
Master de Mathématiques – Sorbonne Université (M1)

UE 4M039 : Histoire des mathématiques

(Alexandre Guilbaud et Laurent Mazliak)

Semaine 5

La naissance

du calcul différentiel et intégral



Jean-Baptiste Colbert présentant les membres de l'Académie royale des sciences à Louis XIV (H. Testelin, d'après une gravure de Lebrun)

- Les académies qui naissent au XVII^e siècle signent l'abandon du travail solitaire.
- Les savants s'y réunissent de leur plein gré et de façon informelle pour : échanger des idées et réfléchir de façon collective sur un certain nombre de sujets / soumettre leurs travaux à la critique des autres membres / réaliser des observations et les commenter.
- Les « académies privées » :
 - ✓ L'Académie dei Lincei, fondée à Rome en 1603 (Galilée en est membre à partir de 1611)
 - ✓ L'Académie del Cimento à la brève existence (1657-1667)
 - ✓ L'académie napolitaine des Investiganti (1663-1670)
 - ✓ L'Académie par correspondance de Marin Mersenne (1588-1648) met en relation une quarantaine de savants (dont Descartes, Fermat, Galilée, Gassendi, Roberval, Huygens)
 - ✓ etc.

- **La Royal Society de Londres** : existe depuis 1661, elle ne reçoit aucun financement de la couronne et vit des cotisations de ses membres (qui devinrent fort nombreux).
- **L'Académie royale des sciences de Paris**, créée par Colbert en 1666 :
 - l'Observatoire de Paris naît en 1667 sous l'impulsion de l'Académie.
 - le 20 janvier 1699, Louis XIV lui attribue son premier règlement. Elle reçoit le titre d'Académie royale et est installée au Louvre.
- **Au XVIII^e siècle, les Académies se multiplient en Europe** :
 - l'**Académie de Berlin**, créée en 1700 sous l'impulsion de Leibniz, reconnue en 1711 et réorganisée par Frédéric II en 1744
 - l'**Académie de Petersbourg**, créée en 1724, accueille de nombreux savants étrangers (Daniel Bernoulli, Euler)
 - l'Académie de Turin (où Lagrange fait ses débuts)
 - les Académies de Bologne, de Lisbonne, de Göttingen, d'Edinburgh, etc.

Règlement ordonné par le Roi pour l'Académie royale des sciences 26 janvier 1699

II. Ladite Académie sera toujours composée de quatre sortes d'académiciens : les honoraires, les pensionnaires, les associés et les élèves [...]

III. Les honoraires seront tous regnicoles et recommandables par leur intelligence dans les mathématiques ou dans la physique, desquels l'un sera président, et aucun d'eux ne pourra devenir pensionnaire.

IV. Les pensionnaires seront tous établis à Paris : trois géomètres, trois astronomes, trois mécaniciens, trois anatomistes, trois chimistes, trois botanistes, un secrétaire et un trésorier. [...]

V. Les associés seront en pareil nombre ; douze desquels ne pourront être que regnicoles, deux appliqués à la géométrie, deux à l'astronomie, deux aux mécaniques, deux à l'anatomie, deux à la chimie, deux à la botanique ; les huit autres pourront être étrangers et s'appliquer à celles d'entre ces diverses sciences pour lesquelles ils auront plus d'inclination et de talent.

VI. Les élèves seront tous établis à Paris, chacun d'eux appliqué au genre de science dont fera profession l'académicien pensionnaire auquel il sera attaché

Règlement ordonné par le Roi pour l'Académie royale des sciences 26 janvier 1699

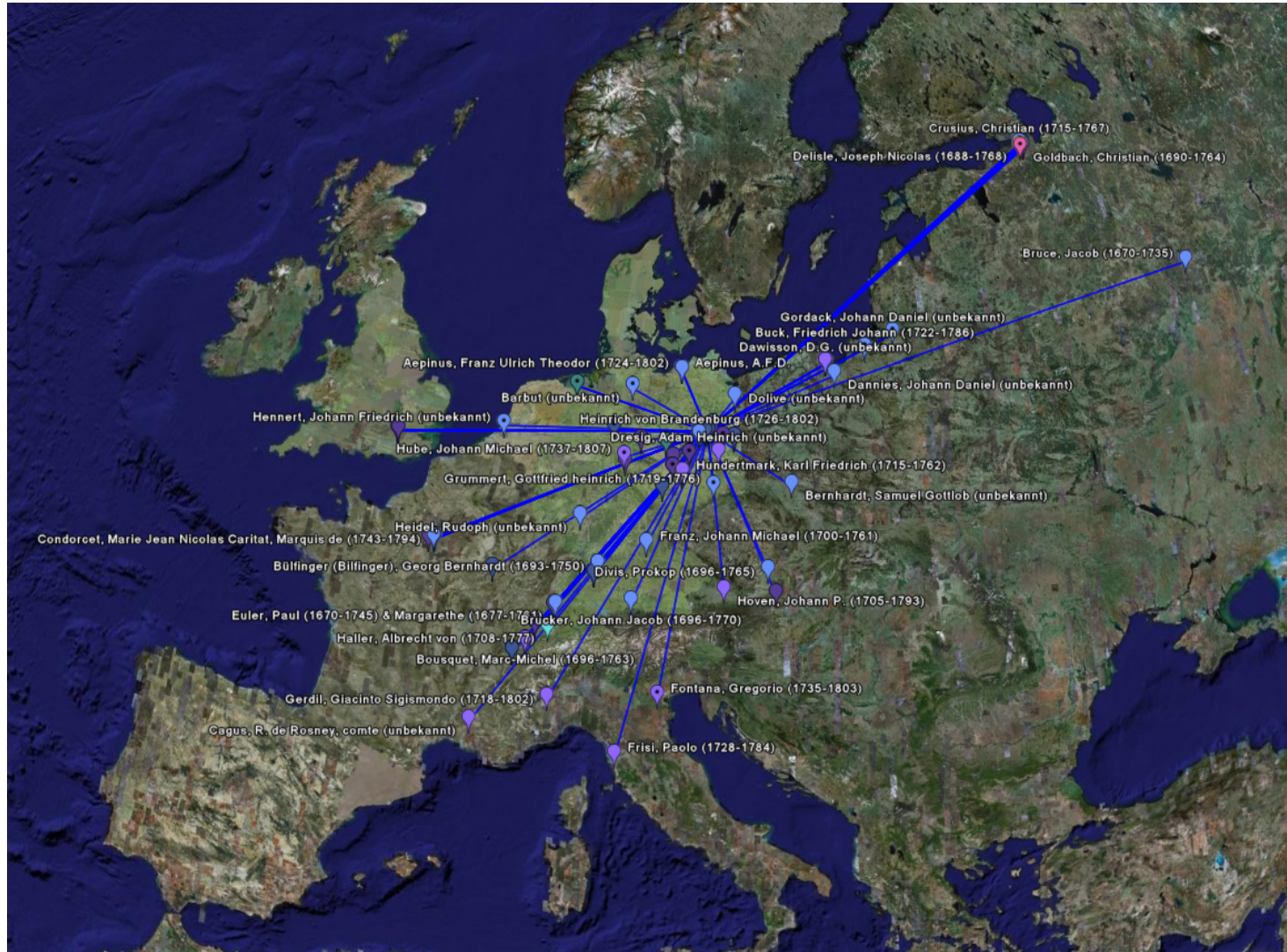
XXVIII. L'Académie chargera quelqu'un des académiciens de lire les ouvrages importants de physique ou de mathématiques qui paroîtront, soit en France, soit ailleurs.

XXIX. L'Académie fera de nouveau les expériences considérables qui se seront faites partout ailleurs, et marquera dans ses registres la conformité ou la différence des siennes à celles dont il était question.

