Master de Mathématiques – Sorbonne Université (M1)

UE 4M039 : Histoire des mathématiques

(Alexandre Guilbaud et Laurent Mazliak)

Semaine 3

Panorama des mathématiques au Moyen-Âge et jusqu'à la période moderne

Alexandre GUILBAUD

(E-mail : alexandre.guilbaud@imj-prg.fr)

I. Les mathématiques grecques en héritage

- Boèce (env. 480 – env. 525), un relais majeur entre l'Antiquité et le Moyen-Age
  - vit en Italie pendant l'époque de l'Antiquité tardive (fin de l'empire romain d'occident).
  - traductions et commentaires d'Aristote en latin.
  - œuvre philosophique, logique, théologique et mathématique (*Consolation de la philosophie*)
  - adopte la structure *trivium – quadrivium* :
    - Grammaire, dialectique, rhétorique
    - Géométrie, arithmétique, astronomie, musique.
  - traduction d'Euclide en latin (perdue)
  - ses *Institutions* (*De institutione arithmetica, De institutione musica, De geometria*) constituent les principaux ouvrages lus dans le monde chrétien médiéval.

Le *quadrivium*

- Arithmétique :
  - *Institution arithmétique* de Boèce (*De institutione arithmetica*) : tirée du livre de Nicomaque de Gerase, *Introduction à l'arithmétique* (vers 180).
- Géométrie :
  - *Institution géométrique* de Boèce (*De geometria*)
  - Euclide n'est presque plus lu en Europe après le V^e^ siècle.
- Astronomie :
  - Le texte le plus célèbre : Aratus, *Les Phénomènes* (vers 280 – 260), poème cosmique ayant influencé Cicéron, Ovide ou Saint-Paul.
  - Plusieurs autres descriptions cosmiques inspirées de Ptolémée circulent, mais sans mathématiques.
  - L'*Almageste* de Ptolémée n'est pas lu en Europe, mais circulation de son traité d'astrologie (*Tétrabible*).

Presque aucune recherche européenne en arithmétique, géométrie et astronomie entre les VI^e^ et le XI^e^ siècles

Eclipse des mathématiques dans le monde chrétien au Moyen-Age ?

Carte du monde connu, tirée d'une version imprimée de 1472 des *Etymologies* d'Isidore de Séville

- Isidore de Séville (env. 560 – 636), dans le 3e livre de ses *Etymologies* :
  - Même si son exposé mathématique reste rudimentaire, il affirme que les mathématiques sont importantes. Par exemple : on a besoin des nombres pour comprendre l'Ecriture sainte, et donc la parole de Dieu.
- Jean de Salisbury (env. 1115 – 1180), dans son *Metalogicon* (1159) :
  - La démonstration « n'est pratiquement plus pratiquée aujourd'hui. Seuls les mathématiciens la pratiquent et même parmi ces derniers, elle tend à devenir presque exclusivement réservée aux géomètres. »
  - « La géométrie », continue-t-il, « est employée surtout par les peuples d'Ibérie et d'Afrique du Nord, ainsi que ceux d'Egypte et d'Arabie ».

II. Les sciences mathématiques « arabes »

- L'héritage gréco-romain :

  « Les [sciences] mathématiques sont appelées les quatre enseignements. Elles sont quatre, car leur sujet est la quantité. La quantité est soit ce qui est continu, soit ce qui discret. Le continu est ou bien en mouvement ou bien au repos. Le mouvant est l'astronomie, le non-mouvant la géométrie. Le discret est soit ce qui est a une raison, c'est-à-dire la musique, soit ce qui n'en a pas, c'est-à-dire les nombres » [Baha al-Din Kharaqi]

- Des innovations :
  - Le « calcul indien »
  - L'« algèbre » (+ trigonométrie et analyse combinatoire).
- Deux traits caractéristiques (selon Roshdi Rashed) :
  - Nouvelle rationalité mathématique
  - Expérience comme preuve.

L'algèbre

- Début du IX^{e} siècle
  - La « Maison de la Sagesse » à Bagdad
  - Apogée des traductions hellénistes
  - Al-Khwarizmi : naissance de l'algèbre
    - style : algorithmique et démonstratif.
    - potentialité : l'application des disciplines mathématiques les unes aux autres → création de nouveaux domaines (exemple : l'analyse diophantienne).
    - La « nouvelle rationalité mathématique » qui apparaît alors va influencer tout son développement ultérieur…

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa **Al-Khwarizmi**

- Né à Khiva (auj. Ouzbékistan), vers 790
- Mort à Badgad, vers 840
- Œuvre mathématique
  - Livre du calcul indien, vers 825
  - Traité d’algèbre, vers 830
- Autres travaux
  - En astronomie : Zīj al-Sindhind (tables indiennes), vers 820 (livre de tables astronomiques et trigonométriques constituant une compilation de sources grecques et indiennes)
  - En géographie : traité de description de la Terre (longitude et latitude de points du monde connu : villes, montagnes, iles, etc.) vers 833, inspiré de celui de Ptolémée

Al-ĵabr wa'l-muqābalah

✓ *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* (composé entre 813 et 833).

✓ Composé de six livres, ayant pour objet la résolution des équations du 2nd degré (à coefficients positifs) :

- 1er livre : théorique (établissement du calcul)
- 2e livre : procédés permettant de se ramener aux types six types d'équations algébriques fondamentaux
- 4 derniers livres : applications pratiques

« un résumé englobant les plus fines et les plus nobles opérations du calcul dont les hommes ont besoin pour la répartition de leurs héritages et de leurs donations, pour leurs partages et pour leurs jugements, pour leurs transactions commerciales et pour toutes les opérations qu'ils ont entre eux relatives à l'arpentage, à la répartition des eaux des rivières, à l'architecture ainsi qu'à d'autres aspects. »

Traduit par Robert de Chester (Espagne, 1145) sous le titre *Liber algebrae et almucabala.*

Al-jâbr wa'l-muqābalah (الجبر و المقابلة)

Dénomination des termes

- l'inconnue : « shay » (*šay*) – littéralement « chose » (transcrit *xay* en espagnol ancien = origine de *x* pour l'inconnue)

- la racine = *gizr*

- le carré de l'inconnue = *mal* (*à* l'origine, « bien possédé », mot qui deviendra synonyme de carré)

- la constante : nombre simple = *dirham* (à l'origine, unité monétaire).

Classement des équations (a, b et c positifs)

$ax^2 = bx$	« des carrés égalent des racines »
$ax^2 = c$	« des carrés égalent un nombre »
$bx = c$	« des racines égalent un nombre »
$ax^2+bx = c$	« des carrés et des racines égalent un nombre »
$ax^2+c = bx$	« des carrés et un nombre égalent des racines »
$ax^2 = bx+c$	« des carrés égalent des racines plus un nombre ».

