Master de Mathématiques – Sorbonne Université (M1)

UE 4M039 : Histoire des mathématiques

(Alexandre Guilbaud et Laurent Mazliak)

Semaine 7

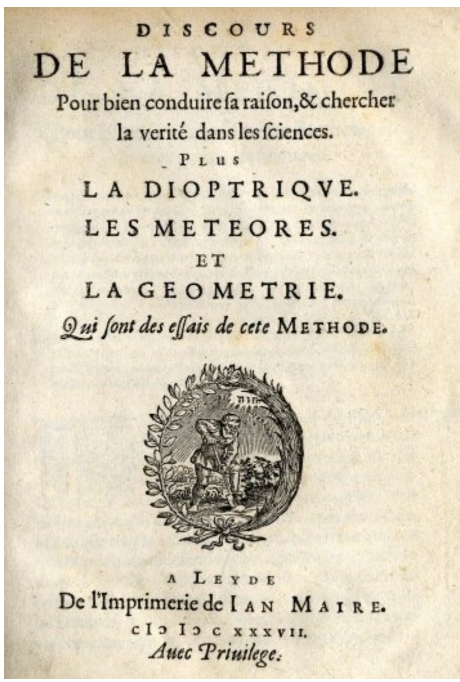
Analyse et mathématiques mixtes au XVIII^{e} siècle

I. La mécanique et le système du monde de René Descartes

- Le *Discours de la méthode, pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (1637) suivie de trois essais d'application de sa méthode :

  - la *Géométrie* (« géométrie algébrique » / l'algèbre précède les autres branches des mathématiques)
  - la *Dioptrique* (lois de réflexion et de réfraction de la lumière)
  - les Météores (étude de phénomènes naturels, dont l'arc-en-ciel)

René Descartes (1596-1650)



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Auec Priuilege.

- La mécanique cartésienne est exposée dans son traité *Du Monde*, (rédigé entre 1628 et 1633, mais publié en 1664) et dans ses *Principes de la Philosophie* (1644) :

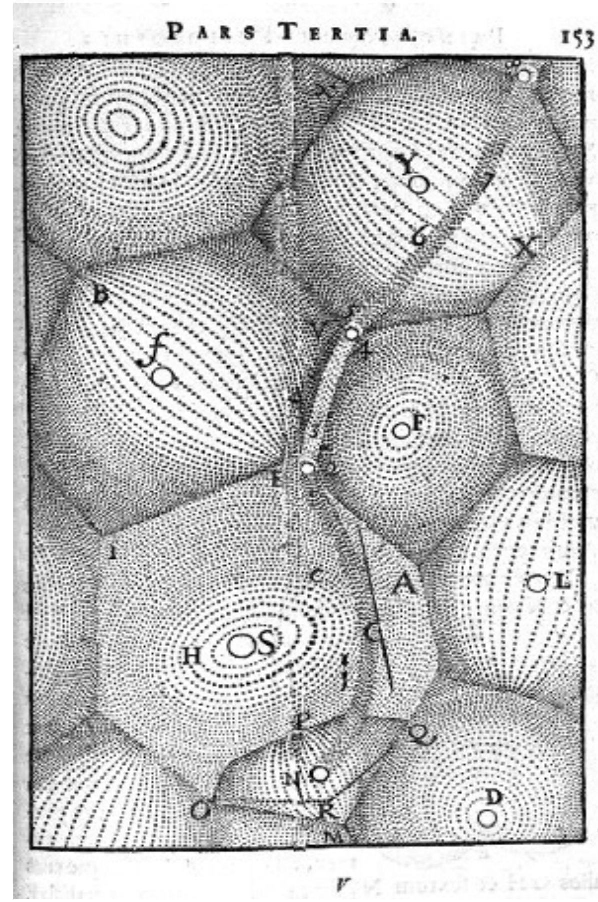
  - la matière est caractérisée par le concept d'étendue (en longueur, largeur et profondeur)
  - l'Univers est infini, sans vide (rempli d'une matière « subtile ») et en constant mouvement.

I. La mécanique et le système du monde de René Descartes

- La mécanique de Descartes s'appuie sur deux lois essentielles :

  - la loi de l'inertie

  - la loi de conservation de la quantité de mouvement (« Que Dieu est la première cause du mouvement, & qu'il en conserve toujours une égale quantité en l'univers »). Exemple : lois du choc des corps.



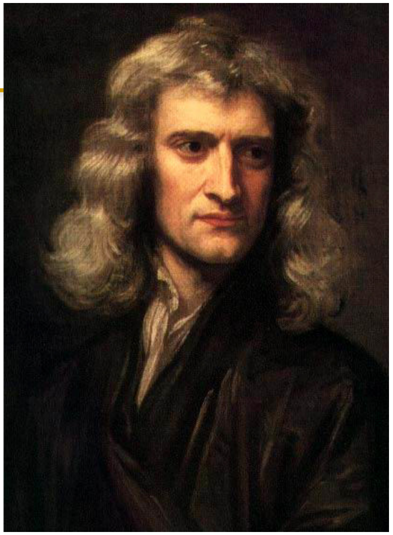
- La théorie des tourbillons :

  - l'Univers est composé d'un ensemble de tourbillons imbriqués au centre desquels se trouvent les astres (Soleil et planètes)

  - la matière solaire est au centre d'un tourbillon principal qui emporte les planètes, lesquelles forment des tourbillons emportant les satellites, etc.

- La mécanique et la cosmologie cartésiennes auront une influence importante, notamment en France, pendant un bon siècle, avant d'être supplantés par la mécanique newtonienne…

I. La mécanique et le système du monde d'Isaac Newton



Isaac Newton (1643-1729)

- L'essentiel de la mécanique et du système du monde newtoniens est exposé dans les *Philosophiae naturalis principia mathematica* [*Principes mathématiques de la philosophie naturelle*], publiés en 1687 (2^e^ édition, 1713 ; 3^e^ édition, 1726).

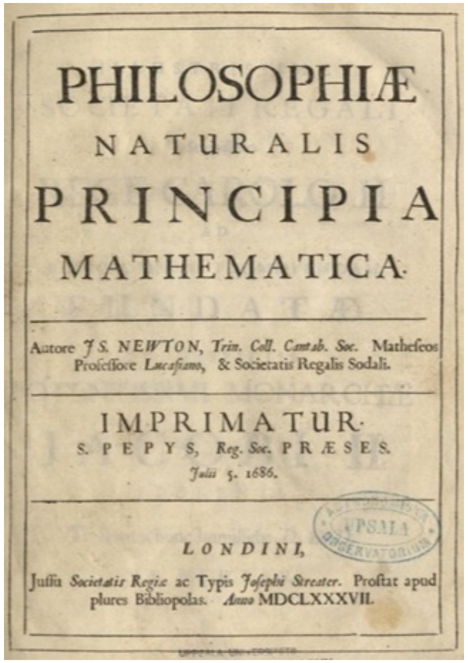
- L'ouvrage marque une rupture avec la mécanique cartésienne :

  - Newton traduit non seulement ses principes grâce au langage mathématique mais intègre également la comparaison systématique avec l'expérience à sa méthode scientifique.