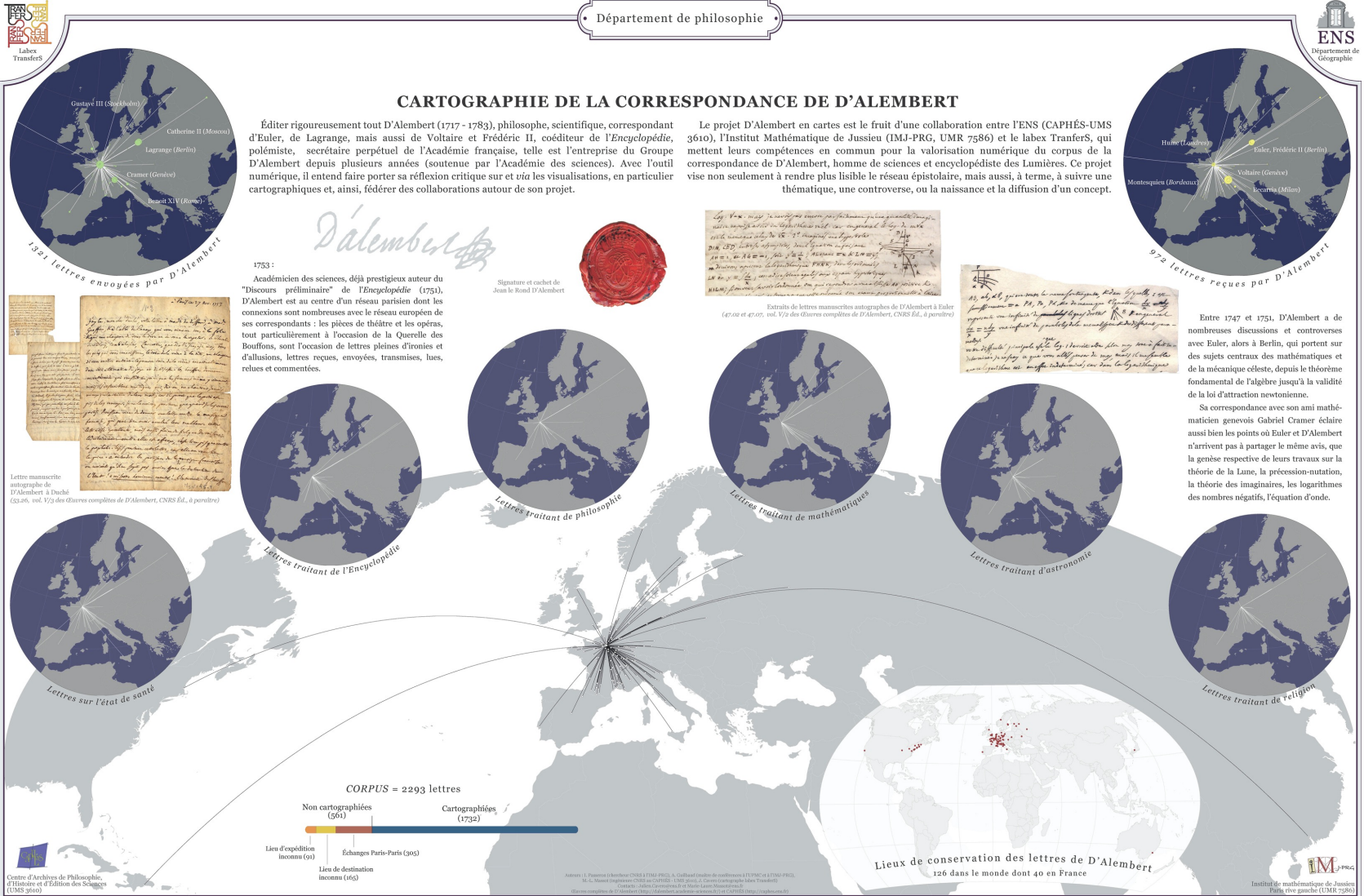
XXX. - L'Académie examinera les ouvrages que les académiciens se proposeront de faire imprimer ; elle n'y donnera son approbation qu'après une lecture entière faite dans les assemblées, ou du moins qu'après un examen et rapport fait par ceux que la Compagnie aura commis à cet examen ; et nul des académiciens ne pourra mettre aux ouvrages qu'il fera imprimer le titre d'académicien, s'ils n'ont été ainsi approuvés par l'Académie.

XXXI - L'Académie examinera, si le Roi l'ordonne, toutes les machines pour lesquelles on sollicitera des privilèges auprès de Sa Majesté. Elle certifiera si elles sont nouvelles et utiles, et les inventeurs de celles qui seront approuvées seront tenus de lui en laisser un modèle.

Prologue (2/3) – Les correspondances



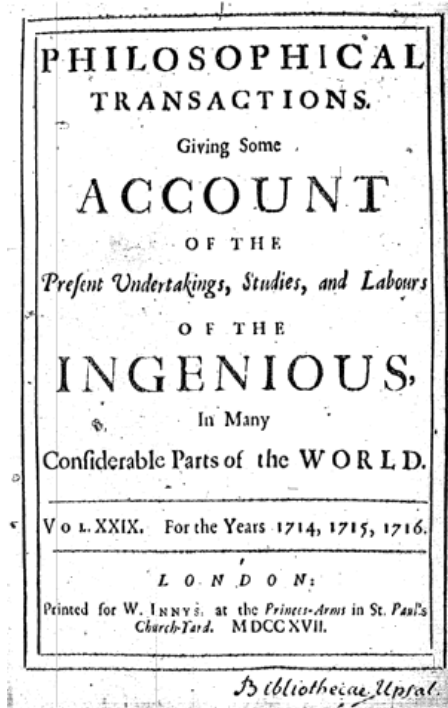
Le réseau de correspondance d'Euler (1707-1783)
[document réalisé par S. Bodenmann]



Le réseau de correspondance de D'Alembert (1717-1783) [document réalisé par I. Passerou et A. Guilbaud]

Prologue (3/3) – Les journaux et les périodiques

- L'impressionnante masse de travaux scientifiques des académiciens (en particulier) se traduit par une multiplication des journaux, gazettes, revues et publications périodiques.
- **Les périodiques académiques :**

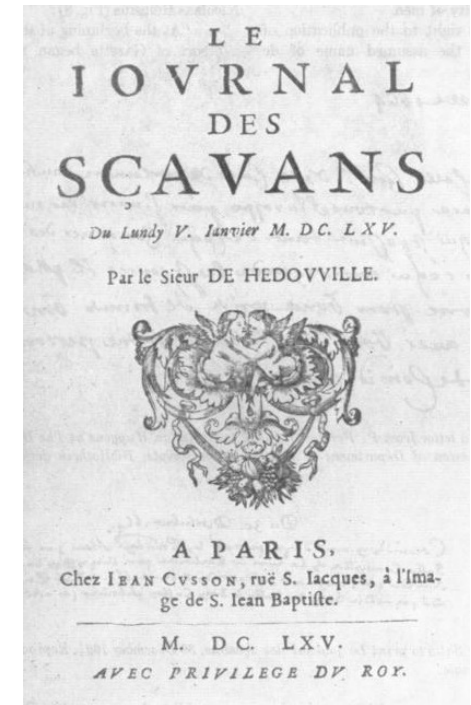


Fondées en 1665, les *Philosophical Transactions* correspondent à la première revue strictement scientifique.



Les volumes de l'*Histoire de l'Académie royale des sciences* de Paris.

- **Les journaux :**



Le *Journal des savants* naît en 1665. Il traite de mathématiques, de philosophie naturelle, d'histoire, etc.