Al-ĵabr wa'l-muqābalah (الجبر و المقابلة)

- Procédés de transformation des équations
  - ✓ l'*al-jabr* (reprise ou remplissage / à l'origine du mot *algèbre*)
  - ✓ l'*al-muqabala* (balancement, rejet)

- Procédures de calcul (applicables aux équations « normalisées ») :

Exemple : « un carré et dix de ses racines égalent trente-neuf » [$x^2 + 10x = 39$]

> « La règle en cela est que tu divises les racines en deux moitiés, dans ce problème : cinq ; que tu multiplies par lui-même : on a vingt-cinq ; tu l'ajoutes à trente-neuf : on a soixante quatre ; tu prends sa racines qui est huit ; tu en retranches la moitié des racines qui est cinq : il reste trois ; qui est la racine du carré que tu cherches, et le carré est neuf ».

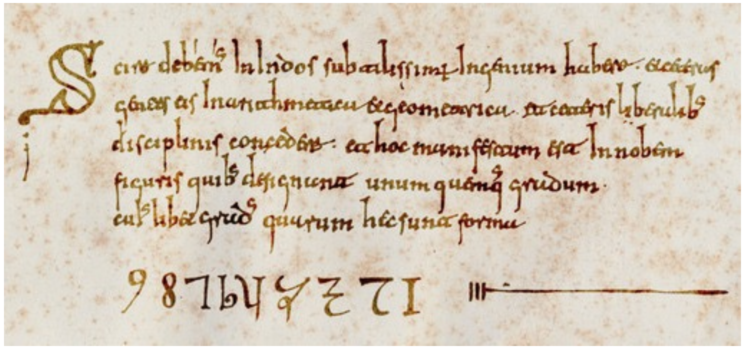
- Les démonstrations des procédures ne sont pas algébriques, mais géométriques : elles reposent sur les figures et la notion d'égalité des aires.

Les chiffres « arabes »

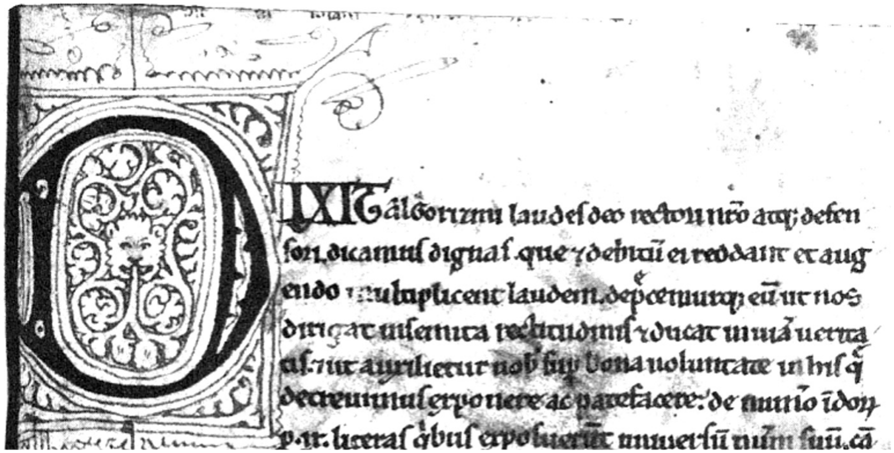
- *Kitāb 'al-ĵāmi` wa'l-tafrīq bī h'isāb 'al-Hind* (كتاب الجامع و التفريق بحساب الهند),
ou *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul indien* :

  - exposé de « la manière de calculer des Indiens à l'aide des neufs caractères » + la « dixième figure en forme de cercle » (le zéro), dont il recommande de « ne pas négliger l'usage afin de ne pas confondre les positions ».

  - le texte arabe n'a pas été retrouvé.



- Codex Vilaginus : manuscrit produit
à Pampelune en Espagne en 976.
Première apparition des chiffres arabes en Occident



- Gerbert d'Aurillac (futur pape Sylvestre II) : introduction en Occident au X^{e} siècle.

- Leonard de Pise, *Liber Abaci*, 1202.

Développements de l’algèbre après Al-Khwarizmi

Al-Khwarizmi (1$^{\text{ère}}$ moitié du IX$^{\text{e}}$ siècle) → Abu Kamil (env. 850 – env. 930)

Les algébristes-arithméticiens

Al-Karaji (env. 953-1029)

Al-Samaw’al (env. 1130-1180)

Les algébristes-géomètres

Ibn Al-Haytham (env. 965-1039)

Al-Khayyam (1048-1131)

Sharaf Al-Din Al-Tusi (env. 1135-1213)