  - la matière dans la physique de Newton ne repose plus sur la seule étendue, mais aussi sur la notion d'impénétrabilité.

- Il est divisé en trois livres, précédés de deux rubriques préliminaires :

  - les « Définitions » : définitions de la masse d'un corps, de la quantité de mouvement, de la force d'inertie (vis insita), de la *vis impressa* (action qui s'exerce sur un corps pour en changer l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme), de la *force centripète*, et des notions de temps et d'espace absolus.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

- les « Axiomes ou lois du mouvement »

- Le livre I traite, d'un point de vue strictement mathématique, les questions relevant du mouvement des corps dans les milieux non résistants (théorie des forces centrales, problème des deux corps, formulation du problème des trois corps). Il débute par l'exposé de la méthode des « premières et dernières raisons ».

- Le livre II est intégralement consacré au mouvement des corps dans des milieux résistants. Newton y réfute la théorie des tourbillons de Descartes, en montrant qu'elle engendre un système planétaire incompatible avec les trois lois de Kepler.

- Le livre III : exposé de son système du monde.

  - ✓ Débute par quatre « règles qu'il faut suivre dans l'étude de la physique » :

    - la simplicité, l'uniformité (les lois naturelles sont universelles), l'homogénéité de la nature (la nature se comporte de façon invariable, uniforme et prévisible),

    - et la nécessité d'un contrôle des théories par l'expérience (les théories doivent être tenus pour vraies tant que l'accord avec l'expérience subsiste).

I. La mécanique et le système du monde d'Isaac Newton

✓ Exposé de la gravitation universelle :

- deux corps dans l'Univers sont mutuellement attirés par une force proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

- il s'agit d'une loi unique renfermant aussi bien la loi de pesanteur auxquels sont soumis les corps terrestres que la loi de gravitation s'appliquant aux corps célestes (planètes, étoiles, comètes).

✓ Ces lois et principes lui permettent d'appliquer le calcul à de nombreux problèmes :

- **le problème de la figure de la Terre**
- le phénomène des marées océaniques
- le phénomène de précession des équinoxes
- la détermination de la densité moyenne de la Terre
- les trajectoires des comètes.

Voltaire, *Lettres philosophiques*, 1734, « Quatorzième lettre sur Descartes et Newton »

UN François qui arrive à Londres, trouve les choſes bien changées en Philoſophie comme dans tout le reſte. Il a laiſſé le monde plein, il le trouve vuide. A Paris on voit l'Univers compoſé de Tourbillons, de Matiere ſubtile; à Londres on ne voit rien de cela. Chez vous c'eſt la preſſion de la Lune qui cauſe le flux de la mer; chez les Anglois c'eſt la mer qui gravite vers la Lune; de façon que quand vous croyez que la Lune devroit nous donner marée haute, ce Meſſieurs croyent qu'on doit avoir marée baſſe, ce qui malheureuſement ne peut ſe vérifier. Car il auroit fallu pour

[…]

Vous remarquerés encore que le Soleil, qui en France n'entre pour rien dans cette affaire, y contribue icy environ pour ſon quart. Chez vos Carteſiens, tout ſe fait par une impulſion, qu'on ne comprend gueres; chez M. Newton c'eſt par une attraction dont on ne connoiſt pas mieux la cauſe. A Paris vous vous figurés la Terre faite comme un Melon; à Londres elle eſt applatie des deux cotés. La Lumiere

[…]

I. Le problème de la figure de la Terre : les théories de Newton et Huygens

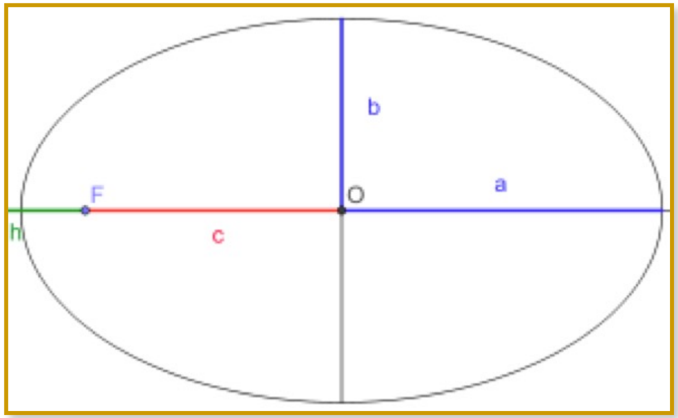
- En 1675, puis en 1686-1687, Robin Hooke (1635-1703) lance une controverse sur la figure d'équilibre du globe terrestre en supposant que les mers n'ont pas une figure parfaitement sphérique mais ellipsoïdale.

- À l'instar de Hooke, Newton, dans ses *Principia*, considère que la figure de la Terre est à la fois le résultat de l'attraction mutuelle de ses parties et du mouvement de rotation autour de son axe :

> Si les planettes n'avoient point le mouvement journalier de rotation autour de leur axe, elles devroient être ſphériques à cauſe de l'égale gravité de leurs parties. Le mouvement de rotation fait que les parties qui s'éloignent de l'axe font effort pour monter vers l'équateur. Et par conſéquent, ſi la matiére dont elles ſont compoſées étoit fluide, ſon élévation vers l'équateur augmenteroit le diamétre de ce cercle, & ſon abbaiſſement vers les Pôles diminueroit l'axe. Auſſi les obſervations aſtronomiques nous apprennent-elles que dans Jupiter le diamétre qui va d'un pôle à l'autre eſt plus court que celui qui va de l'Orient à l'Occident. Par le même raiſonnement, on verra que ſi notre terre n'étoit pas un peu plus haute à l'équateur qu'aux pôles, les mers s'affaiſſant vers les pôles, & s'élevant vers l'équateur inonderoient toutes ces régions.

[Newton, *Principia*, trad. Marquise du Châtelet, 1749, Livre III, prop. 18, p. 34]

I. Le problème de la figure de la Terre : les théories de Newton et Huygens



- I. Newton suppose la planète fluide et homogène et postule sans démonstration que sa figure est un ellipsoïde de révolution

- Grâce à l'application d'une condition d'équilibre hydrostatique, il conclut à un coefficient d'aplatissement de la Terre de **1/230**.

Coefficient d'aplatissement :

$$\alpha = \frac{a-b}{a}$$

$\alpha > 0$: terre aplatie
$\alpha < 0$: terre oblongue
$\alpha = 0$: terre sphérique

- Dans son *Discours sur la cause de la pesanteur* (1690), **Christiaan Huygens (1629-1695)**, **cartésien**, propose une autre théorie pour le calcul du coefficient d'aplatissement :

  - il suppose pareillement la planète fluide et homogène mais refuse l'idée d'attraction mutuelle à distance des particules.