*Histoire de l'Académie royales des sciences, année 1699 (1702),
extrait de la table de la partie Histoire*

MATHEMATIQUE.

ALGEBRE ET GEOMETRIE.

<i>Quadrature d'une infinité de segmens & de secteurs de la Cycloïde.</i>	66.
<i>Methode pour trouver des Courbes, le long desquels un corps tombant, s'approche ou s'éloigne de l'Horison en telle raison des temps qu'on voudra.</i>	68.
<i>Sur les Equations du second & du troisieme degré.</i>	70.
<i>Sur la Duplication du Cube.</i>	71.

ASTRONOMIE.

<i>Sur le retour des Cometes.</i>	72.
<i>Observations d'Eclipses.</i>	75.
<i>Observation de Jupiter.</i>	78.
<i>Observations d'une Etoile sur le disque de la Lune.</i>	ibid.
<i>Sur la Parallaxe annuelle de l'Etoile Polaire</i>	80.
<i>Sur des Parelies.</i>	81.

GEOGRAPHIE.

<i>Positions de quelques Villes de la Chine.</i>	83.
<i>Positions de quelques Villes de Turquie & d'Armenie</i>	85.

OPTIQUE.

<i>Sur la multiplication des Images par les verres plans.</i>	86.
---	-----

DIOPTRIQUE.

<i>Effets des verres brulans de trois ou quatre pieds de diametre.</i>	90.
--	-----

MECHANIQUE.

<i>Pour la construction des Vaisseaux.</i>	95.
<i>Examen de la force de l'homme pour porter ou pour tirer.</i>	96.
<i>Sur les Clepsidres.</i>	99.
<i>Moyens de se servir du feu pour faire mouvoir les Machines.</i>	101.
<i>Sur les Frottemens des Machines.</i>	104.
<i>Sur la roideur des cordes que l'on employe dans les Machines.</i>	109.
<i>Sur la Vis.</i>	111.
<i>Sur un Niveau.</i>	112.
<i>Sur quelques Machines employées dans une nouvelle Navigation de la Seine.</i>	114.
<i>Sur une Machine faite pour éprouver la proportion de la chute des Corps</i>	116.
<i>Sur la Description des Arts.</i>	117.
<i>Machines ou inventions approuvées par l'Académie pendant l'année mil six cens quatre-vingt-dix-neuf.</i>	120.
<i>Eloge de Monsieur Bourdelin.</i>	122.

T A B L E
POUR LES MEMOIRES

Methode pour trouver des Courbes le long desquelles un corps tombant, s'approche ou s'éloigne de l'horison en telle raison des temps qu'on voudra, & dans quelque hypothese de vitesses que ce soit, &c. Par M. VARIGNON. Page 1.
Observations de l'Eclipse de Lune arrivée le 15. Mars au soir 1699. Par M. CASSINI. 13.
Observation de la même Eclipsé, Par M. DE LA HIRE, à l'Observatoire 18.
Reflexions sur la lumiere & les couleurs, la generation du feu, Par LE PERE MALEBRANCHE. 22.
Du retour des Cometes, Par M. CASSINI. 36.
Observation sur la quantité exacte des sels volatiles acides contenus dans les differens esprits acides, Par M. HOMBERG. 44.
Maniere Géométrique & generale de faire des Clepsidres ou Horloges d'eau avec toute sortes de vases donnez, percez où l'on voudra, d'une petite ouverture quelconque par où l'eau s'écoule suivant quelque hypothese de vitesses que ce soit. & reciproquement de trouver ces vases pour toutes sortes d'hypotheses de telles vitesses, & des tems suivant lesquels se doivent regler les abaissemens de la surface de l'eau qui s'écoule, Par M. VARIGNON. 51.
Description d'une nouvelle maniere de porre d'Ecluse qu'on a pratiquée dans l'entreprise de la nouvelle Navigation de la Seine, Par M. DES BILLETTES. 63.
Essais pour examiner les Sels des Plantes, Par M. HOMBERG. 69.
Explication de quelques effets singuliers qui arrivent aux verres plans, comme sont les glaces de Miroir, Par M. DE LA HIRE. 75.
Pour empêcher que l'humidité de l'air de la nuit ne s'attache au verre objectif des grandes Lunettes, Par M. DE LA HIRE. 91.
Rapport general des forces qu'il faut employer dans l'usage de la Vis, Par M. VARIGNON. ibid.
Histoire des Tamarins, Par M. TOURNEFORT. 96.
Observations de trois nouvelles Taches de Jupiter, Par M. CASSINI. 103.
Methode facile pour trouver un solide rond qui étant mê dans un fluide en repos parallelement à son axe, rencontre moins de resistance que tout autre solide, qui ayant même longueur & largeur, se meuve avec la même vitesse suivant la même direction, Par M. LE

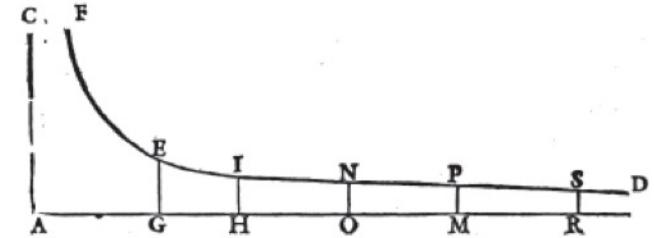
MARQUIS DE L'HÔPITAL. 107.
Moyen de substituer commodement l'action du Feu, à la force des hommes & des chevaux pour mouvoir les machines, Par M. AMONTONS. 112.
Description du Niveau, DE M. COUPLET. 127.
Quadrature d'une infinité de segmens, de secteurs & d'autres espaces de la Ronlette ou de la Cycloïde vulgaire, Par M. BERNOULLI. Professeur des Mathématiques à Groningue. 134.
Methode pour centrer les verres des Lunettes d'approche en les travaillant, Par M. DE LA HIRE, à l'Observatoire. 139.
Methodes communes aux Equations du second & du troisième degré pour en avoir la solution par une simple transformation de leur premier terme, faite à l'ordinaire, Par M. VARIGNON. 142.
Observations sur cette sorte d'Insectes qui s'appellent ordinairement Demoiselles, Par M. HOMBERG. 145.
Observation d'une Eclipsé de l'œil du Taureau Aldebaram ou Paillicium, Par M. DE LA HIRE, à l'Observatoire. 151.
Examen de la force de l'Homme pour mouvoir des fardeaux, tant en levant, qu'en portant & en tirant, laquelle est considerée absolument & par comparaison à celle des Animaux qui portent & qui tirent comme les Chevaux, Par M. DE LA HIRE, à l'Observatoire. 153.
Observation de l'Eclipse du Soleil du 23. Septembre 1699. Par M. CASSINI. 163.
Observation de la même Eclipsé, Par M. DE LA HIRE, à l'Observatoire. 164.
Essais sur les Injections Anatomiques, Par M. HOMBERG. 165.
Etranges effets du Scorbut arrivez à Paris en 1699. Par M. POUPART. 169.
Reflexions sur une Lettre de M. Flamsteed à M. Wallis touchant la Parallaxe annuelle de l'Etoile Polaire, Par M. CASSINI le fils. 177.
Deux manieres de Rouës à épuiser l'eau, Par M. DES BILLETTES. 184.
De la resistance causée dans les Machines, tant par les frottemens des parties qui les composent, que par la roideur des cordes qu'on y employe, & la maniere de calculer l'un & l'autre, Par M. AMONTONS. 206.
Table de la résistance causée dans les machines, Par le même. 223.
Observations sur la Circulation du sang dans le Fœtus: Et Description du cœur de la Tortue & de quelques autres animaux, Par M. DU VERNEY. 227.
Reflexions sur l'Eclipse du 23. Septembre 1699. Par M. CASSINI. 274.