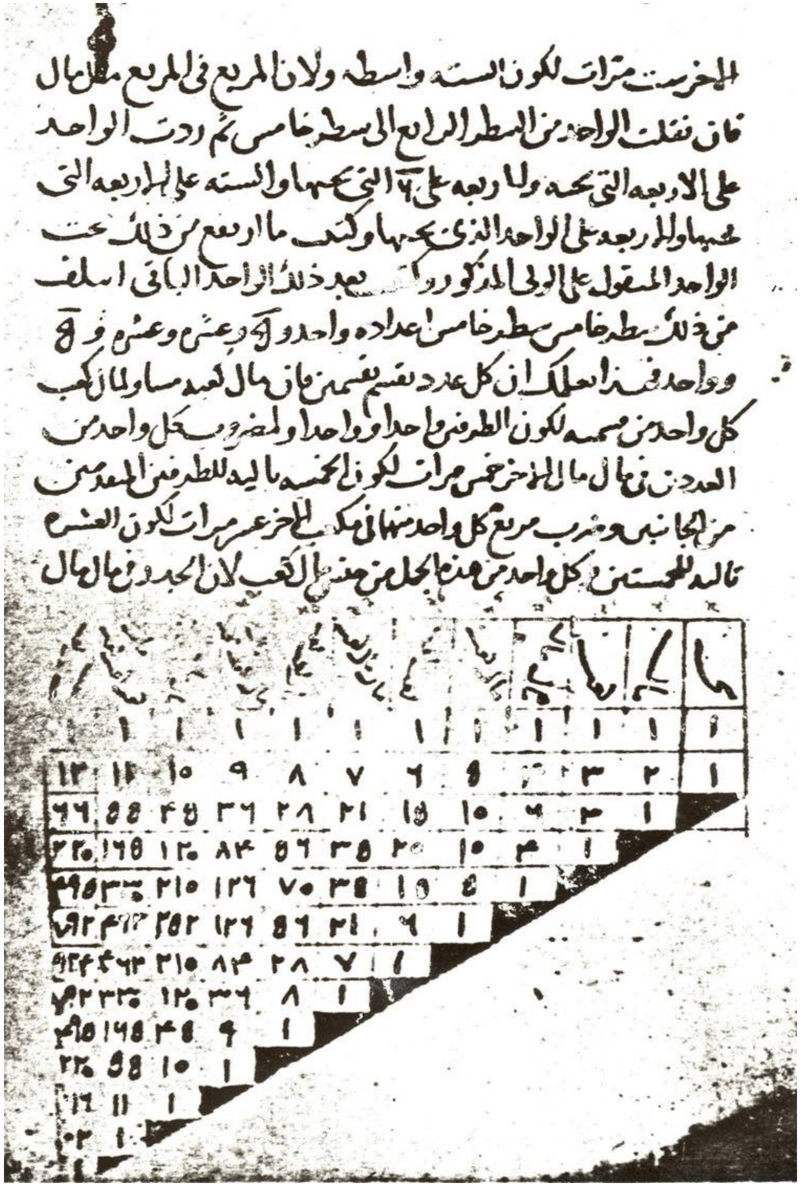
Les algébristes-arithméticiens

- Un siècle et demi après Al-Khwarizmi, Al-Karaji (env. 950 – 1030) conçoit un autre projet de recherche : l'étude systématique de l'application des lois de l'arithmétique et de certains de ses algorithmes aux expressions algébriques et en particulier aux polynômes » [Rashed 1997]
- Projet développé par Al-Karaji dans deux principaux écrits, *al-Fakhri* et *al-Badi*, qui seront étudiés, repris et commentés jusqu'au XVII^e siècle.
- Dans son *al-Bahir* (1174), al-Samaw'al reprend et développe ces travaux :
  - Définition générale de la notion de puissance algébrique
  - Règle $x^m x^n = x^{m+n}$. Etude des opérations arithmétiques sur les monômes et les polynômes (notamment la divisibilité)
  - Extraction de la racine carrée d'un polynôme à coefficients rationnels
  - Formule du développement binomial et tableau des coefficients, etc.
  - « Comment la multiplication, la division, l'addition, la soustraction et l'extraction des racines peuvent-elles être utilisées pour les quantités irrationnelles ? »

Extraits de l'*Al-Bahir* d'Al Samaw'al [d'après R. Rashed]

- « Tout nombre divisé en deux parties, son carré-carré est égal au carré-carré de chacune de ses parties, quatre fois le produit de chacune par le cube de l'autre, six fois le produit du carré de chacune des deux parties ».

- « [C]elui qui a compris ce que nous venons de dire, peut démontrer que pour tout nombre divisé en deux parties, son quadrato-cube est égal à la somme des quadrato-cubes de chacune de ses parties, cinq fois le produit de chacune des parties par le carré-carré de l'autre et dix fois le produit du carré de chacune d'elles par le cube de l'autre. *Et ainsi de suite dans un ordre croissants* »



[Source : http://www.math.ens.fr/culturemath/video/html/Djebbar/icono.htm#10]

Extraits de l'*Al-Bahir* d'Al Samaw'al [d'après Rashed]

- « Rappelons maintenant un principe pour connaître le nombre nécessaire de multiplications de ces degrés les uns par les autres, pour tout nombre divisé en deux parties. **Al-Karaji** a dit que si l'on veut y parvenir il faut poser sur un tableau « un » et « un » au-dessous du premier, déplacer le [premier] « un » sur une autre colonne, ajouter le [premier] « un » à celui qui est au-dessous de lui : on obtiendra ainsi « deux » que l'on posera sous le « un » [déplacé] et on posera le [deuxième] « un » au-dessous de lui. On aura donc (« un », « deux » et « un »). Ceci montre que pour tout nombre composé de deux nombres, si l'on multiplie chacun d'eux par lui-même une seule fois – car les deux extrêmes sont « un » et « un » – et si l'on multiplie chacun d'eux par l'autre deux fois – parce que le terme intermédiaire, est 2 – on obtiendra le carré de ce nombre. Si on déplace ensuite le « un » de la deuxième colonne [etc.] »

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
		1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
			1	5	15	35	70	126	210	330	495
				1	6	21	56	126	252	462	792
					1	7	28	84	210	462	924
						1	8	36	120	330	792
							1	9	45	165	495
								1	10	55	220
									1	11	66
										1	12
											1

Omar Al-Khayyam (env. 1050 – env. 1130)

- Auteur des célèbres « Rubaiyat » (près de mille quatrains).
- En mathématiques :
  - 3 traités connus
    - *Démonstrations de problèmes d'al-jabr et d'al-muqabala*
    - Un traité sur la division du quart de cercle
    - Commentaires sur la difficulté de certains postulats dans les travaux d'Euclide (postulat des parallèles et théorie des proportions)
    - [traité d'arithmétique perdu sur l'extraction des racine *n*-ièmes].

➢ **Théorie géométrique des équations algébriques** (Classification et résolution des équations de degré ≤ 3

➢ Théorie des proportions.

➢ Théorie des parallèles.

Trois problèmes grecs non résolubles à la règle et au compas

- La trisection de l'angle

$$4X^3 - 3X - \cos\alpha = 0$$

$$X = \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$$

- La duplication du cube

$$x^3 = 2a^3$$

- Le problème d'Archimède (partage d'une sphère par un plan en deux parties dont le rapport des volumes est donné)

$$x^3 + r = px^2$$

La conchoïde de droite, attribuée à Nicomède (III^e siècle av. JC)

Menechme, disciple d'Eudoxe de Cnide (IV^e siècle av. JC), deux solutions par intersection de coniques

La trissectrice d'Hippias d'Elis (V^e siècle av. JC)

Le mésolabe d'Eratosthène (III^e siècle av. JC)

Commentaire par Eutocius de la solution d'Archimède par intersection de coniques (V^e siècle)

Omar Al-Khayyam (env. 1050 – env. 1130)

- Dans son algèbre, Al-Khayyam écrit :

  « Il se rencontre dans cette science des problèmes dépendant de certaines espèces très difficiles de théorèmes préliminaires, dans la solution desquels ont échoué la plupart de ceux qui s'en sont occupés. Quant aux Anciens, il ne nous est pas parvenu d'eux d'ouvrage qui en traite ; peut-être, après avoir cherché les solutions et après les avoir étudiées, n'en auraient-ils pas pénétré les difficultés. On peut-être leurs recherches n'en exigeaient pas l'examen ; ou enfin leurs ouvrages à ce sujet, s'il y en a, n'ont pas été traduits dans notre langue. Quant aux modernes, c'est al-Mahani qui, parmi eux, conçut l'idée de résoudre algébriquement le théorème auxiliaire employé par Archimède dans la quatrième proposition du second libre de son traité de la sphère et du cylindre ; or, il fut conduit à une équation renfermant des cubes, des carrés et des nombres qu'il ne réussit pas à résoudre après en avoir fait l'objet d'une longue méditation. On déclara donc que cette solution était impossible, jusqu'à ce qu'apparut Ja'far al-Khazin qui résolut l'équation à l'aide de sections coniques [...] ».

Omar Al-Khayyam (env. 1050 – env. 1130)

« [...] Après lui (al-Khazin) tous les géomètres auraient besoin d'un certain nombre des espèces des susdits théorèmes et l'un en résolut une, l'autre une autre. Mais aucun d'eux n'a rien émis sur l'énumération de ces espèces, ni sur l'exposition de cas de chaque espèces, ni sur leurs démonstrations, si ce n'est relativement à deux espèces, que je ne manquerai pas de faire remarquer. Moi, au contraire, je n'ai jamais cessé de désirer vivement de faire connaître avec exactitude toutes ces espèces, ainsi que de distinguer parmi les cas de chaque espèce les possibles d'avec les impossibles, en me fondant sur des démonstrations ».