  - il démontre que la figure de la Terre est un ellipsoïde de révolution (ce que Newton s'était contenté de supposer), et parvient à un coefficient d'aplatissement de **1/578**

I. Le problème de la figure de la Terre : des mesures contradictoires

- Les mesures pendulaires :

  - principe : les périodes des petites oscillations d'un pendule augmentent si l'on augmente la longueur *l* du fil et diminuent et si la pesanteur *g* augmente :

Equation d'un pendule simple : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

Pour de petites oscillations, l'équation devient : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$ et la période d'oscillation vérifie : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

- Les mesures géodésiques :

  - elles reposent sur la méthode de triangulation (due à Frisius, 1533), qui consiste à relier deux lieux d'un même méridien par une chaîne de triangles dont on détermine la longueur des côtés de proche en proche à partir de la longueur d'un coté de départ et la mesure des angles successifs.

  - sur une ellipse, la longueur d'un arc de méridien d'un degré est plus grande lorsqu'on se trouve plus proche du petit axe que du grand axe (la longueur est évidemment la même sur un cercle).

I. Le problème de la figure de la Terre : des mesures contradictoires

- Les résultats des mesures pendulaires :

- A Cayenne, près de l'équateur, l'académicien Richer constate que la longueur d'un pendule battant la seconde à Paris doit être raccourcie pour osciller suivant cette même période, d'où il déduit que la pesanteur est plus faible à Cayenne qu'à Paris.

- L'observation de Richer est confirmée par les mesures de Halley à Sainte-Hélène en 1677 et par celles de Varin et Deshayes au Cap Vert en 1682.

Mais…

contrairement à ces mesures pendulaires, les mesures géodésiques contredisent les prédictions théoriques de Newton et de Huygens !

- Les résultats des mesures géodésiques :

- En 1669-1670, Picard mesure par la méthode géodésique le degré de méridien reliant le sud de Paris à Amiens.

- A partir de 1683, les mesures de Picard sont poursuivies au Nord par Jean-Dominique Cassini et au Sud par La Hire.

- La chaîne est achevée entre 1700 et 1718 par Jacques Cassini, Maraldi et La Hire fils. Elle permet d'obtenir le degré de méridien reliant Dunkerque aux pieds de Pyrénées.

I. Le problème de la figure de la Terre : des mesures contradictoires

- En 1720, Jacques Cassini publie son ouvrage *Grandeur et figure de la Terre*. Il y rend compte des mesures effectuées (1 toise ~ 1,9 m) :

✧ degré du méridien calculé à partir des mesures effectuées entre Paris et Collioure : 57 097 toises

✧ degré du méridien calcul à partir des mesures effectuées entre Paris et Dunkerque : 56 960 toises

⇨ Selon ses mesures, la longueur du degré de méridien augmenterait donc en se rapprochant de l'équateur... d'où Jacques Cassini déduit que la Terre est allongée suivant son axe de rotation ! (Terre aplatie à l'équateur)

- Le résultat est confirmé par la mesure – effectuée en 1733-1734 par Jacques Cassini, son fils Cassini de Thury et Maraldi –, de l'arc de parallèle entre Saint-Malo et Strasbourg…

DE LA GRANDEUR
ET
DE LA FIGURE
DE
LA TERRE.

PREMIERE PARTIE,

Qui comprend les Obſervations faites pour déterminer la Ligne Meridienne de l'Obſervatoire Royal depuis Paris juſqu'aux Pyrenées.

L'ACADEMIE Royale des Sciences a toûjours regardé comme un objet digne de ſes occupations, tout ce qui peut contribuer à la perfection de la Geographie & de la Navigation.

Auſſi-tôt que les Tables des Satellites de Jupiter furent achevées, & qu'on put prevoir avec exactitude leurs Eclipſes, qui ſervent ſi utilement à trouver les Longitudes des lieux de la Terre : elle envoya ſous les ordres du Roi dans les quatre parties du Monde, des Obſervateurs pour déterminer la ſituation des