MARS, année
1699 (1702),
table de la
partie
Mémoire

I. De la méthode d'exhaustion aux méthodes infinitésimales

- Développement de la méthode d'exhaustion par les savants arabes : Thabit ibn Qurra (IX^e siècle), Ibn Al-Haytham (fin du X^e siècle), etc.
- Au XVI^e siècle, Simon Stevin (1548-1620) et Luca Valerio (1552-1618) omettent le double raisonnement par l'absurde : le premier en ayant recours à la notion d'infini (héritage scholastique), le second en lui substituant un théorème général.
- Au XVII^e siècle :
 - Cavalieri (1598-1647), Torricelli (1608-1647), Roberval (1602-1675), Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), John Wallis (1616-1703) développent la méthode des indivisibles
 - Développement de méthodes de quadrature par Fermat (?-1665), Pascal (1623-1662), Brouncker, Mercator, etc. basées sur l'utilisation des séries infinies

Exponatur, si placet, hyperbola, cujus ea sit proprietas, ut sit semper ut quadratum rectæ HA, ad quadratum rectæ AG, ita recta GE, ad rectam HI, & ut quadratum



OA, ad quadratum AH, ita recta HI, ad rectam ON, &c. Aio spatium infinitum, cujus basis GE, & curva ES, ex uno latere, ex alio vero asymptotos infinita GOR, æquari spatio rectilineo dato. Fingantur termini progressionis geometricæ in infinitum extendendi, quorum primus sit AG, secundus AH, tertius AO, &c. in infinitum, & ad se se per approximationem tantum accedant quantum satis sit ut juxta Methodum Archimedæam, parallelogrammum rectilineum sub GE, in GH, quadrilineo mixto GHE, adæquetur, ut loquitur Diophantus, aut ferè æquetur.

GE, in GH.

Item ut priora ex intervallis rectis proportionalium GH, HO, OM, & similia sint ferè inter se æqualia, ut commodè per *ἀναγωγή ἐν ἀόριστον*, per circumscriptiões & inscripções Archimedæa demonstrandi ratio institui possit, quod semel monuisse sufficiat, ne artificium quibuslibet geometris jam satis notum inculcare sæpius & iterare cogamur.

His positis, cum sit ut AG, ad AH, ita AH, AO, & ita AO ad AM, erit pariter ut AG, ad AH: ita intervallum GH, ad HO, & ita intervallum HO, ad OM, &c. Parallelogrammum autem sub EG, in GH, erit ad parallelogrammum sub HI, in HO, ut parallelogrammum sub HI, in HO, ad parallelogrammum sub NO, in OM, cum enim ratio parallelogrammi sub GE, in GH, ad parallelogrammum sub HI, in HO, componatur ex ratione rectæ GE, ad rectam HI, & ex ratione rectæ GH, ad rectam HO: fit autem ut GH, ad HO, ita AG, ad AH, ut præmonuimus. Ergo ratio parallelogrammi sub EG, & GH, ad parallelogrammum sub HI, in HO, componitur ex ratione GE, ad HI, & ex ratione AG, ad AH, sed ut GE, ad HI, ita ex constructione HA, quadratum, ad quadratum GA, sive propter proportionales: ita recta AO, ad rectam GA. Ergo ratio parallelogrammi sub EG, in GH, ad parallelogrammum sub HI, in HO, componitur ex ratione AO, ad AG, & AG, ad AH, sed ratio AO ad AH, componitur ex illis duabus. Ergo parallelogrammum sub GE, in GH, est ad parallelogrammum sub HI, in HO, ut OA, ad HA: sive ut HA, ad AG.

Similiter probabitur parallelogrammum sub HI, in HO, esse ad parallelogrammum sub ON, in OM, ut AO, ad HA, sed tres rectæ quæ constituunt rationes parallelogrammorum, rectæ nempe AO, HA, GA, sunt proportionales ex constructione.

Fermat, « Quadrature de l'hyperbole », 1636 (publié à titre posthume en 1679)

I. De la méthode d'exhaustion aux méthodes infinitésimales

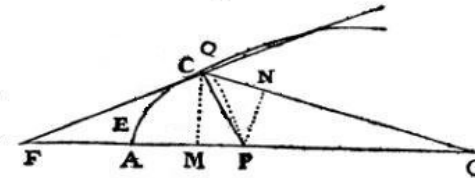
- Apparition du problème des tangentes au milieu du XVII^e siècle :
 - méthodes analytiques de Descartes (1596-1650) et de Fermat
 - méthode géométrique d'Isaac Barrow (1630-1677).
- Isaac Barrow fait apparaître le problème de la quadrature et le problème des tangentes comme inverses l'un de l'autre. Mais son approche géométrique l'empêchera de tirer parti de cette intuition.

342

LA GEOMETRIE.

tels de leurs points qu'on voudra choisir. Et i'ose dire que c'est cecy le probléme le plus vtile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçauoir en Geometrie.

Facon generale pour trouuer des lignes droites, qui coupent les courbes données, ou leurs contin-gentes, a angles droits.



Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui fa-

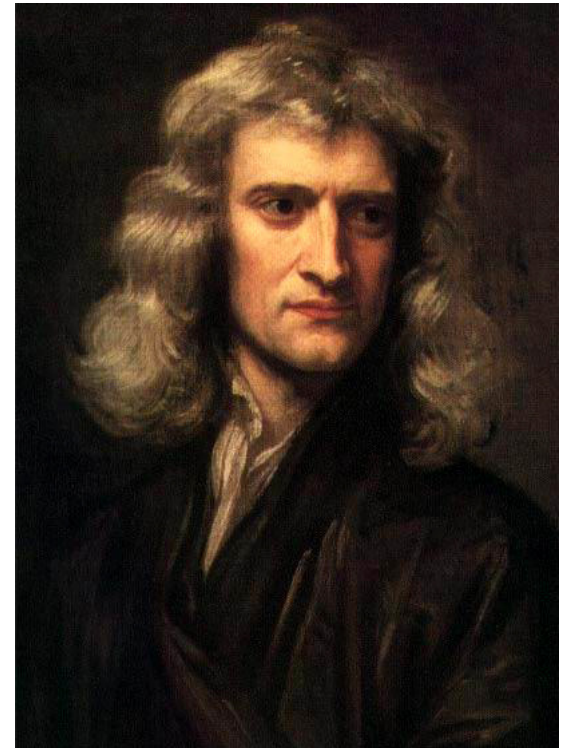
ce avec elle des angles droits. Je suppose la chose desia faite, & que la ligne cherchée est C P, laquelle ie prolonge iusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie suppose estre celle aux points de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E : en sorte que faisant M A ou C B $\propto y$, & C M, ou B A $\propto x$, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui est entre x & y . Puis ie fais P C $\propto s$, & P A $\propto v$, ou P M $\propto v - y$, & a cause du triangle rectangle P M C iay ss , qui est le quarré de la baze esgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les quarrés des deux costés. c'est a dire iay $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, ou bien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oste de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les points de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y . ce qui est aysé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d' x , & le quarré de cete somme au lieu d' xx , & son cube au lieu d' x^3 , & ainsi des autres, si c'est x que ie veuille oster; ou bien

