Méthodes mathématiques pour l'ingénieur

Ecole Polytechnique Universitaire - Génie Mécanique GM3A

Année 2007-08

L. Mazliak

16 mars 2008

Table des matières

Les notes de cours qui suivent concernent une initation à quelques notions fondamentales de l'analyse mathématique : la transformation de Fourier, la transformation de Laplace, les séries numériques et les séries de Fourier et l'intégration dans le champ complexe.

1 Transformation de Fourier

Motivation : Elle permet (entre autres) de calculer explicitement les solutions d'une classe assez large d'équations différentielles posées sur l'espace tout entier ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, etc.) en suivant le schéma ($\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier) :

$$\text{Équation diff.} \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Équation plus simple} \rightarrow \text{solution} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \text{solution de l'eq. initiale.}$$

1.1 Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit $f : I\!R \times I\!R \to I\!R$ une fonction continue.

Définition 1.1 *On dit que f est dominée sur $[a,b]$ s'il existe une fonction $g : I\!R \to I\!R^+$ telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt < \infty$ et $\mid f(t,x) \mid \leq g(t), \forall x \in [a,b]$.*

On a alors la proposition suivante que nous admettrons.

Proposition 1.2 *Soit $f : I\!R \times I\!R \to I\!R$ une fonction continue et dominée sur $[a,b]$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_{I\!R} f(t,x)dt$ pour $x \in [a,b]$.*

a) F est définie sur $[a,b]$ et continue sur $[a,b]$.

b) Supposons que pour tout $(t,x) \in I\!R \times [a,b]$, $\dfrac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ existe, soit continue en (t,x) et soit dominée sur $[a,b]$.

Alors F est dérivable et

$$F'(x) = \int_{I\!R} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)dt, \forall x \in [a,b].$$

Regardons l'exemple suivant : soit $f(t,x) = e^{-t^2 x}$. Pour $x \in [a,b], 0 < a < b$, $\mid e^{-t^2 x} \mid \leq e^{-t^2 a}$. Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 a}dt < \infty$ et $(t,x) \mapsto e^{-t^2 x}$ est continue, sur $[a,b]$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 x}dt$ existe et est continue.

Par ailleurs, $\dfrac{\partial}{\partial x} e^{-t^2 x} = -t^2 e^{-t^2 x}$. Si $x \in [a,b]$,

$$\mid \frac{\partial}{\partial x} e^{-t^2 x} \mid \leq t^2 e^{-t^2 a}.$$

Or, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2 a}dt < \infty$ (le vérifier !). Donc, F est dérivable sur $[a,b]$ et $F'(x) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2 x}dt$.

Définition 1.3 *a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la* **transformée de Fourier de f en** *$u \in \mathbb{R}$ est définie par*

$$\boxed{(\mathcal{F}f)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ut} f(t)dt}$$

b) L'application $(\mathcal{F}f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est appelée la **transformée de Fourier de** *f*

c) L'application $f \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}f$ est appelée la **transformation de Fourier***.*

Remarques :
1. $\mathcal{F}f$ est définie sur tout $\mathbb{R}$ car $\mid f(t)e^{-2i\pi tx} \mid \leq \mid f(t) \mid$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse.
2. La courbe représentative de $|\mathcal{F}f|$ est appelée *spectre* de f.

3. Une fonction f périodique non nulle n'étant pas intégrable sur $\mathbb{R}$, on utilise dans cette situation les séries de Fourier que nous verrons ultérieurement dans la Section 4.

4. La transformation de Fourier s'étend à des fonctions plus générales, pas forcément intégrables sur $\mathbb{R}$. C'est le cas par exemple des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, de l'impulsion de Dirac en zéro (notée δ_0), des fonctions constantes, etc. Cette extension n'est pas traitée dans ces notes.

Proposition 1.4 (Propriétés de $\mathcal{F}f$) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors*
(1) $\mathcal{F}f$ est continue sur $\mathbb{R}$,
(2) $(\mathcal{F}f)(u) \to 0$ lorsque $|u| \to \infty$.

Démonstration. (1) On utilise la Proposition 1.2.

(2) Nous nous limitons à la démonstration dans le cas où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe C^1 à support compact et nous admettrons le cas général qui provient du fait que toute fonction intégrable peut être raisonnablement approximée par une telle fonction.