I. Le problème de la figure de la Terre : des mesures contradictoires

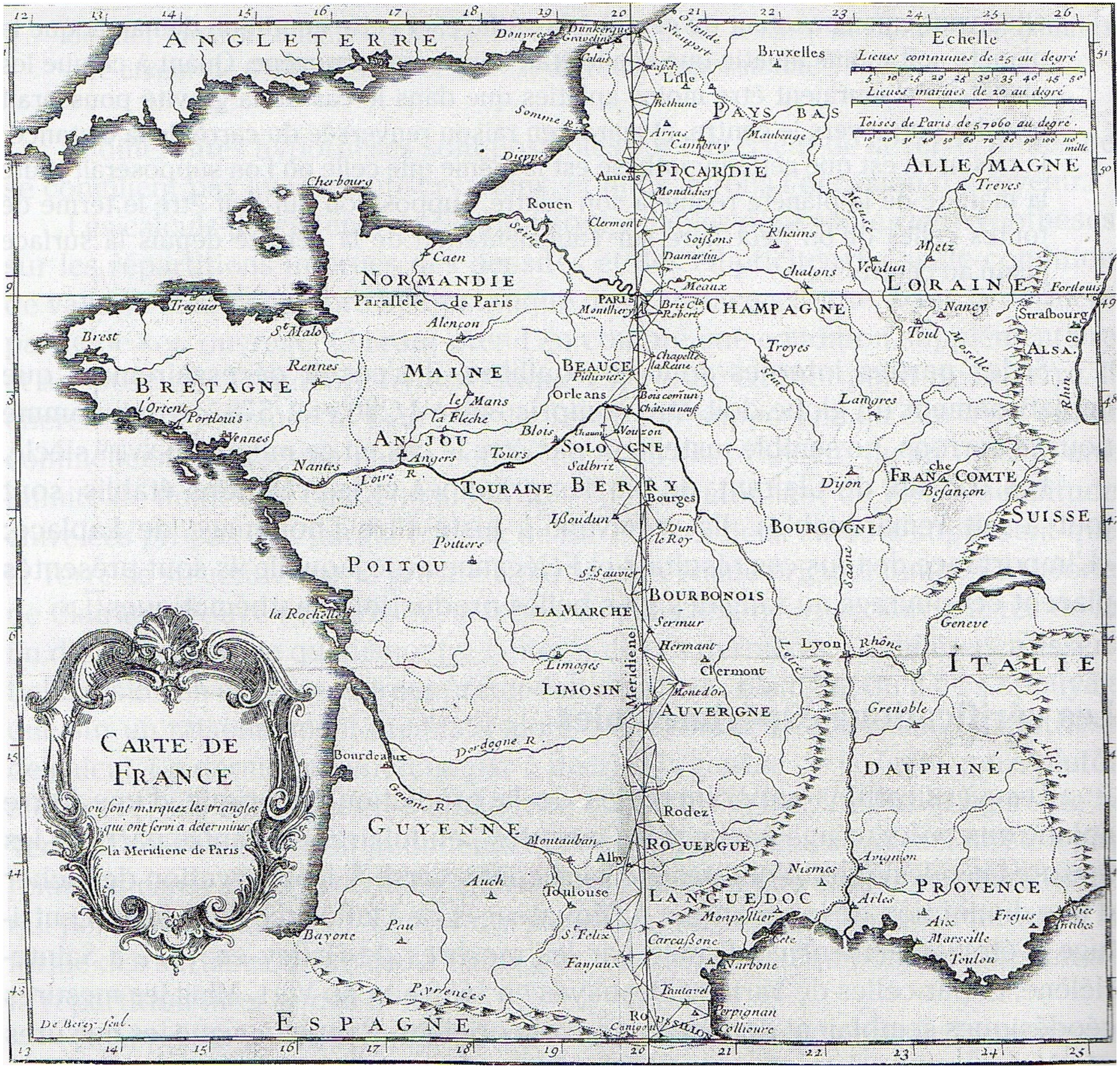


Schéma de la triangulation réalisée pour mesurer la méridienne de France entre 1683 et 1718.

Extrait de *Grandeur et figure de la Terre*, de Jacques Cassini (1720)

I. Un débat entre cartésiens et newtoniens

- Les mesures des « Cassini » donnent raison aux cartésiens, qui tentent de justifier l'aplatissement de la Terre à l'équateur par le biais de la théorie des tourbillons.

↔

Descartes n'a jamais évoqué la question de la figure de la Terre et Huygens a obtenu un aplatissement aux pôles par le biais d'une théorie fondée sur une hypothèse cartésienne

- Ce débat entre cartésiens et newtoniens à l'Académie des sciences de Paris est le reflet d'une opposition à plusieurs niveaux :

  - l'opposition de deux explications du monde (Descartes / Newton, vide / plein, tourbillons / attraction) et de deux traditions, l'une française, l'autre anglaise.

  - l'opposition entre des astronomes de terrain reconnus et puissants (les Cassinis) et des géomètres.

  - l'opposition entre les tenants d'arguments géométriques traditionnels et les adeptes de l'analyse différentielle.

- En 1735, l'Académie royale des sciences décide de trancher le débat en finançant deux expéditions, l'une en Laponie, l'autre au Pérou, afin de mesurer les degrés de méridiens au pôle et à l'équateur.

I. Les expéditions au Pérou et en Laponie

Maupertuis, gravure d'après R. de Tournières, 1737

L'expédition en Laponie (1735-1737)

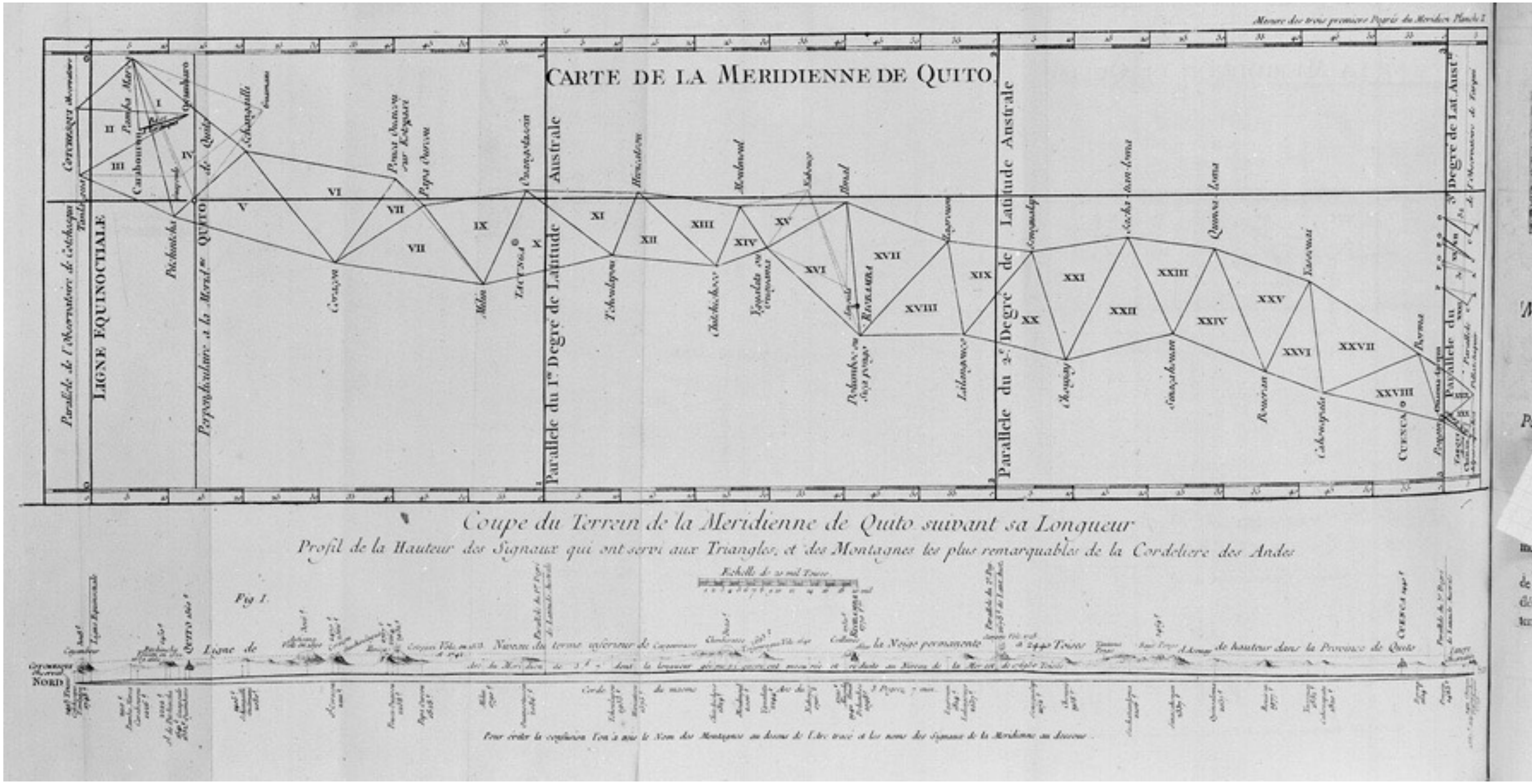
- Les participants : Maupertuis, Clairaut, Celsius.
- Au retour de l'expédition, le 13 novembre 1737, Maupertuis fait un compte-rendu devant l'Académie royale des Sciences :

> « enfin notre degré avec l'aberration diffère de 950 toises de ce qu'il devrait être suivant les mesures que M^{r} Cassini a établies dans son livre *Grandeur et figure de la Terre*… d'où l'on voit que la Terre est considérablement aplatie vers les pôles ».