II. La naissance d'un nouveau calcul

**Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)**



**Isaac Newton (1643-
1727)**



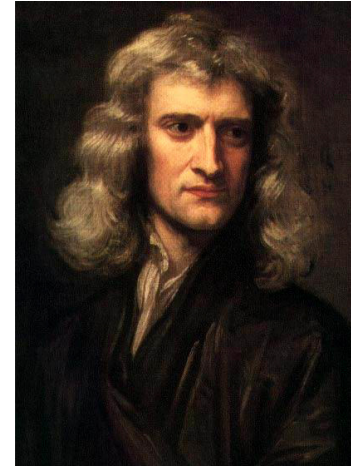
II. La naissance d'un nouveau calcul

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

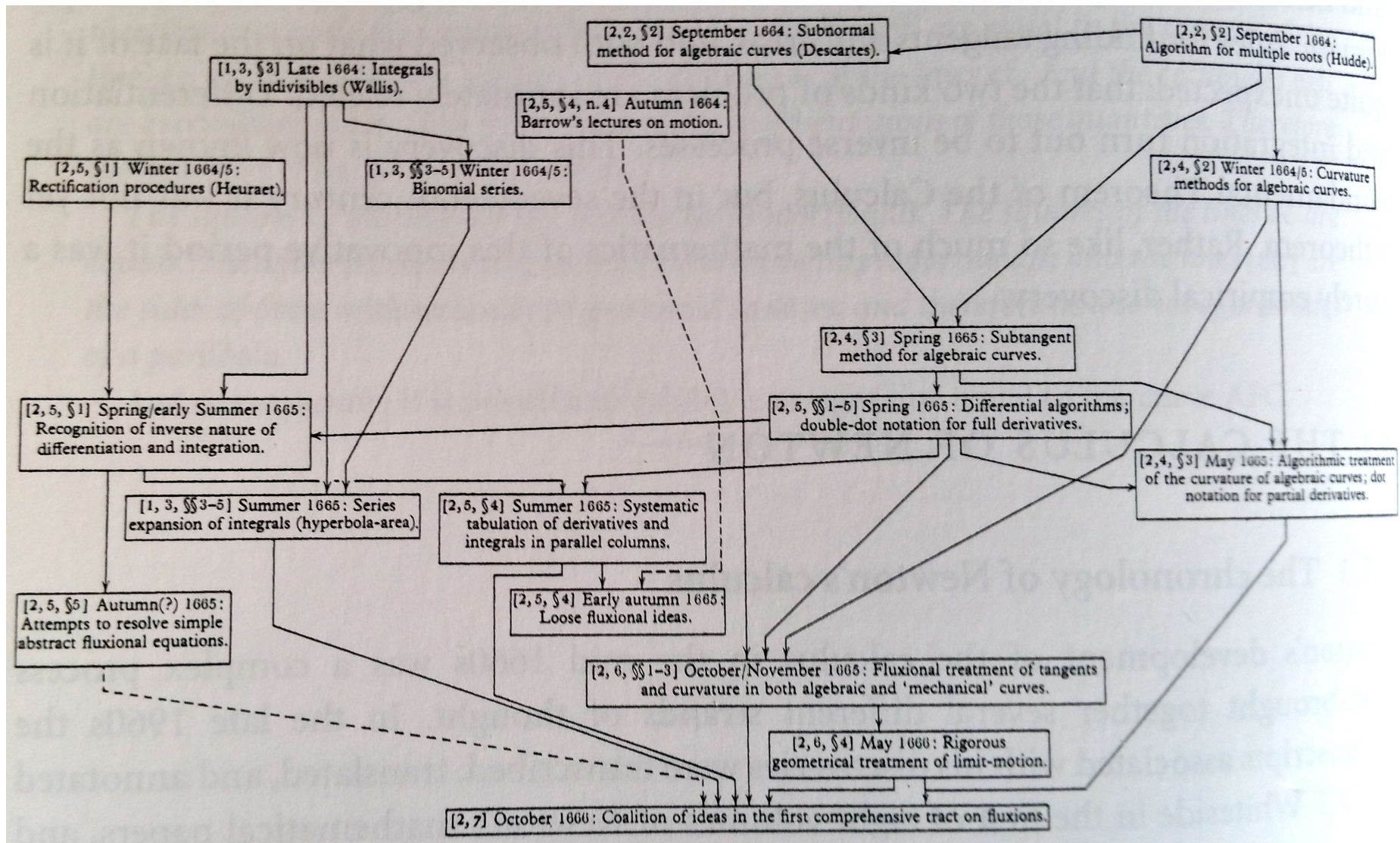


- Indépendamment l'un de l'autre, Newton et Leibniz réordonnent et systématisent l'ensemble de ces résultats
- Ils mettent au point des procédés algorithmiques de calcul facilement utilisables
- Ils identifient et manipulent le problème des tangentes comme le problème inverse des quadratures, et vice-versa
- La généralité de leurs méthodes va permettre à l'analyse infinitésimale de devenir une branche autonome, indépendante de la géométrie
- Leurs travaux dans ce domaine ne sont pas dénués de considérations métaphysiques (dans le cadre de leurs tentatives de justification du nouveau calcul)

Isaac Newton (1643-1727)



II. La genèse du calcul fluxionnel newtonien



[Source : D. T. Whiteside (ed.), *The mathematical papers of Isaac Newton*, vol. I, 1967, p. 154]

II. Le calcul fluxionnel newtonien

■ Entre 1664 et les années 1690, Newton élabore trois versions du calcul infinitésimal :

1669 – Il communique son *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* à quelques mathématiciens anglais (mais ne le publiera pas avant 1711)

Il y énonce trois règles :

Règle 1 : Si $y = ax^{\frac{m}{n}}$, alors l'aire sous y est $\frac{an}{n+m}x^{1+\frac{m}{n}}$.

Règle 2 : Si y est donné par la somme de plusieurs termes (ou par un nombre infini de termes), alors l'aire sous y est donnée par la somme des aires de tous les termes.

Règle 3 : Pour calculer l'aire sous une courbe $f(x,y) = 0$, il faut exprimer y comme une somme de termes de la forme $y = ax^{\frac{m}{n}}$ et appliquer les règles 1 et 2 [règle fondée sur l'application du binôme de Newton].

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots + x^n$$

II. Le calcul fluxionnel newtonien

1670-1671 – Rédaction du *De methodis serierum et fluxionum* (publié en 1736 !)

Newton définit un algorithme de calcul d'inspiration **cinématique** :

- cet algorithme s'applique à des quantités qui « fluent » au cours du temps (le mouvement d'un point génère une ligne, celui d'une ligne une surface, etc.)
- les quantités générées par ce mouvement sont appelées les « fluentes »

- \dot{x} [
- les vitesses instantanées correspondantes sont appelées « fluxions »
- $\dot{x}o$ [
- les « moments » correspondent aux incréments infiniment petits par lesquels les quantités augmentent au cours de chaque intervalle infinitésimal de temps.

avec o un intervalle infinitésimal de temps (notations introduites par Newton dans le courant des années 1690).

II. Le calcul fluxionnel newtonien

1670-1671 – Rédaction du *De methodis serierum et fluxionum* (publié en 1736 !)

P R O B L E M E I.

Etant donnée la Relation des Quantités Fluents, trouver la Relation de leurs Fluxions.

II. EXEMPLE I. Si la Relation des Quantités Fluents x & y est $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, disposez d'abord les Termes suivant x , & ensuite suivant y , & multipliez-les comme vous voyez.

$$\begin{array}{l}
 \text{Multipliez } x^3 \quad -ax^2 \quad +axy - y^3 \quad | \quad -y^3 \quad +axy - ax^2 \\
 \text{par } \frac{3\dot{x}}{x} \quad \cdot \quad \frac{2\dot{x}}{x} \quad \cdot \quad \frac{\dot{x}}{x} \quad \cdot \quad 0 \quad | \quad \frac{3\dot{y}}{y} \quad \cdot \quad \frac{\dot{y}}{y} \quad \cdot \quad 0 \\
 \hline
 \text{Vous aurez } 3\dot{x}x^2 - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y \quad * \quad | \quad -3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x \quad *
 \end{array}$$

Mais...

