(Alexandre Guilbaud et Laurent Mazliak)

Semaine 12

Création de l'intégrale moderne

Lebesgue

Henri LEBESGUE
(1875-1941)

Élève à l'ENS de 1894 à 1897

1896 : Borel : Leçons sur la théorie des fonctions

Baire : étude systématique des fonctions continues

1899 -> 1902 : Lebesgue au lycée central de Nancy

1903 : En poste à Rennes

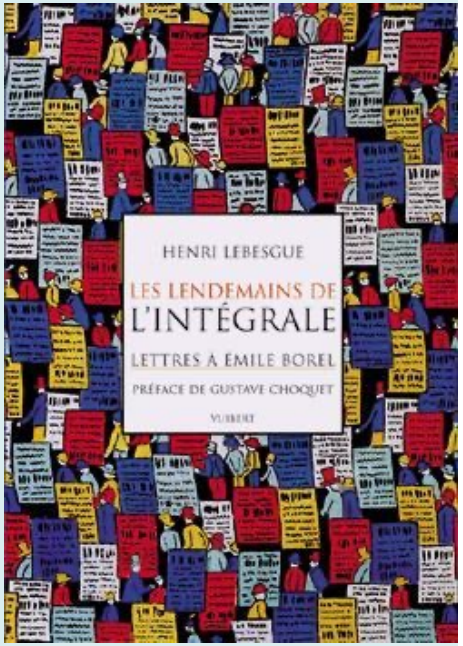
Henri LEBESGUE
(1875-1941)

Entre juin 1899 et avril 1901:
5 notes à l'Académie des Sciences (matériel pour sa thèse)
Toutes présentées par Emile Picard

1899 : *Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan*
1899 : *Sur la définition de l'aire d'une surface*
1900 : Sur la définition de certaines intégrales de surface
1900 : *Sur le minimum de certaines intégrales*
1901 : *Sur une généralisation de l'intégrale définie*

Lebesgue a hésité : moyennement convaincu de l'intérêt (cf plus loin).

Borel va être le premier à se rendre compte du parti à tirer de la vision de Lebesgue (plus que Lebesgue lui même de son propre aveu)



Début d'une relation très forte entre les deux hommes

Lettres de Lebesgue à Borel retrouvées par hasard dans les années 80 -> éditées et commentées par Pierre Dugac (accessibles en ligne sur **NUMDAM**-CSHM 1991 et partiellement éditées en livre (Vuibert))

Brouille entre les deux hommes en 1917 pour des raisons multiples (querelles scientifiques, incompatibilité d'humeur liée à l'effort de guerre…).

Réconciliation « partielle » après 1920.

Note de 1899 : « Sur la définition de l’aire d’une surface »

Lebesgue propose une définition axiomatique de l’aire (propriétés algébriques de la fonction d’aire)

Note très littérale et conceptuelle où Lebesgue cite peu la source de ses réflexions.
Clairement héritées de la définition de la mesure par
- Jordan : se fonde sur les contenus extérieurs
- Borel : additivité dénombrable

Hadamard : « Leçons de géométrie élémentaire »
A.Colin, 1898
Fonctions finiement additives sur les aires des polygônes
==> forcément notion traditionnelle d’aire d’un polygône

Si D = région bornée par une courbe fermée

$\mathring{D} = \bigcup$ polygônes disjoints (union dénombrable)

$$\sum \text{ aires des polygônes } = c_i(D)$$

(simple extension de la définition de c_i de Jordan)

=> Additivité dénombrable conduit à $\text{aire } (D) = c_i(D)$

$$D_1, D_2, \text{ arc } C \text{ frontière en commun}$$

$$c_i(D_1 \cup D_2) = c_i(D_1) + c_i(D_2) + c_e(C)$$

car C devient intérieur à $D_1 \cup D_2$

Puisque C fait partie de la frontière de D_1 et D_2 on a $c_e(C) = 0$ si D_1 et D_2 sont Jordan-mesurables

Sauf si $c_e(C) = 0$ le problème n'a pas de solution.

Dans sa note, Lebesgue en fait ne va pas plus loin et « énonce » :

Si D est Jordan-mesurable et $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$,
où les D_n sont Jordan-mesurables, alors

$$c(D) = \sum_{n=1}^{\infty} c(D_n)$$

où c est l'aire.

Henri
LEBESGUE
(1875-1941)

Thèse soutenue en 1902 en Sorbonne devant Picard et Goursat.
Titre : « **Intégrale, longueur, aire** »
Publiée dans les *Annali di Matematica* la même année.

Lebesgue a hésité sur l'intérêt. Concentration sur des fonctions pathologiques?

Critiques d'Hermite sur ces résultats (aurait tenté de s'opposer à une publication de notes de Lebesgue présentées à l'Académie des Sciences par Emile Picard).