Si g est donc C_1 à support compact, une intégration par parties montre que pour $u \neq 0$,

$$(\mathcal{F}g)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ut} g(t)dt = \frac{1}{i2\pi u} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ut} g'(t)dt.$$

On en déduit que lorsque $|u| \to \infty$, $(\mathcal{F}g)(u) \to 0$.

□

1.2 Propriétés de $\mathcal{F}$

Proposition 1.5 *Soit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrables, $F = \mathcal{F}f$, $G = \mathcal{F}g$. Alors*

$$c_1 f + c_2 g \xrightarrow{\mathcal{F}} c_1 F + c_2 G \qquad (\mathcal{F} \text{ est linéaire}) \tag{1}$$

$$f(\frac{t}{a}) \xrightarrow{\mathcal{F}} |a|F(at) \qquad (\text{changement d'échelle}) \tag{2}$$

$$f(t+a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{i2\pi au} F(u) \qquad (\text{translation de } f \Rightarrow \text{déphasage (modulation) de } F) \tag{3}$$

$$e^{i2\pi at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u-a) \qquad (\text{modulation de } f \Rightarrow \text{translation de } F) \tag{4}$$

$$\overline{f} \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{F(-u)} \qquad (\text{conjugaison}) \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Démonstration. Ces propriétés viennent directement de la définition de la transformation de Fourier.

□

Une des propriétés les plus importantes de la transformation de Fourier est qu'elle permet de transformer une opération intégrale compliquée, la convolution, en un simple produit.

Définition 1.6 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, c'est à dire telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} | f(t) | dt < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} | g(t) | dt < \infty$. On appelle* convolée *de f et g la fonction*

$$\boxed{(f * g)(t) \overset{déf}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds = (g * f)(t).}$$

Notons que $f * g$ est bien définie puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid\mid g(x-t) \mid dt) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid (\int_{-\infty}^{+\infty} \mid g(x-t) \mid dx) dt \text{ (par Fubini car tout est positif)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid (\int_{-\infty}^{+\infty} \mid g(u) \mid du) dt < \infty$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid\mid g(x-t) \mid dt < \infty$ et donc (convergence absolue) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$ est convergente.

On a alors

Proposition 1.7

$$f * g \xrightarrow{\mathcal{F}} FG \text{ et } fg \xrightarrow{\mathcal{F}} F * G \qquad \textit{(convolution et produit)} \qquad (7)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}(f * g))(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t) e^{-2i\pi tx} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) du) e^{-2i\pi tx} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) (\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u) e^{-2i\pi tx} dt) du \text{ (par Fubini)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi ux} (\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u) e^{-2i\pi (t-u)x} dt) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi ux} (\int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{-2i\pi vx} dv) du.
\end{aligned}$$

□

Enfin, on a les trois propriétés suivantes que nous admettrons (en notant quand même que la troisième est conséquence directe de la deuxième).

Proposition 1.8

$$(\mathcal{F}(\mathcal{F}f))(u) = f(-u) \qquad \textit{(reciprocité)} \qquad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\overline{G(u)} du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt \qquad \textit{(conservation du produit scalaire)} \qquad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \qquad \textit{(Parseval)} \qquad (10)$$

1.3 Exemples fondamentaux

Proposition 1.9 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, et χ_A la fonction indicatrice de l'ensemble A (c'est-à-dire que $\chi(t) = 1$ si $t \in A$, $\chi(t) = 0$ si $t \notin A$). Alors*

$$b\chi_{]-a,a[} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2ab\frac{\sin(2\pi au)}{2\pi au} \tag{11}$$

$$(1 - |t|)\chi_{]-1,1[}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2 \tag{12}$$

$$e^{-|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{1 + (2\pi u)^2} \tag{13}$$

$$t^n e^{-t}\chi_{]0,\infty[}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{n!}{(1 + i2\pi u)^{n+1}} \tag{14}$$

$$e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\pi u^2} \tag{15}$$

$$\delta_0 \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \tag{16}$$

$$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta_0 \tag{17}$$

Démonstration.