L'expédition au Pérou (1736-1744)

- Les participants : Pierre Bouguer, La Condamine.
- Retour… en 1744 ! Bouguer et La Condamine confirment l'aplatissement au pôle, mais le résultat est déjà admis par l'Académie…
- … En 1740, suite au retour de l'expédition de Laponie, une nouvelle mesure géodésique (plus précise) de la méridienne de France avait été menée par Cassini de Thury et La Caille et avait conduit à une nouvelle confirmation de l'aplatissement aux pôles.

L'expédition au Pérou (1736-1744)



Les deux premières bases de la mesure du méridien en Amérique du Sud (La Condamine, *Mesures des trois premiers degrés du méridien de l'hémisphère australe*, 1751)

Crédit : Bibliothèque de l'Observatoire de Paris

I. La *Théorie de la figure de la Terre* de Clairaut (1743)

- En 1743, Clairaut publie sa *Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique*.
- Dans cet ouvrage, il propose une mise en équation du problème fondée sur la formulation analytique d'une condition d'équilibre hydrostatique.

Alexis Clairaut (1713-1765)

I. La *Théorie de la figure de la Terre* de Clairaut (1743)

THEORIE
DE LA
FIGURE
DE LA TERRE.

PREMIERE PARTIE.

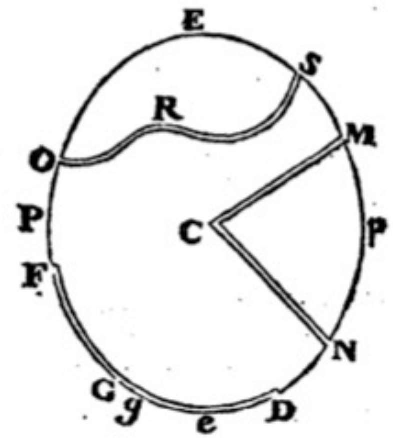
Principes généraux pour trouver les hypotheſes dans lesquelles les Fluides peuvent être en équilibre, & pour déterminer la figure de la Terre & des autres Planetes, lorſque la Loi de la peſanteur eſt donnée.

CHAPITRE I.

Expoſition d'un Principe général dont l'obſervation eſt néceſſaire pour l'équilibre des Fluides; avec les propoſitions préliminaires pour faire uſage de ce principe.

§. I.

UNE maſſe de Fluide ne ſçauroit être en équilibre, que les efforts de toutes les parties qui ſont compriſes dans un canal de figure quelconque qu'on imagine traverſer la maſſe entiere, ne ſe détruiſent mutuellement.



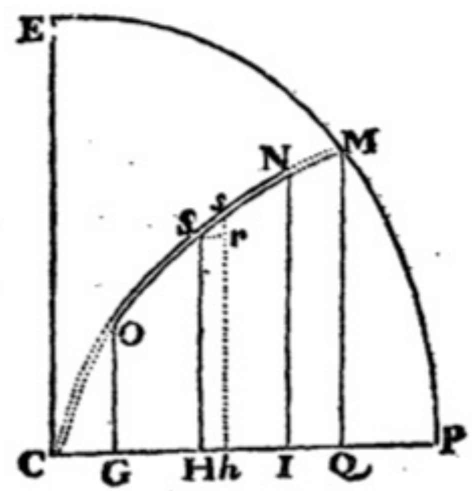
CHAPITRE IV.

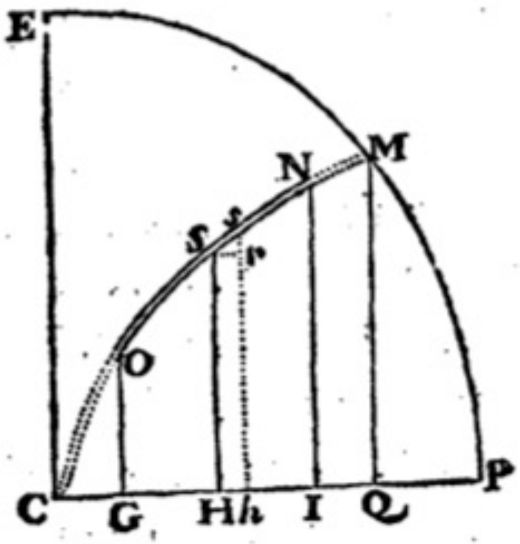
Maniere générale de faire ufage du Principe de l'équilibre des Canaux de figure quelconque.

§. XVI.

LA Loi fuivant laquelle la gravité agit fur toutes les parties d'une maffe fluide qui tourne autour de fon Axe étant donnée, trouver fi cette maffe peut avoir une forme qu'elle garde conftamment.

On fçait par le §. VIII. qu'afin qu'une maffe de Fluide puiffe prendre une forme conftante, il faut qu'un Canal quelconque rentrant en lui-même, & placé dans le plan du Meridien, foit en équilibre indépendamment de la force centrifuge, ou ce qui revient au même; il faut qu'en calculant la fomme des efforts de la gravité fur un Canal quelconque *ON*, on ait la même quantité que fi on avoit pris tout autre Canal, qui pafferoit par les mêmes points *O*, *N*.





Pour employer ce principe, on prendra à volonté dans le Canal *O N*, deux points infiniment proches *S*, *s*, & on abaiſſera de ces points à l'Axe *CP* les perpendiculaires *SH*, *sh*; on menera *Sr* paralléle à l'Axe, & l'on imaginera que la force de la gravité en chaque point *S* ait été décompoſée en deux autres forces, dont l'une agiſſe perpendiculairement à l'Axe *CP*, & l'autre parallélement au même Axe:

on fera enſuite . . . . $CH = x$

$HS = y$

$Sr = dx$

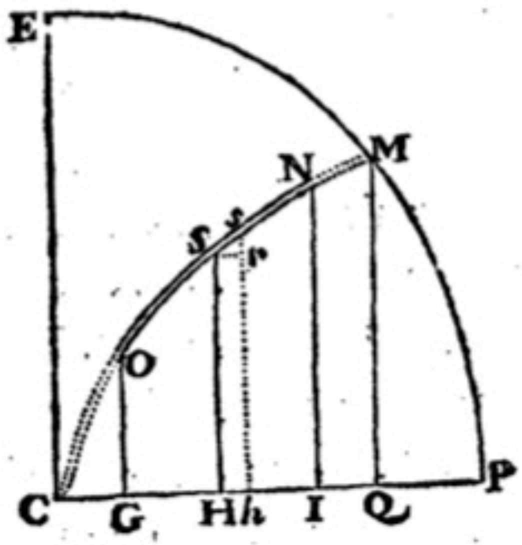
$sr = dy$

la force perpendiculaire à *CP* . . . . $= P$

la force paralléle à *CP* . . . . $= Q$

Cela fait, on cherchera l'effort que la force *P* fera faire au Cylindre *Ss* pour ſortir vers *O*, & on trouvera facilement que l'expreſſion de cet effort ſera $P\,dy$; car la force *P* agiſſant ſuivant *SH*, la partie de cette force qui agira dans la direction du Canal *Ss* ſera $\frac{P \times rs}{Ss}$; or multipliant cette quantité par la maſſe, on aura $P \times sr$ ou $P\,dy$.