Lebesgue ironisa plus tard, citant Hermite à Stieltjès :
« *Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues n'admettant pas de dérivée* » (pas nécessairement à prendre au pied de la lettre…)

1er chapitre : définition axiomatique de la mesure d'un sous-ensemble de la droite réelle ou du plan réel

$m(E) \geq 0$ sur des ensembles bornés tels que

(i) $m(E) \neq 0$ pour un E

(ii) $m(E + a) = m(E), \forall a \in \mathbb{R}$

(iii)

$$m(\bigcup_n E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

où les E_n sont disjoints.

Problème central : quels sont les ensembles E qui ont une mesure ?

Si on suppose m([0,1])=1, alors m(I)=L(I) pour n'importe quel intervalle et donc

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} L(I_n)$$

si les I_n sont des intervalles disjoints.

Donc, si m(E) est définie, on a

$$m(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} L(I_n) \text{ où } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

$$\inf \sum_{n=1}^{\infty} L(I_n) : \text{ mesure extérieure de E } = m_e(E)$$

$$m(E) \leq m_e(E)$$

Généralisation immédiate de Jordan (// Borel)

Pb : définir la mesure intérieure ?

Si $E \subset [a,b]$ est Jordan-mesurable, on a

$$c_e(E) + c_e([a,b] - E) = b - a$$

Idée probable de Lebesgue : naturel de considérer les ensembles bornés inclus dans [a,b] tels que

$$m_e(E) + m_e([a,b] - E) = b - a$$

<u>Définition</u> de la mesure intérieure :

$$m_i(E) = b - a - m_e([a,b] - E)$$

Clairement,

$$E \subset F \Rightarrow m_i(E) \leq m_i(F)$$

Ensemble **mesurable** : $m_i(E) = m_e(E)$

i. e.

$$m_e(E) + m_e([a,b] - E) = b - a$$

Noter que par définition

E mesurable ssi [a,b]-E est mesurable.

Si m est définie :

$$m_i(E) = b - a - m_e([a,b] - E) \leq b - a - m([a,b] - E) = m(E)$$

D'où $m_i(E) \leq m(E) \leq m_e(E)$

Donc si E mesurable,

$$m_i(E) = m(E) = m_e(E)$$

Solution unique

Lebesgue montre:

$$(E_n) \text{ mesurables } \Rightarrow \bigcup E_n \text{ mesurable}$$

Donc les propriétés de la mesure sont bien satisfaites sur les ensembles mesurables.

Conséquences :

* $m(E_1 - E_2) = m(E_2) - m(E_1)$ si $E_2 \subset E_1$
* $m(\bigcup E_n) = \lim_n m(E_n)$ quand $E_n \subset E_{n+1}$
* $m(\bigcap E_n) = \lim_n m(E_n)$ quand $E_n \supset E_{n+1}$

Par ailleurs, on a facilement :

$$c_i(E) \leq m_i(E) \leq m_e(E) \leq c_e(E)$$

Par exemple :

$\bigcup_{k=1}^{n} I_k \subset E$ (union disjointe d'intervalles).

D'où $m_i(\bigcup_{k=1}^{n} I_k) \leq m_i(E)$. Or,

$$m_i(\bigcup_{k=1}^{n} I_k) = b - a - m_e([a,b] - \bigcup_{k=1}^{n} I_k)$$

et comme $[a,b] - \bigcup_{k=1}^{n} I_k = \bigcup_{r=1}^{m} J_r$ (disjointe),

$$m_e([a,b] - \bigcup_{k=1}^{n} I_k) = \sum_{r=1}^{m} L(J_r) = b - a - \sum_{k=1}^{n} L(I_k)$$

d'où $\sum_{k=1}^{n} L(I_k) \leq m_i(E)$ et donc $c_i(E) \leq m_i(E)$.

Donc tout ensemble Jordan-mesurable est Lebesgue-mesurable avec le contenu pour mesure.

Rapport avec la mesurabilité de Borel?

Rappel : ensembles Borel mesurables obtenus à partir des unions (dénombrables) d'intervalles et les complémentaires

Soit E Lebesgue-mesurable et $\varepsilon_n \downarrow 0$. Pour chaque i, on peut trouver $E \subset A_i=$ union d'intervalles de longueur totale $m(E) + \varepsilon_i$. $E_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$: Borel-mesurable, contient E, et $E_1 - E$ est de mesure nulle.

Donc, on peut trouver $E_1 - E \subset B_i \subset A_i$ (union disjointe d'intervalles) tq $m(B_i) \leq \epsilon_i$. D'où $e = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \subset E_1$ Borel-mesurable et $m(e) = 0$. Posant $E_2 = E_1 - e$, Lebesgue énonce :

Théorème : Si E est mesurable, il existe des ensembles Borel-mesurables E_1 et E_2 tels que $E_1 \supset E \supset E_2$ et

$$m(E) = m(E_1) = m(E_2)$$

Lebesgue rend en quelque sorte effectif le «calcul sur les inégalités» que Borel mentionnait en 1898

Comme on l'a vu, la mesurabilité au sens de Lebesgue est un prolongement direct de celle de Borel.
Par contre, l'application à l'intégration est manifestement son œuvre propre.