(i) Les quatre premiers exemples découlent d'un calcul direct. À titre d'exemple, calculons la transformée de Fourier de $b\chi_{]-a,a[}$ en $u \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(b\chi_{]-a,a[})(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ut} b\chi_{]-a,a[}(t)dt \\
&= b\int_{-a}^{a} e^{-i2\pi ut}dt = \frac{b}{-i2\pi u}(e^{-i2\pi ua} - e^{i2\pi ua}) \\
&= \frac{b}{\pi u}\frac{e^{i2\pi ua} - e^{-i2\pi ua}}{2i} = 2ab\frac{\sin(2\pi au)}{2\pi au}.
\end{aligned}$$

Si $u = 0$, on a clairement $\mathcal{F}(b\chi_{]-a,a[})(0) = 2ab$.

(ii) Nous allons maintenant déterminer la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-\pi t^2}$,

$$(\mathcal{F}f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi ut}dt.$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \mid te^{-\pi t^2} \mid dt < \infty$, $(\mathcal{F}f)$ est dérivable et on a

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}f)'(u) &= -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\pi t^2} e^{-i2\pi ut}dt \\
&= -2i\big([-\frac{1}{2}e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi ut}]_{-\infty}^{+\infty} - i\pi u \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi ut}dt\big) \\
&= -2\pi u(\mathcal{F}f)(u).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{F}f$ est solution de l'équation différentielle $y'(u) = -2\pi u y(u)$. En résolvant cette équation, on déduit que $(\mathcal{F}f)(u) = Ke^{-\pi u^2}$, où K est une constante. Comme

$$(\mathcal{F}f)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 1,$$

on obtient

$$(\mathcal{F}f)(u) = e^{-\pi u^2}.$$

(iii) Les deux dernières exemples ne résultent pas de la définition de $\mathcal{F}$ ci-dessus car la masse de Dirac et la fonction constante égale à 1 ne sont pas intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut se convaincre que $\mathcal{F}\delta_0 = 1$ en prenant $a = 1/n$ et

$b = n/2$, avec $n \to \infty$ dans le premier exemple fondamental. Le dernier exemple est obtenu grâce à la propriété de réciprocité ($\mathcal{F}1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}\delta_0) = \delta_0$ car δ_0 est paire).

$\square$

Exercices.

1. En utilisant la formule de reciprocité ci-dessus, montrer que

$$\begin{aligned}
\frac{\sin t}{t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\chi_{]-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}[} \\
\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 &\xrightarrow{\mathcal{F}} \pi(1-|\pi u|)\chi_{]-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}[}(u) \\
\frac{1}{1+t^2} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \pi e^{-|2\pi u|} \\
\frac{n!}{(1+iu)^{n+1}} &\xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^{n+1}(-2\pi u)^n e^{2\pi u}\chi_{]-\infty,0[}(u)
\end{aligned}$$

2. Calculer les transfomées de Fourier des fonctions suivantes :

$$e^{-2|t|},\ e^{-\pi t^2},\ e^{-t^2}\sin t,\ \chi_{]1,3[},$$

en se ramenant aux exemples fondamentaux ci-dessus.

3. Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes

a. $f(x) = 1$ si $a < x < b$ et 0 sinon. Que devient le résultat lorsque $b = -a$?
b. $f(x) = x$ si $0 < x < a$
c. $f(x) = -1$ si $-a < x < 0$, 1 si $0 < x < a$ et 0 sinon.
d. $f(x) = e^{-kx}, x > 0$ et 0 sinon (k constante strictement positive)
e. $f(x) = x^2, 0 < x < 1$ et 0 sinon.

1.4 Transformation inverse

Étant donné une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on cherche à déterminer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\mathcal{F}f = F$. Naturellement, cela n'est pas toujours possible. Néanmoins, la formule de réciprocité ci-dessus montre que :

Théorème. $\mathcal{F}$ est injective : $\boxed{\mathcal{F}f = \mathcal{F}g \Rightarrow f = g}$

Remarque : Ce théorème montre que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ admet une inverse $\mathcal{F}^{-1}$: si $\mathcal{F}f = F$, alors $f = \mathcal{F}^{-1}F$.

Comment calculer la transformée inverse d'une fonction donnée F ? Le résultat général est donné par la proposition suivante que nous admettrons.