Dans le courant des années 1670, Newton prend ses distances avec la « nouvelle analyse » et abandonne le calcul des fluxions « analytique » au profit d'une géométrie des fluxions sans infiniment petits.

II. Le calcul fluxionnel newtonien

1680 (env.) – Newton compose le *Geometrica curvilinea*

Il y introduit la méthode des « première et dernières raisons » et propose, grâce à elle, une reformulation du calcul des fluxions. Les quantités considérées sont géométriques et ne sont plus infinitésimales.

Notion de limite d'un rapport de deux quantités

LEMME PREMIER.

Les quantités & les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.

1687 – Publication des *Principia mathematica philosophiae naturalis*

Les *Principia* contiennent un exposé du calcul des fluxions (le premier à être publié par Newton !) proche de celui du *Geometrica curvilinea*.

1691-1692 – Rédaction du *De quadratura curvarum* (publié en 1704)

Le traité contient une version analytique du calcul exposé dans le *Geometrica curvilinea* et les *Principia*.

II. Le calcul différentiel et intégral leibnizien

✓ « Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus », *Acta Eruditorum*, **octobre 1684**.

- Texte court, elliptique et confus (publié à la hâte par crainte d'une indécatesse de Tschirnhaus)
- Introduction de la différentielle (« differentia ») et de sa notation
- Énoncé des principales règles de la différentiation
- Introduction du quotient dy/dx pour exprimer la pente de la tangente en un point d'une courbe.

✓ « De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum », *Acta Eruditorum*, **juin 1686**.

- Le mémoire traite du problème des quadratures
- Il est inspiré d'un mémoire de John Craig consacré aux quadratures et utilisant la notation différentielle introduite par Leibniz en 1684
- Leibniz y introduit le symbole d'intégration et définit les opérations de « sommation » et de « différentiation » l'une par rapport à l'autre.

II. Le calcul différentiel et intégral leibnizien

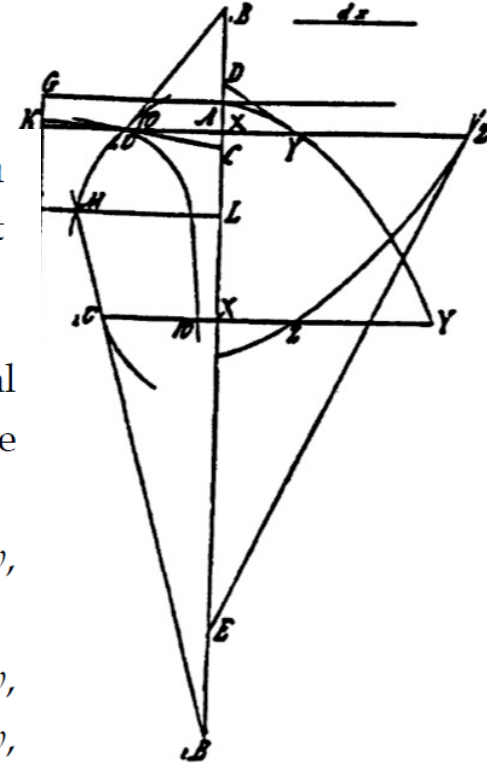
"Appelons alors dx un segment de droite choisi arbitrairement et dv (dw , dy ou dz), c'est-à-dire la différence de v ("differentia") (de w , de y ou de z) un segment qui soit avec dx comme v (w , y ou z) avec XB (XC , XD ou XE)".

"Soit a une constante donnée, da sera égal à 0 et \overline{dax} sera égal à adx . Si y est égal à v (c'est-à-dire toute ordonnée de la courbe YY égale à l'ordonnée correspondante de la courbe VV), dy sera égal à dv .

Maintenant l'Addition et la Soustraction : si $z - y + w + x$ est égal à v , $\overline{dz - y + w + x}$ ou dv sera égal à $dz - dy + dw + dx$.

Multiplication : \overline{dxv} est égal à $x dv + v dx$, c'est-à-dire, en posant y égal à xv , on aura dy égal à $x dv + v dx$. Car on a tout loisir d'employer, soit l'expression xv , soit à sa place pour abrégé, une lettre, par exemple y . Remarquons que dans ce calcul, x et dx sont traités de la même façon, de même que y et dy , ou toute autre lettre indéterminée et sa différentielle. Remarquons également que la démarche inverse, à partir de l'équation différentielle, n'est pas toujours possible, si ce n'est avec une certaine précaution dont nous parlerons ailleurs.

Ensuite, la Division : $d \frac{v}{y}$ ou (en posant z égal à $\frac{v}{y}$) dz est égal à $\frac{\pm v dy \mp y dv}{yy}$



II. La polémique sur l'invention du nouveau calcul

- ✓ La querelle est initiée par Nicolas Fatio de Duillier, proche de Newton, dans son *Linea brevissimi descensus investigatio geometrica* (1699) :
 - « Convaincu par l'évidence des faits, je reconnais que Newton fut le premier et de plusieurs années le plus ancien inventeur de ce calcul. »
- ✓ Excessivement longue et violente, elle implique de nombreux proches des deux savants et gagne le terrain des mathématiques en 1713, suite à l'implication de Jean Bernoulli par Leibniz, qui répondait lui-même à une accusation de plagiat émanant de John Keill, proche de Newton (en 1711).
- ✓ Un comité de la Royal Society est nommé pour arbitrer la dispute. Il tranche en faveur de Newton, qui préside l'institution depuis 1703 et rédige lui-même le compte-rendu (publié de façon anonyme en 1715) :
 - « Il faut [...] qu'il [Leibniz] renonce au droit qu'il prétend avoir à la méthode différentielle de M. Newton en tant que second inventeur : les seconds inventeurs n'ont pas de droit ».
- ✓ Elle finit par prendre des accents nationalistes, s'élargit aux newtoniens s'opposant au leibniziens puis aux Britanniques contre les Continentaux...

III. La diffusion du calcul leibnizien

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)



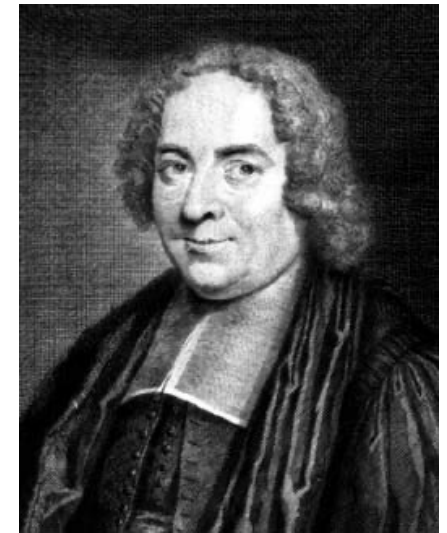
Jacques Bernoulli (1654-1705)



Jean I Bernoulli (1667-1748)



Guillaume de l'Hospital (1661-1704)



Pierre Varignon (1654-1722)

III. Les premiers pas du calcul différentiel et intégral en Europe

- Dans une lettre du 15 décembre 1687, Jacques Bernoulli demande des précisions à Leibniz sur son nouveau calcul.
- Leibniz, en voyage en Allemagne, en Autriche et en Italie, met trois ans à répondre... Jacques Bernoulli, de même que son frère Jean, s'initient donc seuls entre 1687 et 1690.