2ème chapitre de la thèse de Lebesgue.

Peano : si f est une fonction réelle et si on note E la partie du plan entre le graphe et l'axe des abscisses (E+ la partie au dessus, E- celle en dessous)

$$\overline{\int_a^b} f = c_e(E^+) - c_i(E^-) \qquad \underline{\int_a^b} f = c_i(E^+) - c_e(E^-)$$

Lebesgue propose une « généralisation immédiate » si E est mesurable :

$$\int_a^b f = m(E^+) - m(E^-)$$

Problème de Lebesgue : établir une approche « constructive » de l'intégrale

Idée fondamentale : partitionner l'image de f au lieu du domaine d'intégration [a,b] (Riemann)

$f \geq 0$

$m = \inf_{[a,b]} f ; M = \sup_{[a,b]} f$

$P : m = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = M$

$e_i = \{x, a_i \leq f(x) < a_{i+1}\}$

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} e_i \times [0, a_i] \subset E \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} e_i \times [0, a_{i+1}]$$

D'où, si les e_i sont mesurables:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i m(e_i) \leq m(E) \leq \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(e_i)$$

Or,

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)m(e_i) \leq \| P \| (b-a)$$

où

$$\| P \| = \max_i (a_{i+1} - a_i)$$

d'où on peut définir

$$\int_a^b f = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_i m(e_i) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(e_i)$$

Définition: Si pour tous c et d $\{x, c < f(x) < d\}$ est mesurable f est dite <u>sommable</u>

Quelques années plus tard, Lebesgue changera le vocabulaire et dira *mesurable*

Donc : la définition de l’intégrale par Lebesgue est inspirée par la généralisation de Riemann par Jordan (remplacer les intervalles dans les fonctions en escalier par des ensembles (Jordan)-mesurables)

<u>Mais</u>: décomposition de l’espace d’arrivée : totale nouveauté

Ce qui va convaincre Borel et Lebesgue de l’intérêt ce sont les résultats de stabilité et l’extraordinaire **<u>souplesse</u>** d’utilisation.

En 15 ans, l’intégrale de Lebesgue a conquis la terre entière !

1) Le contre-exemple de Dirichlet $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ devient trivialement intégrable au sens de Lebesgue

2) Plus important, Lebesgue montre

Théorème : Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur $[a, b]$ telles que

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

Alors f est mesurable.

C'est le **premier théorème** exhibant une classe de fonctions stable par convergence simple.

3) Lebesgue montre : f bornée est intégrable au sens de Riemann ssi les points de discontinuité forment un ensemble de mesure nulle.

4) Si f mesurable bornée, si E mesurable,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad \text{si } x \in E \\ 0 & , \quad \text{si } x \notin E \end{cases}$$

définit une fonction mesurable bornée. Donc $\int_E f$

est bien définie.

Souplesse spectaculaire pour changer le domaine d'intégration (≠ Riemann – en gros limitée aux intervalles)

5) Probablement le résultat le plus important

Théorème : Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables définies sur un ensemble mesurable (borné) E, telles que $| f_n(x) | \leq B$ pour tout $x \in E$ et tout n, et $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$, alors

$$\int_E f = \lim_{n \to +\infty} \int_E f_n$$

Preuve spectaculaire de simplicité (illustration de la souplesse de manipulation)

Soit $\varepsilon > 0$.

e_n= ensemble des x tels que $\mid f_{n+p}(x) - f(x) \mid \geq \varepsilon$ pour un p au moins.

e_n est mesurable (union d'ensembles mesurables), $e_{n+1} \subset e_n$ et $\bigcap_n e_n = \emptyset$

Donc $\lim_{n \to +\infty} m(e_n) = 0$.

Alors

$$\mid \int_E (f - f_n) \mid \leq \int_{e_n} \mid f - f_n \mid + \int_{E - e_n} \mid f - f_n \mid \leq$$

$$\leq 2Bm(e_n) + \varepsilon m(E)$$

Autre application fondamentale :

Théorème : Si f' existe et est bornée sur $[a,b]$, elle est mesurable et

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

Preuve :

$$g_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to f'(x)$$

donc mesurable.

Par ailleurs uniformément bornée par hypothèse (accroissements finis). Le théorème précédent (convergence dominée) permet alors d'écrire

$$\int_a^b f' = \lim_{h \to 0} \int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_b^{b+h} f - \int_a^{a+h} f \right) = f(b) - f(a)$$