f''x$, etc. qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, *fonctions dérivées*, par rapport à celle-là. Nous nommerons de plus la première fonction dérivée $f'x$, *fonction prime;* la seconde fonction dérivée $f''x$, *fonction seconde;* la troisième fonction dérivée $f'''x$, *fonction tierce*, et ainsi de suite.

De la même manière, si y est supposée une fonction de x, nous dénoterons ses fonctions dérivées par y', y'', y''', etc., de sorte que y étant une fonction primitive, y' sera sa fonction *prime*, y'' en sera la fonction *seconde*, y''' la fonction *tierce*, et ainsi de suite.

De sorte que x devenant $x+i$, y deviendra

$$y + y'i + \frac{y''i^2}{2} + \frac{y'''i^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Ainsi, pourvu qu'on ait un moyen d'avoir la fonction prime d'une fonction primitive quelconque, on aura, par la simple répétition des mêmes opérations, toutes les fonctions dérivées, et par conséquent tous les termes de la série qui résulte du développement de la fonction primitive.

Au reste, pour peu qu'on connaisse le calcul différentiel, on doit voir que les fonctions dérivées y', y'', y''', etc. relatives à x, coïncident avec les expressions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc.