» Voici, par heure, les nombres d'étoiles filantes observées :

	Du 13 au 14.	Du 14 au 15.	Du 15 au 16.
10^h à 11^h	bolide	3	1
11 à 12	6	5	3
12 à 1	6	7	6
1 à 2	»	19	»
2 à 3	»	16	»
3 à 4	»	20	»
	12	70	10
		Total 92	

GÉOMÉTRIE. — *Sur la définition de l'aire d'une surface.* Note de M. **H. Lebesgue**, présentée par M. E. Picard.

« Le problème de la mesure des surfaces planes limitées par des courbes fermées sans point double peut se poser de la façon suivante (Voir Hadamard, *Leçons de Géométrie élémentaire*, page 289) : Faire correspondre à chaque surface un nombre appelé *aire*, de façon que deux surfaces égales aient des aires égales et que la surface formée par la réunion d'un nombre fini ou infini de surfaces, ayant des portions de frontière communes et n'empiétant pas les unes sur les autres, ait pour aire la somme des aires des surfaces composantes (conditions A).

» Le problème est possible lorsqu'on se limite aux polygones. Une surface plane étant donnée, les aires des polygones intérieurs à cette surface ont une limite supérieure s que l'on appelle *aire intérieure*, et les aires des polygones comprenant la surface ont une limite inférieure S que l'on appelle *aire extérieure*. Il est possible de décomposer la surface en polygones dont la somme des aires est s, de façon que chaque point de l'*intérieur* appartienne à un polygone, et à un seul ou soit sur la frontière d'un polygone. Il faut donc attribuer à la surface proposée l'aire s. Mais avec cette définition l'aire de la somme de deux surfaces pourrait être plus grande que la somme des aires de ces deux surfaces. Cela n'arrive pas pour les surfaces telles que $S = s$; on les appelle *surfaces quarrables*. Le problème de la mesure des surfaces planes n'est donc possible que pour les surfaces quarrables. Si l'on appelle *courbes quarrables* celles qui peuvent être enfermées dans des aires aussi petites que l'on veut, on voit que les frontières d'une surface quarrable sont des courbes quarrables.

» Les conditions A suffisent pour déterminer le problème de la mesure des surfaces sphériques (ou cylindriques de révolution), le problème n'est encore possible que pour certaines surfaces particulières; mais ces conditions A ne suffisent pas en général, de plus elles ne permettent d'établir aucune relation entre les aires planes et les aires sphériques. Il faut donc définir des conditions supplémentaires.

» Je rappelle que les courbes se divisent en deux catégories (Scheeffer, Jordan) : les courbes rectifiables, pour lesquelles les longueurs des lignes polygonales inscrites ont une limite supérieure que l'on appelle *longueur de la courbe,* et les courbes non rectifiables.

» Il a semblé tout d'abord que l'on pouvait définir d'une façon analogue l'aire d'une surface par la considération des surfaces polyédrales inscrites. Schwarz a montré, dans une lettre à Genocchi, que les aires de ces surfaces polyédrales n'ont pas de limite supérieure. J'opérerai donc autrement.

» Soit dans l'espace une ligne polygonale fermée l. Les aires des surfaces polyédrales bilatères simplement connexes ayant l pour unique frontière ont une limite inférieure que j'appelle l'*aire minima de l*. Soit une courbe fermée C, j'inscris dans cette courbe une ligne polygonale l. Il est possible de déterminer deux nombres s et S ($s \leqq S$) tels qu'à partir d'un certain degré de petitesse pour les côtés de l, l'aire minima de l soit comprise entre $s - \varepsilon$ et $S + \varepsilon$ (quel que soit ε). J'appelle s l'aire minima intérieure de C, S l'aire minima extérieure. Si $S = s$ je dirai que la courbe est quarrable et j'appellerai s son aire minima. Pour qu'une courbe soit quarrable il faut et il suffit que sa projection sur tout plan soit quarrable. Les courbes rectifiables sont quarrables. Soient

$$x = f(u, v); \qquad y = \varphi(u, v); \qquad z = \psi(u, v)$$

les coordonnées des points d'une surface (que j'appelle *rectifiable*) telle qu'à toute courbe rectifiable du plan (u, v) corresponde une courbe rectifiable sur la surface. Il est facile de déterminer la forme la plus générale des fonctions f, φ, ψ correspondant aux surfaces rectifiables; ces fonctions sont, à plusieurs points de vue, les analogues des fonctions d'une variable à variation limitée. Les surfaces analytiques sont rectifiables. A une courbe quarrable du plan (u, v) correspond sur la surface rectifiable une courbe quarrable.

» Soit une surface rectifiable S limitée par une courbe quarrable Σ. Je décompose S en morceaux, par des courbes quarrables. La somme des aires minima de ces courbes tend vers une limite, indépendante du choix des courbes de division quand le diamètre maximum de ces courbes tend vers zéro. Cette limite, que l'on aurait aussi pu définir comme limite supérieure, est ce que j'appelle l'*aire*. Elle satisfait aux conditions A. En particulier si l'on a divisé S, par des courbes quarrables, en morceaux dont la somme des aires est inférieure à l'aire de S, on peut affirmer qu'il existe une infinité non dénombrable de points n'appartenant à aucun de ces morceaux.

» Le problème de la mesure des surfaces est donc possible pour les surfaces rectifiables S limitées par des courbes quarrables Σ. Il n'est plus possible si Σ n'est pas quarrable. En opérant comme ci-dessus, on fait correspondre à S un nombre que j'appelle *aire intérieure,* mais il ne satisfait plus aux conditions A. Si la surface rectifiable est définie au delà de Σ, on peut, comme dans le cas du plan, définir l'aire extérieure de S.

» Dans le cas où la surface admet des plans tangents variant d'une façon continue, on peut définir l'aire à l'aide d'une intégrale. On a alors deux définitions d'un même nombre; ces deux définitions concordent.

» Étant donnée une courbe C, il existe une surface rectifiable ayant C pour unique frontière et dont l'aire intérieure est égale à l'aire minima intérieure de C. Je l'appelle *surface minima*. Il n'existe pas, avec les conditions précédentes, de surfaces ayant une aire intérieure plus petite. Une surface minima pour une courbe C est minima pour toute courbe Γ tracée par elle. Si Γ n'est pas quarrable, l'aire extérieure relative à Γ de la surface minima est l'aire minima extérieure de Γ.

» La définition qui précède, de l'aire d'une surface, présente la plus grande analogie avec la définition de la longueur d'une courbe. A une division de la courbe par des points correspond une division de la surface par des courbes quarrables et à la distance de deux points de division sur la courbe, c'est-à-dire à la longueur de la courbe de longueur minima joignant ces deux points, correspond la surface minima d'une des courbes de division, c'est-à-dire l'aire de la surface d'aire minima passant par cette courbe.

» M. Peano a indiqué [1] une définition de l'aire d'une surface dans laquelle intervient une division de la surface en morceaux, par des courbes. Sa définition est donc analogue à celle que je viens de donner. Mais, pour l'appliquer avec certitude, au moins sans études nouvelles, il faut faire certaines hypothèses dont la méthode que j'ai indiquée permet de s'affranchir.

---

[1] *Rendiconti della Accademia dei Lincei;* 1890.

» On peut donner de l'aire d'une surface des définitions plus simples et s'appliquant à des familles de surfaces moins particulières, du moins si l'on renonce à la seconde des conditions A; mais la définition précédente met en évidence une classe très générale de surfaces qui présentent une grande analogie avec les courbes rectifiables.

» Je conviens d'appeler *surfaces applicables* l'une sur l'autre, deux surfaces rectifiables entre les points desquelles il est possible d'établir une correspondance biunivoque et continue conservant les longueurs des courbes rectifiables. Cette définition est plus générale que celle que l'on donne ordinairement. On peut démontrer que les portions correspondantes de deux surfaces applicables ont même aire intérieure et même aire extérieure. Les aires et les longueurs sont donc conservées; les angles ne le sont pas. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le nombre de racines d'une équation algébrique comprises à l'intérieur d'une circonférence donnée.* Note de M. **Michel Petrovitch**, présentée par M. Hermite.

« Dans une Note précédente [1], j'ai démontré le théorème suivant : Soit $F(x) = 0$ une équation algébrique de degré m, à racines réelles ou imaginaires, égales ou inégales; soit ensuite C une circonférence donnée de rayon r, ayant l'origine pour centre. Décrivons de part et d'autre de C deux circonférences C_1 et C_2, ayant l'origine pour centre, de rayons respectifs r_1 et r_2 (avec $r_1 < r < r_2$) et telles que la couronne qu'elles limitent ne contienne aucune racine de $F(x) = 0$.

» Formons la transformée de $F(x) = 0$ en $x = t\sqrt{y}$ et soit

$$\Phi(y, t) = 0 \tag{1}$$

cette transformée. Formons ensuite la transformée de (1) en $y = \sqrt{z_1}$, puis la transformée de celle-ci en $z_1 = \sqrt{z_2}$ et répétons cette opération jusqu'à la transformée d'ordre n, que nous désignerons par

$$\Psi(z_n, t) = 0\,[2]. \tag{2}$$

---

[1] *Comptes rendus*, n° 16 du 16 octobre 1899, p. 583-586.

[2] Ψ étant un polynome en z_n et t, de degré m en z_n.