Proposition 1.10 Formule générale d'inversion de Fourier *: Si F est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ut} F(u)du.$$

En pratique, étant donné F, il s'agit donc de calculer explicitement cette intégrale, ce qui est souvent délicat. Pour une classe assez large de fonctions F, on peut se ramener aux exemples fondamentaux.

1.5 Résolution des équations différentielles

La transformation de Fourier permet de résoudre explicitement une équation différentielle linéaire en la transformant en une équation plus simple. Par exemple, si l'équation du départ est *à coefficients constants*, la transformée de Fourier de cette équation est une équation algébrique. La transformation de Fourier est à utiliser lorsque équation est posée sur tout $\mathbb{R}$. Si les données de l'équation sont périodiques, on utilise plûtot les *séries de Fourier* (voir Section 4). Si l'équation est posée sur une demi-droite (avec conditions initiales pour la solution recherchée), on utilise plûtot la *transformation de Laplace* (voir Section 2).

Pour la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants, on utilise les propriétés suivantes de la transformation de Fourier :

Proposition 1.11 *Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrables, $f \xrightarrow{\mathcal{F}} F$, $g \xrightarrow{\mathcal{F}} G$ et $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Alors*

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &\xrightarrow{\mathcal{F}} (i2\pi u)F(u) \\
\frac{d^2f}{dt^2} &\xrightarrow{\mathcal{F}} (i2\pi u)^2F(u) = -4\pi^2u^2F(u), \\
\frac{d^3f}{dt^3} &\xrightarrow{\mathcal{F}} (i2\pi u)^3F(u) = -i8\pi^3u^3F(u), \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Démonstration. Utiliser la définition de $\mathcal{F}$ et la formule d'intégration par parties.

$\square$

Lorsque les coefficients de l'équation différentielle dépendent de t de facon linéaire (voire polynômiale), on utilise également la

Proposition 1.12 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable, $f \xrightarrow{\mathcal{F}} F$. Alors*

$$\begin{aligned}
tf(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{i}{2\pi}\frac{dF}{du}(u), \\
t^2f(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} = (\frac{i}{2\pi})^2\frac{d^2F}{du^2}(u) = -\frac{1}{(2\pi)^2})\frac{d^2F}{du^2}(u), \\
t^3f(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} (\frac{i}{2\pi})^3\frac{d^3F}{du^3}(u) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{d^3F}{du^3}(u), \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Démonstration. Utiliser la définition de $\mathcal{F}$, la formule $te^{-i2\pi ut} = \frac{i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial u}(e^{-i2\pi ut})$, et les propriétés des intégrales dépendant d'un paramètre (voir l'Appendice).

$\square$

Exercice corrigé. Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$-\frac{d^2f}{dt^2}(t) + f(t) = e^{-t^2},\ t \in \mathbb{R}.$$

Preuve. La transformée de Fourier de l'équation ci-dessus s'écrit

$$4\pi^2u^2F(u) + F(u) = \mathcal{F}(e^{-t^2})(u).$$

où l'inconnue est $F = \mathcal{F}f$. On en déduit que $F = \dfrac{1}{1+4\pi^2u^2}\mathcal{F}(e^{-t^2}) = \dfrac{1}{2}\mathcal{F}(e^{-|t|})\mathcal{F}(e^{-t^2})$, la dernière égalité étant une conséquence de $e^{-|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{2}{1+(2\pi u)^2}$ (voir les exemples fondamentaux ci-dessus). Donc

$$F = \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{-|t|} * e^{-t^2}) \Rightarrow f = \frac{1}{2}e^{-|t|} * e^{-t^2},$$

puisque $\mathcal{F}$ est injective (voir le théorème ci-dessus).