L'algèbre d'Al-Khayyam

- L'essence de l'algèbre selon Al-Khayyam : « L'art de l'algèbre et de l'al-muqabala est un art scientifique dont l'objet est le nombre entier et les grandeurs mesurables en tant qu'inconnus mais rapporté à une chose connue par laquelle on peut les déterminer [...]. Les solutions en algèbre s'effectuent par l'équation, je veux dire en égalant ces degrés les uns aux autres »
- Le principe d'homogénéité : « toutes les fois que nous disons : un nombre est égal à une surface, nous entendons par le nombre un quadrilatère à angles droits, dont l'un des deux côtés est un et l'autre une droite égale en mesure au nombre donné ».
- Classification des équations de degré ≤ 3 : 25 équations engendrées par combinaison de quatre termes : le nombre, l'inconnue, son carré et son cube.
  - Équations résolues (sauf [3]) à l'aide du cercle :

Équations binômes

[1]	$bx = c$
[2]	$ax^2 = c$
[3]	$x^3 = c$
[4]	$ax^2 = bx$
[5]	$x^3 = bx$
[6]	$x^3 = ax^2$

Équations trinômes

[7]	$x^2 + bx = c$
[8]	$x^2 + c = bx$
[9]	$x^2 = bx + c$
[10]	$x^3 + ax^2 = bx$
[11]	$x^3 + bx = ax^2$
[12]	$x^3 = ax^2 + bx$

- Équations trinômes résolues à l'aide des sections coniques :

[13]	$x^3 + bx = c$	cercle-parabole
[14]	$x^3 + c = bx$	parabole-hyperbole
[15]	$x^3 = bx + c$	parabole-hyperbole
[16]	$x^3 + ax^2 = c$	parabole-hyperbole
[17]	$x^3 + c = ax^2$	parabole-hyperbole
[18]	$x^3 = ax^2 + c$	parabole-hyperbole

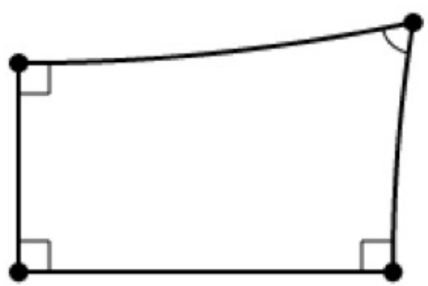
- Equations quadrinômes :

[19]	$x^3 + ax^2 + bx = c$	cercle-hyperbole
[20]	$x^3 + ax^2 + c = bx$	hyperbole-hyperbole
[21]	$x^3 + bx + c = ax^2$	cercle-hyperbole
[22]	$x^3 = ax^2 + bx + c$	hyperbole-hyperbole
[23]	$x^3 + ax^2 = bx + c$	hyperbole-hyperbole
[24]	$x^3 + bx = ax^2 + c$	cercle-hyperbole
[25]	$x^3 + c = ax^2 + bx$	hyperbole-hyperbole

- Al-Khayyam discute les conditions de possibilité des racines positives et remarque explicitement qu'une équation du 3^{e} degré peut avoir 2 racines positives (mais manque la possibilité de 3 racines positives).

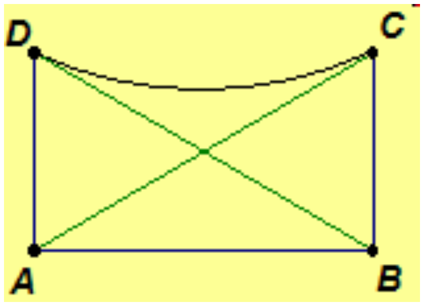
Sharaf al-Din al-Muzaffar **al-Tusi**

- Né vers 1135 à Tus (aujourd'hui en Iran), mort en 1213 en Iran.
- En algèbre :
  - Continuateur d'Al-Khayyam, dont il reprend les solutions géométriques des équations cubiques.
  - Repère le rôle du discriminant de l'équation du 3^e degré comme condition d'existence de racines positives, mais ne l'utilise pas dans une démarche résolutive.
  - Développe une méthode de résolution numérique approchée des équations cubiques
- Tente de prouver le 5^e postulat d'Euclide (comme al-Haytham et al-Khwarizmi avant lui).



Quadrilatère de Lambert-al-Haytham

Quadrilatère de Sacchieri-al-Kwarizmi



La diffusion des mathématiques arabes en Occident chrétien

- Des précurseurs (Gerbert d'Aurillac, futur pape Sylvestre II).
- Les traducteurs des XI^{e} et XII^{e} siècles :
  - Contacts en Espagne (notamment à Tolède), en Italie méridionale, en Sicile au Moyen-Orient, etc.
  - Gérard de Crémone (Tolède), Abélard de Bath, etc.
  - Importance de l'astronomie.
- Aux XII^{e} et XIII^{e} siècles : reprise des résultats des mathématiciens arabes
  - Léonard de Pise (dit Fibonacci) et Jean de Sacrobosco
  - Jordanus de Nemore (enseignant à l'Université de Paris entre 1215 et 1245 env.) :
    - dans le *De numeris datis*, reprend sans la citer la classification des problèmes algébriques d'Al-Khwarizmi.
    - dans le *Demonstratio de algorismus* : après des définitions de type Euclidien, il prétend « suivre les pas des anciens » en montrant qu'elle permet de redémontrer certains résultats obtenus par les Arabes, sans les citer.
- A partir du XIII^{e} siècle : une nouvelle mathématique « européenne » (Bradwardine, Ockham, Oresme), retour aux Anciens.

La réception des mathématiques arabes en Occident chrétien

- Une réception différenciée qui néglige parfois les maths le plus sophistiquées :
  - Al-Kwarizmi : traduit en latin et diffusé.
  - Abu Kamil : traduit, mais peu présent dans la littérature latine.
  - Al Karagi : non traduit / repris par Fibonacci, mais rencontre peu d'écho.
  - Al Samaw'al, Al-Kayyam, Al-Tusi : tout à fait inconnus.
- Création d'un mythe : « rien de fondamentalement différent » chez les Arabes par rapport aux Anciens :

  « L'université médiévale produisit de fait une variété proprement européenne de mathématiques, mais en rupture avec ce qui était associé à une culture non chrétienne, c'est-à-dire la science gréco-arabe, perçue comme une unité. Les premiers humanistes ont certes revalorisé la culture grecque contre la tradition médiévale, mais sans s'intéresser particulièrement aux mathématiques pour elles-mêmes. Les générations suivantes chercheront à séparer les composantes des mathématiques avancées issues du monde méditerranéen, pour établir un lien privilégié avec les mathématiciens hellénistiques et eux-seuls » (*L'Europe mathématique*, 1996, p. 102)

L'« algorisme »