I. La *Théorie de la figure de la Terre* de Clairaut (1743)



& l'on auroit le poids total de ON. Mais comme l'équilibre du Fluide demande que le poids de ON ne dépende pas de la courbure de OSN, c'eſt-à-dire de la valeur particuliere de y en x, il faut donc que $Pdy + Qdx$ puiſſe s'intégrer ſans connoître la valeur de x, c'eſt-à-dire qu'*il faut que* $Pdy + Qdx$ *ſoit une differentielle complette*, * *afin qu'il puiſſe y avoir équilibre dans le Fluide.*

LORSQUE les expreſſions des forces P & Q ſeront aſſez compoſées, pour qu'on ne reconnoiſſe pas facilement ſi $Pdy + Qdx$ eſt une differentielle complette, il faudra ſe ſervir du Theoreme que j'ai donné dans mon mémoire * ſur le calcul intégral, c'eſt-à-dire qu'il faudra voir ſi $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$. Toutes les fois que

II. Naissance du calcul différentiel et intégral de fonctions de plusieurs variables

- La naissance du calcul différentiel et intégral de fonctions de plusieurs variables résulte d'un long processus de gestation entamé à la fin du XVII^{e} siècle par les recherches de Leibniz, Jean I, Jacques I et Nicolas Bernoulli sur les familles de courbes dépendant d'un paramètre.

- Le travail est continué par Euler qui, dans deux mémoires présentés en 1734 devant l'Académie de Pétersbourg (et publiés en 1740), parvient notamment à la formulation d'un critère (dit **« critère d'Euler »**) assurant l'équivalence entre une équation aux différences partielles (EDP) du 1er ordre et la « différentielle complète » associée :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx} \quad \Longleftrightarrow \quad p(x,t)dx + q(x,t)dt$$

… c'est-à-dire telle qu'il existe une fonction *y(x,t)* vérifiant :

$$dy = pdx + qdt$$

- Clairaut, qui sera le premier à en faire usage dans le cadre d'une application à un problème physico-mathématique (en 1743…), et Fontaine, retrouveront ce critère de façon indépendante d'Euler à la fin des années 1730.

Alexis Clairaut, « Sur l'integration ou la construction des equations differentielles du premier ordre », *Mémoire de l'Académie royale des sciences pour l'année 1740* (1742).

§. I.

THEOREME *.

Si $A\,dx + B\,dy$ *repréſente la différentielle d'une quantité quelconque, compoſée de* x, *de* y *& de conſtantes, je dis que la différentielle de* A *priſe, en ne ſuppoſant que* y *de variable, & ôtant les* dy, *eſt égale à la différentielle de* B *priſe, en*

ainſi, $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$.

* Je ne ſuis pas le ſeul qui aye trouvé ce Théoreme, M. Fontaine l'avoit trouvé auſſi de ſon côté, comme il l'a fait voir par un E'crit qu'il a montré à l'Académie le jour même que je lûs ce Mémoire; & M. Euler, célébre Mathématicien, a donné à l'Académie de Peterſbourg, dans le Volume qui eſt actuellement ſous preſſe, un morceau rempli de belles recherches ſur le Calcul Intégral, où il employe cette même découverte. Comme je n'étois point en commerce avec M. Euler, lorſque j'ai donné ce Théoreme, je n'ai ſçû que long-temps après que je m'étois rencontré avec ce ſçavant Géometre.

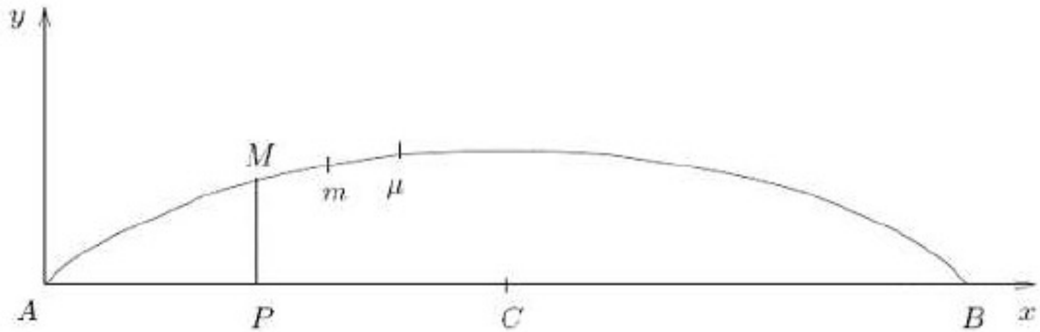
II. Le problème des cordes vibrantes : méthode moderne de mise en équation (1/2)

Problème : équation du mouvement longitudinal d'une corde d'amplitude $y(x,t)$, de masse linéique μ, de longueur l, fixe en ses deux extrémités A et B (dans l'hypothèse de petites vibrations et en négligeant la force de pesanteur)

Soient : - dx un élément infinitésimal de cette corde,

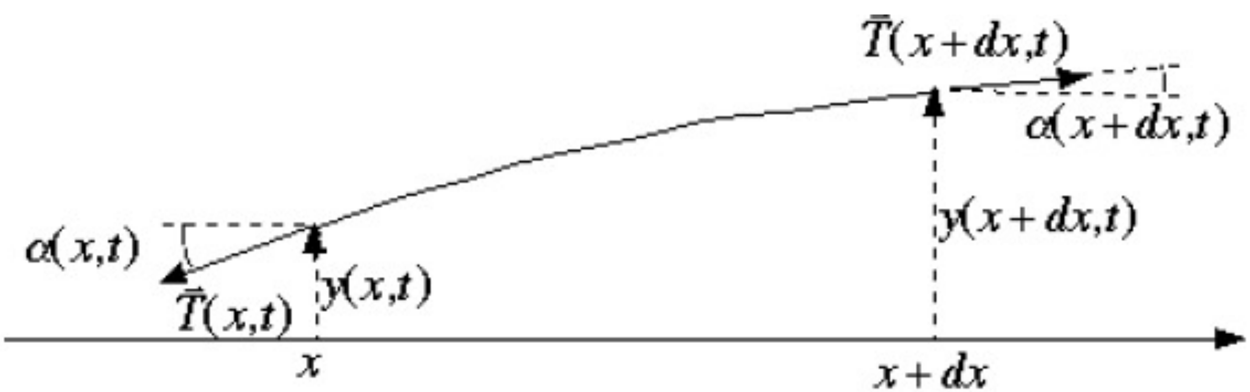
- $T(x,t)$ le module de la force de tension au point $(x,y(x,t))$ à l'instant t (force exercée par la partie droite de la corde sur la celle de gauche),