2 Transformation de Laplace

Motivation : Elle permet (entre autres) de calculer explicitement les solutions d'une classe assez large d'équations différentielles (couplées eventuellement avec de conditions initiales) en suivant le schéma :

$$\text{Équation diff.} \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{Équation plus simple} \rightarrow \text{solution} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \text{solution de l'eq. initiale.}$$

Définition 2.1 *a) Si* $f :]0,\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction intégrable sur* $]0,\infty[$ *à croissance au plus exponentielle (c'est-à-dire que* $|f(t)| \leq C_f e^{a_f t}$ *pour certaines constantes* $a_f, C_f \in \mathbb{R}$*), alors la* **transformée de Laplace de** f **en** $p \in \mathbb{R}$*, avec* $p > a_f$*, est définie par*

$$\boxed{(\mathcal{L}f)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt}$$

b) L'application $(\mathcal{L}f) : \{p \in \mathbb{R};\ p > a_f\} \rightarrow \mathbb{R}$ *est appelée la* **transformée de Laplace de** f

c) L'application $f \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}f$ *est appelée la* **transformation de Laplace***.*

Remarque : La notation $p = z$ est fréquement utilisée dans d'autres disciplines.

2.1 Propriétés de $\mathcal{L}$

Proposition 2.2 *Soit* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *et* $f, g :]0,\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ *des fonctions intégrables à croissance au plus exponentielle. Alors*

(1) $\mathcal{L}(c_1 f + c_2 g) = c_1(\mathcal{L}f) + c_2(\mathcal{L}g)$ *($\mathcal{L}$ est linéaire)*

(2) $(\mathcal{L}f)(p) \rightarrow 0$ *lorsque* $|p| \rightarrow \infty$ *(comportement à l'infini)*

(3) $\mathcal{L}f$ *est une fonction régulière : sur son domaine de définition, elle est dérivable.*

2.2 Exemple fondamental

Proposition 2.3 *Si* $n \in \mathbb{N}$ *et* $c \in \mathbb{R}$*, alors, pour tout* $p \in \mathbb{R}$ *tel que* $p > c$*,*

$$\boxed{t^n e^{ct} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{(p-c)^{n+1}}.}$$

Remarque : Dans le cas d' exposants non entiers $n > -1$, on montre que la formule reste valable en remplaçant $n!$ par

$$\int_0^\infty s^n e^{-s} ds$$

Démonstration. Prendre $p = x \in \mathbb{R}$ puis intégrer par parties n fois dans la définition de $(\mathcal{L}f)(x)$.

□

Exercice. Calculer les transfomées de Laplace des fonctions suivantes :

$$1,\ t,\ t^2,\ e^t,\ e^{it}, \sin t,\ \cos t,\ (\sin t)^2,\ \operatorname{sh} t,\ \operatorname{ch} t,\ \frac{\sin t}{t},$$

en se ramenant à l'exemple fondamental ci-dessus. Pour la dernière, on pourra utiliser la série de Taylor de $\sin t$.

2.3 Transformation inverse

Étant donné une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on cherche à déterminer $f :]0, t[\to \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{L}f = F$. Naturellement, cela n'est pas toujours possible. Néanmoins, on peut montrer le résultat suivant :

Théorème. $\mathcal{L}$ est injective : $\boxed{\mathcal{L}f = \mathcal{L}g \Rightarrow f = g}$

Remarques : Ce théorème montre que la transformation de Laplace $\mathcal{L}$ admet une inverse $\mathcal{L}^{-1}$: si $\mathcal{L}f = F$, alors $f = \mathcal{L}^{-1}F$.

Contrairement au cas de la transformation de Fourier, il n'y a pas de formule d'inversion très pratique dans le cas général de la transformée de Laplace et nous allons regarder le cas spécifique des fractions rationnelles.

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$, où P, Q sont des polynômes. Nécessairement, on doit exiger que $\deg P < \deg Q$ puisqu'une transformée de Laplace tend vers 0 à l'infini d'après la Proposition 2.2).

– Les **fractions rationnelles simples** :

$$\boxed{\frac{n!}{(p-c)^{n+1}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t^n e^{ct}}$$

– Les **fractions rationnelles générales** $\dfrac{P}{Q}$.

On décompose $\dfrac{P}{Q}$ en une combinaison linéaire des fractions rationnelles simples. Plus précisement, si $Q(p) = (p - c_1)^{k_1} \cdots (p - c_m)^{k_m}$, alors on détermine les constantes A_j, B_j, etc., telles que

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{A_j}{(p-c_j)^{k_1}} + \frac{B_j}{(p-c_j)^{k_1-1}} + ... + \frac{C_j}{(p-c_j)} \right),$$

puis on utilise la linéarité de $\mathcal{L}^{-1}$ pour montrer que $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{P}{Q})$ est une combinaison linéaire de fonctions de type $t^n e^{ct}$.