- « Algorisme » : calcul à l'aide des chiffres arabes.
- Jean de Sacrobosco (env. 1195 – env. 1256), selon Pierre de Dacie (dans sa préface à son commentaire du *De Algorismo* de Sacrobosco) :
  - le but de l'algorisme est « une meilleure connaissance de toutes choses »
  - mais surtout utile en astronomie : « cet art est un instrument pour étudier les magnitudes des mouvements célestes ».
- Léonard de Pise, dit Fibonacci (env. 1170 – env. 1240), *Liber abaci* (1202) :

> « Je présente une instruction complète à propos des nombres, proche de la méthode des Indiens […]. Et parce que les sciences arithmétique et géométrique sont liées et se soutiennent l'un l'autre, la connaissance complète des nombres ne peut être présentée sans rencontrer un peu de géométrie, ou sans voir que les opérations sur les nombres se rapprochent de celles faites en géométrie ; la méthode est remplie de preuves et de démonstrations faites à l'aide de figures géométriques. »

Table des matières du *Liber Abaci* (1202)

1. Sur la reconnaissance des neuf chiffres indiens et comment tous les nombres peuvent s'écrire avec leur aide
2. Sur la multiplication des entiers
3. Sur leur addition
4. Sur la soustraction de nombres inférieurs de nombres supérieurs
5. Sur la multiplication d'entiers et de fractions, et aussi de fractions seules
6. Sur l'addition, la soustraction, et division des entiers par des fractions et la réduction des fractions
7. Sur l'achat et la vente de choses commerciales
8. Sur le troc et l'achat de monnaies
9. Sur les compagnies
10. Sur la monnaie

etc.

« Nommé scribe public et établi à la douane de Bougie... mon père me fit venir encore enfant auprès de lui et pendant quelques jours me fit demeurer là à apprendre l'abaque. Lorsque par un enseignement admirable je fus introduit dans l'art (du calcul) par les neufs chiffres indiens... avec ces neufs chiffres et avec le 0 qui s'appelle Zephirum en arabe, on peut écrire tous les nombres qu'on veut. » (*Liber abaci*)

« Algorisme »
versus
« abacisme »

Gravure sur bois ornant la *Margarita Philosophica* de Gregorius Reisch (éd. Freiburg 1503)

« Algorisme » *versus* « abacisme »

Publiés la même année (1514), les deux traités de Köbel (à gauche) et de Böschenteyn (à droite) exposent respectivement le calcul avec des jetons sur l'abaque et calcul à la plume avec des chiffres sur papier.

III. Les Universités de Paris et d'Oxford, la scholastique et la question de l'infini

- Naissance « officielle » des universités de Bologne, Oxford et Paris aux XII^{e} – XIII^{e} siècles.
- La scholastique : méthode d'enseignement et d'exposition / la *lectio* (la lecture) et la *disputatio* (la dispute).
- L'héritage aristotélicien sur la question de l'infini :
  - Aristote nie l'« infini actuel », c'est-à-dire l'infini envisagé dans le domaine de la grandeur (ceci en raison de la finitude du monde),
  - mais considère l'« infini potentiel », à savoir le continu comme infini par sa puissance d'être sans fin divisé.
- A partir du XIII^{e} siècle, la redécouverte de textes d'Aristote (*Du ciel, La Physique*) et la naissance de controverses de nature théologique conduit à la nécessité d'une clarification des concepts de fini et d'infini :

  → débat et réflexions autour des question de l'infini en acte et en puissance (querelle sur l'infinité du monde, sur la structure du continu, sur existence des indivisibles...).

Querelle sur l'éternité du monde

- Saint-Thomas d'Aquin (env. 1225 – 1274), *De l'éternité du monde* (1270) :
  - Les conclusions de la raison sont-elles compatibles avec la foi ?
  - La question : l'éternité du Monde est-elle possible ?
  - Rien dans la définition du monde ne suppose sa finitude (le fait que le monde ait un commencement n'est qu'une vérité de foi qui ne peut être démontrée).

Le continu est-il ou non composé d'indivisibles ?

Le continu contient-il une infinité d'indivisibles ?

- Jean Duns Scot (env. 1265 – env. 1308) : les indivisibles nient l'incommensurabilité de $\sqrt{2}$ (si les lignes étaient composées d'indivisibles, le côté et la diagonale du carré devraient être commensurables).

- Gauthier Chatton (1290 – 1343), atomiste : il est impossible de diviser en deux parties égales un segment constitué d'un nombre impair d'indivisibles (négation des principes de la géométrie euclidienne)

- Guillaume d'Ockham (env. 1285 – 1347) : ni le point ni l'instant n'existent !

Une nouvelle mathématique « européenne »

- Thomas Bradwardine (1300 env. – 1349) / mathématicien, théologien, auteur d'ouvrages de logique / enseignant à l'Université d'Oxford (collège Merton) :

  - vante, dans le *De continuo* (1330 env.), le pouvoir des mathématiques pour l'étude des disciplines physiques :

    « les mathématiques [...] ont plus de discernement que ses disciplines sœurs, elles lancent leur trait plus directement et elles s'abritent sous la protection d'un bouclier plus sûr [...]. Les mathématiques sont le révélateur de toute vérité pure, elles connaissent tout secret caché et elles offrent la clé pour toutes les subtilités des écrits. C'est pourquoi quiconque envisagerait de faire de la physique sans les mathématiques ne passera jamais la porte de la sagesse ».