- et $\alpha(x,t)$ l'angle entre la force de module $T(x,t)$ et l'axe horizontal



- Hypothèse des petites vibrations (α <<1) :

$$\boxed{\alpha \approx \sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}}$$



II. Le problème des cordes vibrantes : méthode moderne de mise en équation (2/2)

- L'application du principe fondamental de la dynamique à l'élément *dx* (de masse *μdx)* donne :

  - Suivant l'axe des *x* :

$$0 = T(x+dx,t)\,\cos(\alpha(x+dx,t)) - T(x,t)\,\cos(\alpha(x,t))$$

d'où l'on déduit que : $T(x+dx,t) = T(x,t)$, soit $T(x,t) = \text{Cste} = T.$

  - Suivant l'axe des *y* :

$$\mu\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx,t)\,\sin(\alpha(x+dx,t)) - T(x,t)\,\sin(\alpha(x,t))$$

c'est-à-dire, sachant que $\alpha \approx \sin\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x}$:

$$\mu dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left[\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)\right] = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx.$$

- L'excursion *y(x,t)* de la corde vérifie donc l'équation :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{T}{\mu}$$

II. Le problème des cordes vibrantes avant D'Alembert

- Le problème des cordes vibrantes est abordé au début du XVIIIe siècle.

- Jusqu'en 1713, les recherches concernent essentiellement le calcul du temps de vibration d'une corde tendue fixe entre deux extrémités.

- En 1713, Brook Taylor (1685-1731) publie un mémoire intitulé « De motu nervi tensi » (dans les *Philosophical Transactions*) dans lequel il est le premier à tenter de déterminer la courbe que forme une telle corde au cours de ses oscillations :

  - il utilise, pour cela, le calcul différentiel et intégral (mais ne manipule encore que des fonctions d'une variable)

  - et conclut que la corde forme une sinusoïde (la « compagne de la cycloïde ») à chaque instant.

- Le problème des cordes vibrantes est ensuite abordé par Jean Bernoulli et Euler sans qu'ils ne parviennent à l'équation générale du mouvement.

- D'autres problèmes lié à celui des cordes vibrantes font également l'objet de recherches : le problème de la courbe élastique, le problème des lames vibrantes, le problème d'une corde chargée de poids suspendue par l'une de ses extrémités, etc.

II. Le problème des cordes vibrantes : le mémoire de D'Alembert de 1747

- Dans le volume de l'*Histoire de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin pour l'année 1747*, D'Alembert publie un mémoire intitulé « Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration », dans lequel :

  ✓ Il établit l'« équation aux dérivées partielles » gouvernant le mouvement de la corde (avec *y(x,t)* l'excursion du point de la corde d'abscisse *x* à l'instant *t*) :

  $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}} \quad \text{en posant} \quad c^2 = 1$$

  ✓ Il parvient à l'expression générale de la solution en utilisant notamment le « critère d'Euler » :

  ✧ Il pose : $dy = pdt + qdx \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = \dfrac{dy}{dt} \text{ et } q = \dfrac{dy}{dx} \\ \textit{pdt+qdx} \text{ est une « différentielle complète » (\textit{exacte})} \end{array} \right.$

  ✧ Puis : $\dfrac{d^2 y}{dt^2} = \dfrac{d^2 y}{dx^2} \Rightarrow \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dq}{dx} \Leftrightarrow$ *pdx+qdt* est une « différentielle complète » (*exacte*)

II. Le problème des cordes vibrantes : le mémoire de D'Alembert de 1747

✧ Il parvient ainsi à un système de deux « différentielles complètes » :

$$\begin{cases} p\,dx + q\,dt \\ p\,dt + q\,dx \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (p+q)d(x+t) \text{ complète} \\ (p-q)d(x-t) \text{ complète} \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} p+q \text{ fonction de } x+t \\ p-q \text{ fonction de } x-t \end{array}\right.$$

d'où il déduit l'expression générale de la solution au problème :

$$\boxed{y(x,t) = \varphi(t+x) + \Gamma(t-x)}$$

✓ Il considère deux types de *conditions initiales*… (+ fixité des extrémités en A et en B) :	et montre que *y(x,t)* est alors complètement déterminée :
- corde en position rectiligne (position d'équilibre) et vitesse non nulle : « corde frappée »	par la courbe de la **vitesse initiale** de la corde
- corde écartée de sa position d'équilibre et vitesse nulle : « corde pincée »	par la courbe de la **position initiale** de la corde
- cas mixtes	

II. Le problème des cordes vibrantes : le mémoire de D'Alembert de 1747

- Dans les deux cas (corde « pincée » ou « frappée »), les conditions aux limites (fixité des extrémités en A et B) imposent que la **« courbe génératrice » (vitesse initiale ou position initiale de la corde)** soit **impaire et *2l*-périodique**.

- Exemple – cas de la « corde pincée » :

$y(0,t)=0$	fixité de la corde au point A
$y(l,t)=0$	fixité de la corde au point B
$y(x,0)$	figure initiale de la corde (pour x dans [0,l])
$\dfrac{dy}{dt}(x,0)=0$	vitesse initiale nulle

$$y(x,t)=\varphi(t+x)+\Gamma(t-x)$$

$$\Downarrow$$

$$y(x,t)=\varphi(x+t)+\varphi(x-t)$$

$\Rightarrow$ $y(x,0)=2\varphi(x)$ sur [0,l]

avec φ impaire et *2l*-périodique

- Dès ce mémoire, D'Alembert est par ailleurs conscient que l'équation des cordes vibrantes gouverne également le problème de la propagation du son.

- Dans les années suivantes, D'Alembert appliquera le calcul différentiel et intégral de fonctions de plusieurs variables à d'autres champs des sciences physico-mathématiques, en particulier l'hydrostatique (dans la lignée de Clairaut) et l'hydrodynamique.

II. Le problème des cordes vibrantes : désaccord entre D'Alembert et Euler

- En 1748, Euler présente à son tour un mémoire intitulé « Sur la vibration des cordes » et très proche de celui de D'Alembert (il reconnaît d'ailleurs explicitement la priorité de ce dernier).