Jacques Bernoulli
(1654-1705)



Jean I Bernoulli
(1667-1748)



- En contact étroit, Leibniz, Jacques et Jean Bernoulli appliquent le nouveau calcul à différents problèmes lancés sous forme de défis (d'abord aux cartésiens par Leibniz, puis à la communauté savante en général par l'un des trois géomètres).
- Les trois savants sont rejoints par le Marquis Guillaume de l'Hospital après son initiation au nouveau calcul par Jean Bernoulli à l'occasion du voyage de ce dernier à Paris à l'hiver 1691-1692.

III. L'introduction du calcul à l'Académie royale des sciences de Paris

✓ Guillaume de l'Hospital entre à l'Académie des sciences de Paris en juin 1693. En mai et août 1693, puis en juin 1694, il soumet trois mémoires utilisant – sans les détailler – les méthodes du calcul leibnizien.

✓ En juin, juillet, septembre et novembre 1695, Pierre de Varignon fait la lecture de quatre mémoires utilisant le nouveau calcul.

A N A L Y S E
D E S
I N F I N I M E N T P E T I T S,
Pour l'intelligence des lignes courbes.

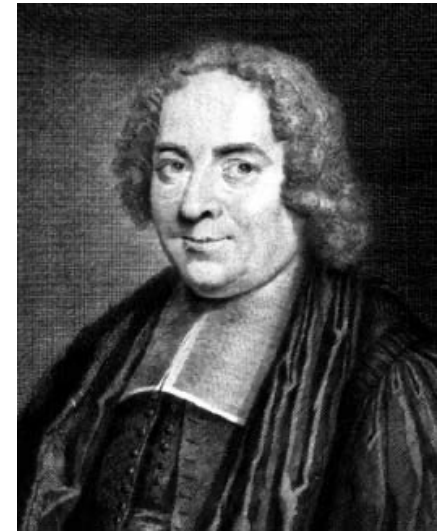


✓ En juin 1696, Guillaume de l'Hospital publie le premier traité de calcul différentiel : *l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*.

✓ Suite à cette parution, Sauveur présente le même mois le nouveau calcul devant l'Académie.

989 · A P A R I S,
D E L' I M P R I M E R I E R O Y A L E.
M. D C. X C V I.

Guillaume de l'Hospital
(1661-1704)



Pierre Varignon
(1654-1722)



III. Les résistances de l'Académie de Paris à l'introduction du nouveau calcul

- ✓ En février 1697, Philippe de La Hire (1640-1718) présente un court mémoire intitulé « Remarque sur l'usage qu'on doit faire de quelques suppositions dans la méthode des infiniment petits » :
 - sans précautions, la « méthode des infinis » peut conduire à des erreurs
 - la « géométrie ordinaire » (ou « géométrie des anciens ») demeure un garde fou nécessaire.
- ✓ D'autres savants partagent les doutes de Philippe de La Hire, en particulier l'abbé Bignon, le père Gouye, l'abbé Gallois et Michel Rolle.
- ✓ Le 6 août 1697, Varignon écrit à Jean Bernoulli :

« M. le Marquis de l'Hospital est encore à la campagne de sorte que je me trouve seul ici chargé de la défense des infiniment petits, dont je suis le vray martyr tant j'ay desja soutenu d'assauts pour eux contre certains mathématiciens du vieux stile, qui chagrins de voir que par ce calcul les jeunes gens les attrapent et même les passent, font tout ce qu'ils peuvent pour la décrier, sans qu'on puisse obtenir d'eux d'écrire contre ».

III. Les résistances de l'Académie de Paris à l'introduction du nouveau calcul

- ✓ Le 17 juillet 1700, le débat débute avec la lecture d'un mémoire de Michel Rolle critiquant le manque de rigueur des concepts et principes fondamentaux du calcul différentiel et intégral leibnizien.
- ✓ En l'absence du Guillaume de l'Hospital, Pierre Varignon prend la défense du nouveau calcul et répond à Rolle dans un mémoire présenté les 7 et 11 août 1700.
- ✓ Dans quatre autres mémoires, Michel Rolle tente de montrer, à partir de l'étude de plusieurs exemples de courbes, que le nouveau calcul conduit à l'erreur...

*Registres
manuscrits des
procès-verbaux
de l'Académie
royale des
sciences de
Paris, t. 20, f.
183 r° - v°
(séance du 21
mai 1700)*

*Le Président a réglé que desormais M.
Rolle donneroit ses Objections contre les
Inf. petites simplement avec leurs démonstrations
sans aucun autre Discours, et que M.
Varignon y répondroit de même.*

III. Les résistances de l'Académie de Paris à l'introduction du nouveau calcul

✓ Les trois difficultés soulevées par Michel Rolle contre le nouveau calcul dans son premier mémoire du 17 juillet 1700 (d'après la réponse de Varignon) :

- « **Difficulté I.** Si en geometrie il y a des infiniment grands, infinis les uns des autres ; et des infiniment petits, infiniment les uns des autres ».



« L'Analyse ordinaire ne traite que des grandeurs finies : celle-ci pénètre jusques dans l'infini même. Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies ; elle découvre les rapports de ces différences : et par là elle fait connoître ceux des grandeurs finies qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini : car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisiemes, quatriemes, et ainsi de suite, sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'infini ; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis. »

(Guillaume de l'Hospital, *Analyse des infiniment petits*, préface, p. 1-2)

- « **Difficulté II.** Si une grandeur plus ou moins sa différentielle, peut estre prise pour egale a cette même grandeur » $[x + dx = x]$
- « **Difficulté III.** Si les différentielles sont des zéros absolus ».

III. L'algorithmisation de la science du mouvement

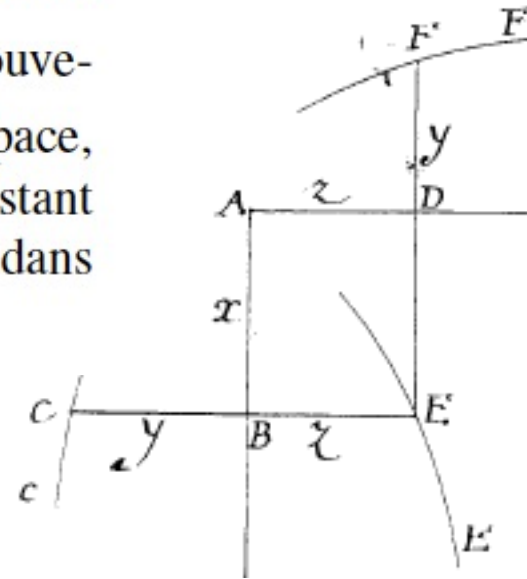
✓ Dans deux mémoires présentés les 5 juillet et 6 septembre 1698, Pierre Varignon élabore le concept de « vitesse dans chaque instant » :

« Pour le voir (tous les angles rectilignes de la figure qu'on voit icy, etant droits) soient $AB = x$ les espaces parcourus en quelque sens qu'on voudra, $BE = z$ les temps employez à les parcourir, et $BC = y = DF$ les vitesses à chaque point B de ces espaces.

[...]