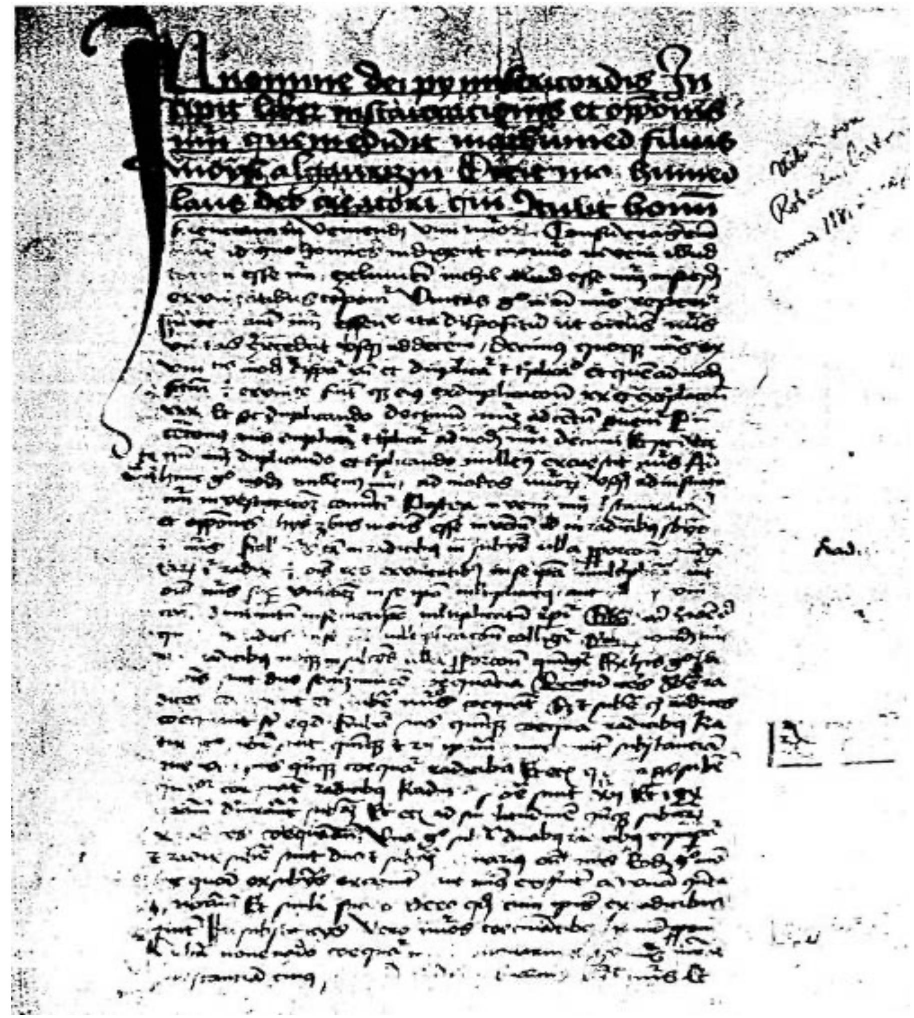
  - dans le *De proportionibus velocitatum in motibus* (1328), il développe une théorie des rapports, basée sur la théorie euclidienne des proportions, pour comprendre les relations entre forces, résistances et vitesses (« mathématiques du mouvement »).

Une nouvelle mathématique « européenne »

- Nicole Oresme (env. 1323 – 1382) / mathématicien et théologien / enseignant à l'Université de Paris :
  - développe, dans le *De proportionibus proportionum*, la théorie des rapports de Bradwardine pour réfuter la possibilité des prédictions astrologiques.
  - propose, dans le *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, une méthode de représentation des effets d'un mouvement par des figures géométriques.
  - également auteur des *Quaestiones super geometriam Euclidis* (*Questions sur la géométrie d'Euclide*)...
- Richard Swineshead / contemporain d'Oresme / Université d'Oxford :
  - le *Liber calculationum* (*Livre sur les calculs*), dans lequel il reprend à son tour les idées de Bradwardine (« mathématiques du mouvement »).
  - l'un des plus célèbres « calculateurs » du collège Merton d'Oxford.

IV. Retour sur le développement de l’algèbre

- Les dénominations de l’inconnue introduites par Al-Khwarizmi – say (*chose*) ou gizr (*racine*) – deviennent *res* et *radix* au Moyen-Age dans les traductions latines de son *Kitāb al-jabr wa-al-muqābala* (celles de Robert de Chester, ou de Gérard de Crémone, au XIIe siècle)
- On retrouve ces dénominations dans le *Liber Abaci* (1202) de Léonard de Pise (alias Fibonacci).
- A la Renaissance :
  - la *cosa* des algébristes italiens
  - la *Coss* des algébristes allemands



Traduction latine de l’Algèbre d’Al-Khwariizmi par Robert de Chester (environ 1141)
[Source : http://www.math.ens.fr/culturemath/video/html/Djebbar/icono.htm#2]

Luca Pacioli (1494) : les débuts de l'algèbre italienne

Luca Pacioli avec son élève Guidobaldo I^{er} *de Montefeltro* (1495), musée Capodimonte de Naples

- En 1494, Luca Pacioli publie l'un des premiers livres imprimés contenant de l'algèbre (*Summa de arithmetica, geometria, proporzioni di proporzionalita.*
- L'ouvrage comporte deux volumes : le premier embrasse l'arithmétique théorique et pratique ainsi que l'algèbre, le second la géométrie.
- Une partie des acquis algébriques des arabes y est reprise et assimilée : Luca Pacioli précise que la *pratica speculativa*, vulgairement appelée « règle de la chose » (*regola della cosa*) ou « grand art » (*arte maggiore*) s'appelle aussi *algebra* ou *almucabala*.

La querelle des équations cubiques

[Sources : œuvres et lettres des protagonistes]

- Autour de 1520, Scipione del Ferro (1456-1526), professeur de maths à Bologne, trouve une méthode de résolution pour certains cas de l'équation $x^3+px=q$, et la transmet à son disciple Antonio Maria del Fior.
- En 1535, Fior défit Nicollo Fontana de Brescia, dit Tartaglia (1499-1557), qui trouve une solution.
- Mars 1539, Girolamo Cardano, dit Cardan (1501-1576), invite Tartaglia à Milan et obtient ses solutions (en vers) en lui promettant de ne pas les publier (d'après Tartaglia).
- 1543 : Cardan apprend que del Ferro possédait certaines solutions.
- 1545 : Cardan publie les solutions de Tartaglia dans son *Ars Magna* et bien d'autres (autres cas de l'équation du 3^e degré et preuves, solutions des équations du 4^e degré découvertes par son élève Ludovico Ferrari).
- 1546-1550 : représailles de Tartaglia, violents échanges et défis avec Ludovico Ferrari.

L'*Ars magna* de Cardan (1545)

- Dans le chapitre XI :
  - Equation cubique du type « cube + nombres de choses = nombre » ($x^3+px=q$).
  - Rappelle l'historique de la solution (del Ferro, Fior, Tartaglia, lui-même a trouvé la preuve avec beaucoup de difficulté).
  - Preuve (géométrique) de la solution.
  - Enoncé de la règle
  - Exemples.