- En 1750, D'Alembert présente une addition à ses recherches de 1747. Il y réagit au mémoire d'Euler et ajoute une condition pour que la solution soit admissible : il faut que :

  « les différentes figures de la corde vibrante [soient] renfermées dans une seule & même équation. »

- Ce point de désaccord entre les deux savants est issu de leurs conceptions respectives de la **notion de fonction** :

D'Alembert associe le mot de fonction à une **expression analytique** ⟷ **Euler** conçoit une fonction comme une **courbe donnée arbitrairement** (c'est-à-dire graphiquement)

⟹ **Contrairement à Euler, D'Alembert rejette les fonctions changeant d'expression, c'est-à-dire les « fonctions discontinues » dans le sens du XVIII^{e} siècle.**

II. Le problème des cordes vibrantes : le mémoire de Daniel Bernoulli (1753)

- En 1753 (toujours dans *HAB*), Daniel Bernoulli publie deux mémoires sur le sujet. Dans le premier des deux, intitulé « Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 & 1748 » :

  - il reproche à D'Alembert et Euler d'avoir admis de nouvelles courbes (autres que la sinusoïde de Taylor) « dans un sens tout-à-fait impropre ».

  - il établit **sans calcul** l'expression générale de la solution sous la forme d'une combinaison de vibrations simples (c'est-à-dire de fonctions sinusoïdales du type (avec *α(t)* une fonction du temps *t*, *n* un entier et *l* la longueur de la corde), de telle sorte que :

$$\boxed{y(x,t) = \alpha(t)\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \beta(t)\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \gamma(t)\sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \ \&\text{c.}}$$

  - cette solution est selon lui la plus générale (les courbes obtenues par Euler et D'Alembert doivent donc pouvoir s'y ramener).

  - il affirme avoir ainsi présenté « ce que les nouvelles vibrations de M^{rs} D'Alembert et Euler ont de physique ».

II. Le problème des cordes vibrantes : la réponse d’Euler (1753)

▪ Dans un mémoire présenté en 1753 (et publié dans *HAB* pour cette même année) Euler répond à la fois à D'Alembert et à Daniel Bernoulli :

- Il rejette la position de Daniel Bernoulli et entreprend de montrer que toutes les courbes représentant les vibrations de la corde ne sont pas forcément comprises dans l'équation :

$$y(x,t) = \alpha(t)\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \beta(t)\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \gamma(t)\sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \ \&c.$$

- Il rejette la restriction imposée par D'Alembert dans son mémoire de 1750.

REMARQUES
SUR LES MÉMOIRES PRÉCEDENS
DE *M. BERNOULLI*,
PAR M. EULER.

II. M. *Bernoulli* tire toutes ces excellentes réfléxions uniquement des recherches, que feu M. *Taylor* a faites ſur le mouvement des cordes, & ſoutient contre M. d'*Alembert* & moi, que la ſolution de *Taylor* eſt ſuffiſante à expliquer tous les mouvemens, dont une corde eſt ſuſceptible; de ſorte que les courbes, qu'une corde prend pendant ſon

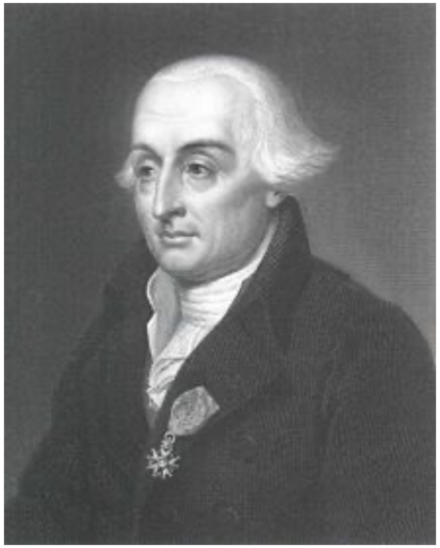
II. Le problème des cordes vibrantes : l'entrée en scène de Lagrange

- En 1755, D'Alembert soumet un nouveau mémoire intitulé « Observations sur deux mémoires de MM. Euler et Daniel Bernoulli insérés dans les mémoires de 1753 » à l'Académie de Berlin.

- Jugé trop polémique, le mémoire est refusé en 1757. D'Alembert le retravaille et le fait paraître en 1761 dans le I[er] tome de ses *Opuscules mathématiques*.

- La fin de la décennie 1750 marque l'entrée en scène de Lagrange dans le cadre de la polémique. Le savant, alors à Turin, publie rapidement trois mémoires sur le sujet, un premier mémoire en 1759 et deux autres en 1762.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)



- Dans ces trois premiers écrits sur le sujet, Lagrange se range du côté d'Euler dans le débat qui l'oppose à D'Alembert à propos de l'admissibilité des solutions « discontinues » (toujours dans le sens de fonctions changeant d'expression) :

> « […] *on voit la nécessité d'admettre dans le calcul d'autres courbes que celles que les Géomètres ont considérées jusqu'à présent, et d'employer un nouveau genre de fonctions variables indépendantes de la loi de continuité, et qu'on peut très-bien appeler fonctions irrégulières et* ***discontinues***. »

II. Le problème des cordes vibrantes : suite et fin de la polémique

- A partir de 1761, Euler se désengage de la polémique mais continue à publier des recherches sur le sujet, que ce soit sur le problème des cordes vibrantes ou de la propagation du son. Daniel Bernoulli et Lagrange font de même.

- Dans les années 1764 et 1765, D'Alembert et Lagrange correspondent intensément sur le sujet. Le second se ralliera en partie à D'Alembert à l'issue de cette période. En 1766, des extraits des lettres échangées seront publiées dans les *Mélanges de Turin*

- D'Alembert finit par changer de position sur la question des solutions admissibles :

  - Condorcet, disciple de D'Alembert joue un rôle dans ce revirement. Dans les Mémoires de l'Académie de 1771, il envisage en effet la possibilité de **raccorder des fonctions changeant d'expression** de telle sorte que leurs dérivées première et seconde ne fassent pas de sauts.

  - En 1780, dans un mémoire portant sur le problème de la propagation du son. D'Alembert généralise ce critère théorique jusqu'à l'ordre n.

  - Dans un mémoire non publié de son vivant, il affirme enfin que la la fonction φ peut changer d'expression à condition qu'elle ne fasse pas de « sauts de courbure ».

Quelques conclusions

- L'analyse prend un essor considérable au XVIII^{e} siècle et se structure en une nouvelle branche des mathématiques. Le concept de fonction joue un rôle fondamental dans ce processus.

- Ce mouvement nourrit à la fois le développement des « mathématiques pures » (naissance de la théorie des EDP, par exemple) et élargit considérablement le champ d’application des mathématiques aux phénomènes physiques (« mathématiques mixtes »)

- L'application de l'analyse aux phénomènes physiques alimente de nombreux questionnements mathématiques, comme le montre l’exemple de la querelle des cordes vibrantes et les discussions qu’elle nourrit sur certaines propriétés des fonctions.