De sorte que cette vitesse (y), dans chaque instant pouvant être regardée comme uniforme, a cause que $y \pm dy = y$, la notion seule des vitesses uniformes donnera $y = \frac{dx}{dz}$ pour la regle de tous les mouvements variés comme on voudra, c'est à dire quelque rapport d'espace, de temps, ou de vitesse, qu'on suppose ; la vitesse de chaque instant étant toujours et par tout égale au quotient de l'espace parcouru dans chaque instant divisé par cette même différentielle de temps. »

(Registres manuscrits des procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris, t. 17, f. 298 v^o - 299 r. [« 1^{er} mémoire »])



III. Le nouveau calcul appliqué à des problèmes mécaniques

- A partir des années 1690, les rares savants initiés au nouveau calcul (Leibniz, Jean Bernoulli, Jacques Bernoulli, Guillaume de l'Hospital et Varignon) se soumettent différents problèmes sous forme de défis par l'intermédiaire de journaux, de périodiques, ou dans le cadre de leur correspondance (Huygens y participe aussi le plus souvent, mais sans utiliser le calcul différentiel et intégral, auquel il reste réfractaire).
- Une large part de ces problèmes a pour objet la détermination de trajectoires décrites, sous certaines conditions, par des corps en mouvement :
 - le problème de la **courbe isochrone** : détermination de l'équation de la courbe suivie par un corps décrivant des espaces égaux en des temps égaux.
 - le problème de la **courbe brachystochrone** : détermination de l'équation de la courbe décrite entre deux points dans le temps le plus bref par un corps soumis à la pesanteur.
 - le problème de la **caténaire** ou de la « **chaînette** » : détermination de la courbe formée par un fil suspendu à ses extrémités et soumis à la pesanteur (donc à son propre poids, réparti de façon uniforme).
 - le problème de la **tractrice** (courbes aux tangentes égales), etc.

III. Le nouveau calcul appliqué à des problèmes mécaniques

Le problème de la courbe isochrone

- En septembre 1687, Leibniz lance un défi aux cartésiens :

« Trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descend uniformément, et approche également l'horizon en temps égaux. L'Analyse de Messieurs les cartésiens le donnera peut-être aisément. »

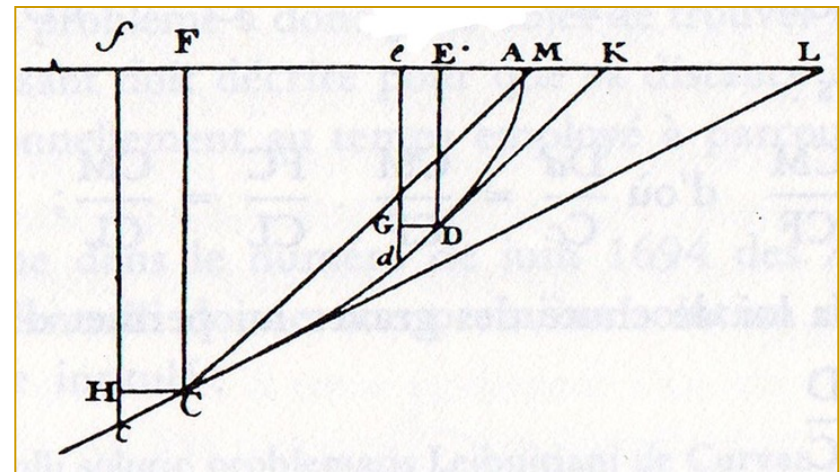
(*Nouvelles de la République des Lettres*, 1687, p. 956)

- Octobre 1687 : publication d'une première solution par Christiaan Huygens ne faisant pas usage du calcul différentiel et intégral.

- Avril 1689 : Leibniz publie sa solution mais n'y a pas explicitement recours au nouveau calcul.

- Mai 1690 : solution de Jacques Bernoulli (1^{ère} apparition du terme « intégration »)

- 1690 [?] : solution de Jean Bernoulli



Solutions en deux parties :

- 1^{ère} partie : le problème physique est ramené à un problème de géométrie
- 2^e partie : résolution de ce problème grâce au calcul différentiel et intégral.

III. Le nouveau calcul appliqué à des problèmes mécaniques

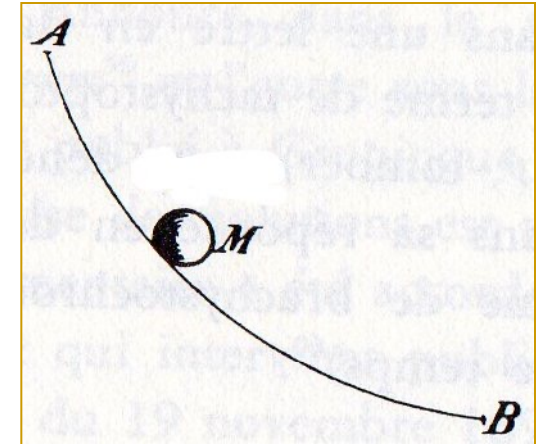
Le problème de la courbe brachystochrone

- En juin 1696, Jean Bernoulli lance un nouveau défi :

« Datis in plano verticali duobus punctis A et B, assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B. »

(*Acta Eruditorum*, juin 1696, p. 269)

- Dans sa lettre du 16 juin 1696, Leibniz fait parvenir une solution à Jean Bernoulli.
- Publication des solutions de Jacques Bernoulli, Jean Bernoulli et Guillaume de l'Hospital dans le numéro de mai 1697 des *Acta Eruditorum*.
- Toujours des solutions obtenues en deux étapes :
 - 1^{ère} étape : le problème physique est ramené à un problème de géométrie
 - 2^e étape : résolution de ce problème grâce au calcul différentiel et intégral.



*La courbe cherchée
est un arc de
cycloïde...*



N^o. CIII.

REMARQUES

SUR CE QU'ON A DONNÉ JUSQU'ICI DE
SOLUTIONS DES PROBLEMES SUR LES ISOPERIMETRES;

*Avec une nouvelle méthode courte & facile de les résoudre sans
calcul, laquelle s'étend aussi à d'autres Problèmes qui ont
raport à ceux-là.*

Par M^r. Jean BERNOULLI, Professeur à Bâle. *

III. La première définition du concept de fonction, par Jean Bernoulli (1718)

LÈs curieux du progrès de la sublime Géométrie peuvent se ressouvenir, qu'il y a environ vingt ans qu'ayant proposé le problème de la *Brachystochrone*, ou de la courbe de la plus vite descente, mon Frère me proposa la question des *Isopérimètres*, laquelle fut long-tems débatus entre nous deux. Ce que cette contestation a produit se trouve dans les *Actes de Leipsick* de 1700, pag. 261, de 1701, pag. 213, † & dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* de 1706, pag. 304. † Voyez aussi la pag. 67 du Livre de Mr. TAYLOR, intitulé *Methodus Incrementorum directa & inversa*.

Mémoires de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris. 1718. pag. 100. Edit. de Paris. pag. 123. Edition de Hollande.

Je résolus cette question des *Isopérimètres* en deux manières différentes; & pour raisons que j'avois alors, j'en tins la solution secrète sans la faire voir à d'autres qu'à l'Illustre Mr. LEIBNITZ, [dont le monde savant pleure encore la mort,] à qui je la communiquai d'abord, & qui me marqua l'approuver; ce qu'il a assuré encore quelque part. Au commen-

G g 2 cement

* La même Piece se trouve en latin dans les *Act. Erud. Lips.* 1718 Janv. pag. 16. & Fevr. pag. 74. † N° præced. ‡ Ci-dessus N°. LXXV. pag. 424. Tom. I.

DEFINITION.

On appelle ici *Fonction* d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable & de constantes.

PROBLEME I.

Entre une infinité de Courbes de même longueur, comprises entre les mêmes points B, C, en trouver une BaeC telle que les semblables fonctions quelconques de ses ordonnées aN, eS, CT &c. fassent un plus grand ou un plus petit, qui soit une aire BMLÉT résultante de ce que le prolongement vers M, L, E, &c. de ces ordonnées a N, eS, CT, &c. lui en produit d'autres NM, SL, TE, &c. semblablement composées chacune de chaque correspondante de celles-là, & de constantes: tellement, dis-je, qu'il en résulte une aire BMLÉT, qui soit la plus grande ou la plus petite de tout ce qui s'en peut former de cette manière.

TAB.
XXXII.
Fig. 2.