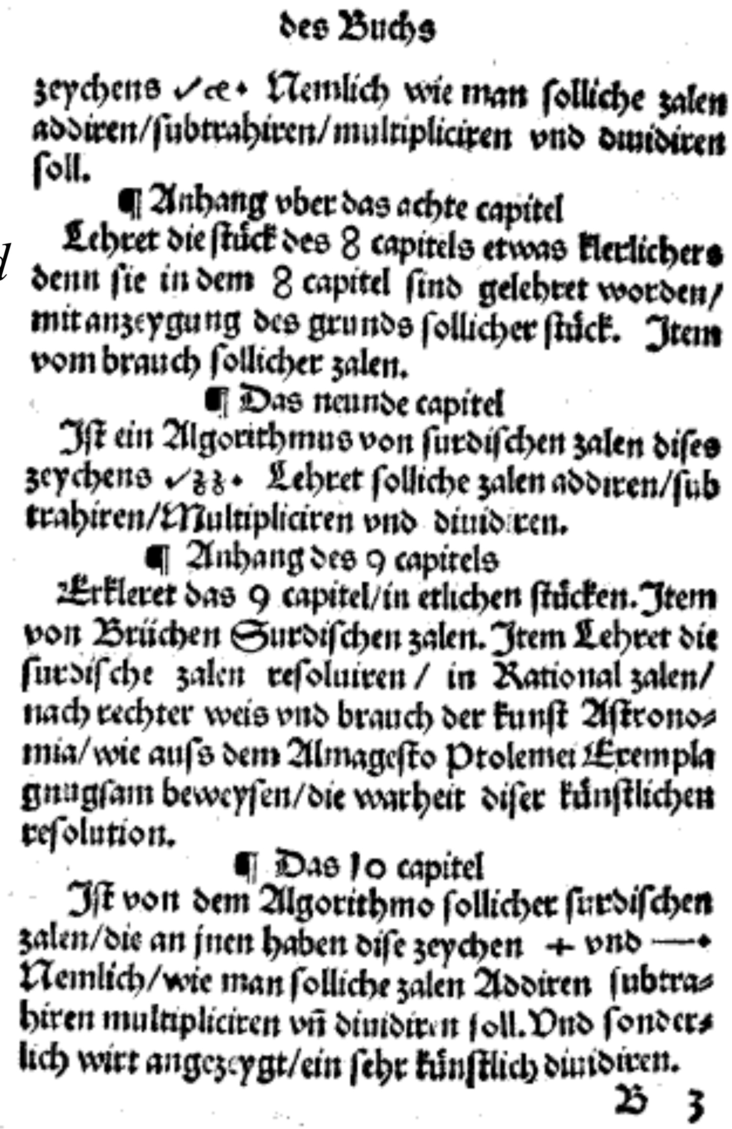
- Il reconnaît la possibilité de multiplicité des racines et mentionne aussi parfois des solutions négatives en fin de résolution (« nombres fictifs » ou « racines moins pures »).
- Il ne donne pas de formule générale unique et ne traite pas le cas irréductible.
- Il mentionne des solutions imaginaires dans un problème.

L'*Algebra* de Bombelli (1572)

- Bombelli consulte à Rome le manuscrit des *Arithmétiques* de Diophante et en intègre une partie dans son *Algebra* (1572).
- Il est le premier à intégrer des nombres « complexes » dans sa méthode de résolution et à les manipuler formellement, et, du coup, le premier à résoudre l'équation cubique dans le cas irréductible (et donc dans tous les cas).
- Il considère les racines des équations comme des sommes algébriques de nombres positifs affectés d'un des quatre signes suivants : *piu* (« + »), *meno* (« $-$ »), *piu di meno* (« $+i$ »), *meno di meno* (« $-i$ »)…
- Donne les règles de multiplication de ces quatre signes.
- Défend l'algèbre comme discipline théorique.

L'algèbre cossique allemande

- En 1525, Christoff Rudolff publie le premier manuel d'algèbre en langue allemande (*Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen Regeln Algebre so gemeinicklich die Coss genennt*)
  - inspiré de la *Coss* d'Adam Ries (1524), restée inédite
  - utilisation courante des signes « + » et « – »
  - notation pour l'inconnue
  - introduction de signes pour la notation des racines (ex. : √ pour la racine quarrée)
- Les Allemands se rallient presque tous à la notation de Rudolff, notamment :
  - Michael Stifel, dans son *Arithmetica integra* (1544),
  - Christopher Clavius, dans son *Algebra* (1608)



des Buchs

zeychens √ce. Nemlich wie man solliche zalen addiren/subtrahiren/multipliciren vnd diuidiren soll.

¶ Anhang vber das achte capitel

Lehret die stück des 8 capitels etwas kerlichers denn sie in dem 8 capitel sind gelehret worden/ mit anzeygung des grunds sollicher stück. Item vom brauch sollicher zalen.

¶ Das neunde capitel

Ist ein Algorithmus von surdischen zalen dises zeychens √ʒʒ. Lehret solliche zalen addiren/subtrahiren/Multipliciren vnd diuidiren.

¶ Anhang des 9 capitels

Erkleret das 9 capitel/in etlichen stücken. Item von Brüchen Surdischen zalen. Item Lehret die surdische zalen resoluiren / in Rational zalen/ nach rechter weis vnd brauch der kunst Astronomia/ wie auss dem Almagesto Ptolemei Exempla gnugsam beweysen/die warheit diser künstlichen resolution.

¶ Das 10 capitel

Ist von dem Algorithmo sollicher surdischen zalen/die an jnen haben dise zeychen + vnd —. Nemlich/wie man solliche zalen Addiren subtrahiren multipliciren vñ diuidiren soll. Vnd sonderlich wirt angezeygt/ein sehr künstlich diuidiren.

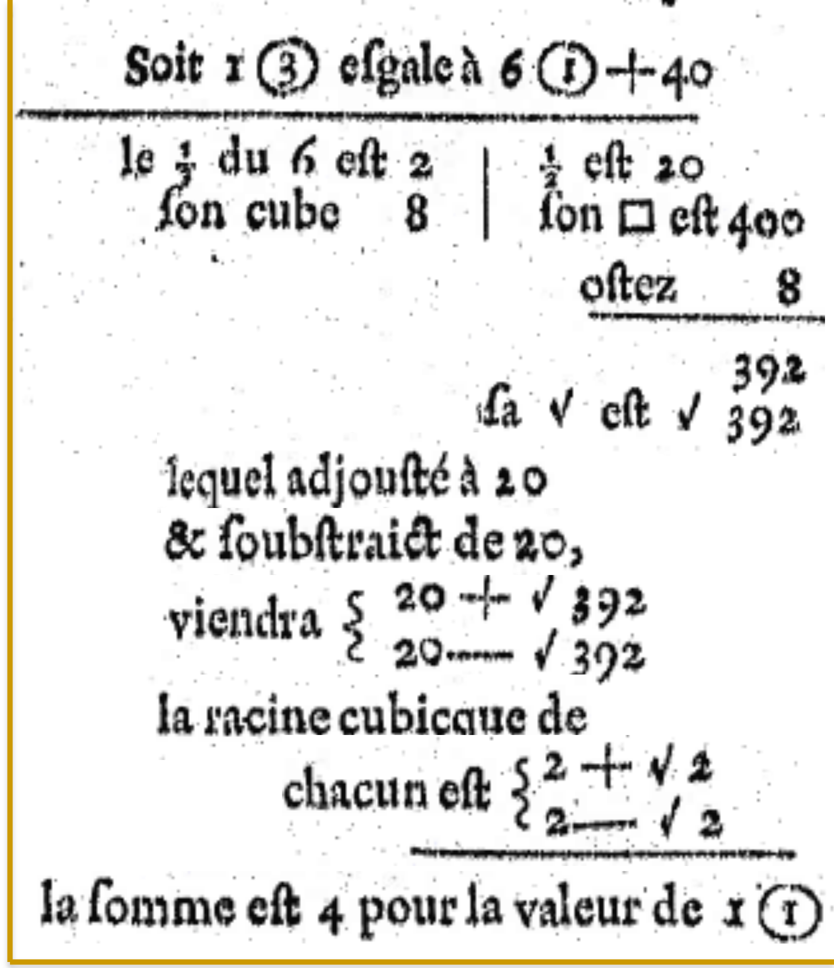
B 3

Die Coss Christoffs Rudolffs [...] durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt,1553.

L’inconnue dans tous ses états

- Les Italiens abrégent *cosa* en *co*, par exemple
  - Luca Pacioli, *Summa der Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalita* (1494).
  - Tartaglia et Cardan (utilisent aussi le mot latin *positiones* et son abréviation *pos*).

- Une autre voie (on ne désigne pas l’inconnue, mais on marque sa présence par l’indication de sa puissance à côté de son coefficient) est explorée par certains mathématiciens :
  - Nicolas Chuquet, dans *Le triparty en la science des nombres* (1484)
  - Bombelli, dans l’*Algebra* (1572)
  - Stevin, dans l’*Arithmétique* (1585), puis Girard dans l’*Invention nouvelle en algèbre* (1629).



Soit 1 ③ esgale à 6 ① + 40

le ⅓ du 6 est 2, son cube 8 | ½ est 20, son □ est 400

ostez 8

392

sa √ est √ 392

lequel adjousté à 20 & soubstraict de 20,

viendra { 20 + √ 392 ; 20 — √ 392

la racine cubicque de chacun est { 2 + √ 2 ; 2 — √ 2

la somme est 4 pour la valeur de 1 ①

Pour Chuquet : $1^1, 1^2, 1^3, 1^4, \ldots$

Pour Bombelli : $1\overset{1}{\smile}, 1\overset{2}{\smile}, 1\overset{3}{\smile}, 1\overset{4}{\smile} \ldots$

Pour Stevin : 1 ①, 1 ②, 1 ③, 1 ④, …

L'art analytique de François Viète (1540-1603)

- Plusieurs œuvres sur l'algèbre, dont :
  - *In artem analyticem Isagoge* (*Introduction à l'art analytique*), 1591
  - *Zeteticorum libri quinque* (*Cinq livres des Zététiques*), 1593
  - *Ad logisticem speciosam Notae priores* (*Premières notes sur la logistique spécieuse*), postérieur à 1631

L'INTRODVCTION

EN L'ART ANALYTIQVE.

OV

ALGEBRE NOVVELLE.

CHAPITRE PREMIER.

De la definition, & diuiſion de l'Analyſe, & des choſes qui ſeruent à la Zeteticque.

IL ſe rencontre dans les Mathematiques vne certaine maniere & façon de rechercher la verité, laquelle on dit auoir eſté premierement inuentée par Platon, que Theon a appellée Analyſe, & par luy definie la ſuppoſition de ce que l'on cherche, comme s'il eſtoit concedé pour paruenir à vne verité cherchée, & ce par le moyen des conſequences; comme au contraire la Syntheſe eſt la ſuppoſition d'vne choſe concedée pour paruenir à la cognoiſſance de ce que l'on cherche par le moyen des conſequences. Et combien que les an-

L'art analytique de François Viète (1540-1603)

- Une méthode pour résoudre tous les problèmes grâce à une invention nouvelle :

  La logistique spécieuse : *un calcul avec des symboles, un calcul littéral*

→ **Une nouvelle algèbre**

« Tous les mathématiciens savaient que sous leur Algèbre ou Almulcabale qu'ils vantaient, et qu'ils nommaient le Grand Art, étaient cachées des masses d'or incomparables, mais ils ne les trouvaient pas. Aussi vouaient-ils des hécatombes, faisaient-ils des sacrifices à Apollon et aux Muses lorsqu'ils parvenaient à la solution d'un seul de ces problèmes que je résous spontanément par dizaines, par vingtaines ; ce qui prouve que notre art est la méthode d'invention la plus certaine en mathématiques. »

« La science de bien trouver dans les mathématiques »

« L'Art analytique s'attribue justement le magnifique problème des problèmes qui est : résoudre tout problème »

« Mais la forme sous laquelle on doit aborder la recherche exige les ressources d'un art spécial, qui exerce sa logique non sur des nombres, suivant l'erreur des analystes anciens, mais au moyen d'une logistique nouvelle… »

« Logistique spécieuse est celle qui est exposée par des signes ou des figures, par exemple, par des lettres de l'alphabet »

L'algèbre littérale de François Viète (1540-1603)

- Première utilisation des lettres pour désigner les inconnues et les coefficients.
- Respect de la loi des homogènes.
- La désignation entière ou abrégée de la puissance est accolée à l'inconnue en utilisant, au-delà du cube, la terminologie combinée de Diophante et des cossistes allemands.
- En 1631, Harriot remplace les lettres majuscules de Viète par des minuscules…

« Afin que la mise en équation soit aidée par quelque artifice, on distinguera les grandeurs données des grandeurs inconnues et cherchées en les représentant par un symbole constant, invariable et bien clair, par exemple, en désignant les grandeurs cherchées par la lettre A ou par toute autre voyelle E, I, O, U, Y, et les grandeurs données par les lettres B, C, D ou par toute autre consonne. » (*In artem analyticem Isagoge*, 1591)

THEOREMA IV.

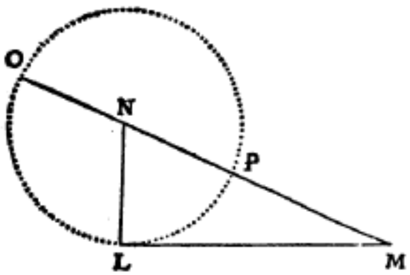
Si A quadrato-cubus —B—D—G—H—K in A quad. quad. + B in D + B in G + B in H + B in K + D in G + D in H + D in K + G in H + G in K + H in K in A cubum —B in D in G—B in D in H—B in D in K — B in G in H—B in G in K —B in H in K—D in G in H — D in G in K — D in H in K — G in H in K in A quad. + B in D in G in H + B in D in G in K + B in D in H in K + B in G in H in K + D in G in H in K in A, æquetur B in D in G in H in K: A explicabilis eſt de qualibet illarum quinque B, D, G, H, K.

1QC—15QQ+85C—225Q+274N, *æquatur* 120. *Fit* 1N 1, 2, 3, 4, *vel* 5.

Atque hæc elegans & perpulchræ ſpeculationis ſylloge, tractatui alioquin effuſo, finem aliquem & Coronida tandem imponito.

La géométrie analytique de René Descartes (1540-1603)

- La *Géométrie* (1637), annexe au *Discours de la méthode* :
  - La « méthode » : choisir des lignes (= segments) à partir desquels exprimer le problème sous forme d'équations. La solution peut être des points en nombre fini ou un « lieu » géométrique.
  - Nouveau traitement des équations : notations (lettres minuscules, les dernières de l'alphabet pour les inconnues, les premières pour les coefficients, adoption d'un signe d'égalité) / relations entre coefficients et racines, nombre de racines d'une équation de degré *n*.
  - Redéfinition d'un corpus de courbes à étudier : celles associées à une équation (*courbes algébriques*, en termes modernes)



$$z^2 \infty az + bb$$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle, iuſques a O, en ſorte qu'N O ſoit eſgale a N L, la toute O M eſt z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete ſorte

$$z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$