2.4 Résolution des équations différentielles

La transformation de Laplace permet de résoudre explicitement une équation différentielle linéaire posée sur $[0, \infty[$ en la transformant en une équation plus simple. Par exemple, si l'équation du départ est *à coefficients constants*, la transformée de Laplace de cette équation est une équation algébrique. La transformation de Laplace est particulièrement efficace lorsque l'on veut résoudre une équation avec *conditions initiales* (voir l'exercice corrigé ci-dessous).

Pour ce faire on utilise les propriétés suivantes de la transformation de Laplace :

Proposition 2.4 *Soit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, f, g :$]0, \infty[\to \mathbb{C}$ des fonctions intégrables à croissance au plus exponentielle, $f \xrightarrow{\mathcal{L}} F$, et $g \xrightarrow{\mathcal{L}} G$. Alors*

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &\xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0),\\
\frac{d^2f}{dt^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}} p^2F(p) - pf(0) - \frac{df}{dt}(0),\\
\frac{d^3f}{dt^3} &\xrightarrow{\mathcal{L}} p^3F(p) - p^2f(0) - p\frac{df}{dt}(0) - \frac{d^2f}{dt^2}(0),\\
&\textit{etc.}
\end{aligned}$$

Lorsque les coefficients de l'équation différentielle dépendent de t de facon linéaire (voire polynômiale), on utilise également la

Proposition 2.5 *Soit f :$]0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction intégrable à croissance au plus exponentielle et $f \xrightarrow{\mathcal{L}} F$. Alors*

$$tf(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{dF}{dp}(p).$$

Exercice corrigé. Trouver une fonction $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{aligned}
&2\frac{d^2f}{dt^2}(t) + 3\frac{df}{dt}(t) + f(t) = e^t, \ t > 0,\\
&f(0) = 7 \text{ et } \frac{df}{dt}(0) = -4.
\end{aligned}$$

Preuve. La transformée de Laplace de l'équation ci-dessus s'écrit

$$2\left(p^2F(p) - 7p + 4\right) + 3\left(pF(p) - 7\right) + F(p) = \frac{1}{p-1},$$

où l'inconnue est $F = \mathcal{L}f$. On en déduit que $F(p) = \dfrac{14p^2 - p - 12}{(p-1)(p+1)(2p+1)}$, d'où, en utilisant la transformation inverse, $f(t) = \dfrac{1}{6}e^t + \dfrac{3}{2}e^{-t} + \dfrac{16}{3}e^{-t/2}$.

3 Séries Numériques

Pour commencer, nous allons faire quelques rappels sur les suites convergentes.

3.1 Suites convergentes

Définition 3.1 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels est convergente vers ℓ (ou admet une limite ℓ) si pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang N, c'est à dire pour tout $n \geq N$, on a $-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq \varepsilon$.*

Concrètement, cela signifie que quel que soit l'intervalle qu'on choisit autour de ℓ, aussi petit soit-il, on a u_n dans cet intervalle pour n assez grand.

Exercice 3.2 *Montrer les limites suivantes*

a.
$$\frac{1}{n} \to 0$$
b.
$$\frac{\cos n}{n} \to 0$$
c.
$$a^n \to 0 \text{ où } 0 < a < 1 \text{ (passer par le logarithme)}$$
d.
$$e^{1/n} \to 1$$
e.
$$(1 + \frac{1}{n})^n \to e$$

Conséquence immédiate de la définition, si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, $u_n + v_n \to \ell + \ell'$.

En outre, une remarque importante, c'est qu'une suite convergente est bornée : pour $n \geq N, u_n - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$ et, pour $n \leq N$, de toute façon il n'y a qu'un nombre fini de termes.

Le résultat qui sera la plus important pour nous est le suivant.

Théorème 3.3 *Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels croissante. On suppose que $(x_n)_{n\geq 0}$ est majorée, c'est à dire qu'il existe une constante M telle que pour tout n, $x_n \leq M$. Alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente.*

Nous admettrons la démonstration de ce théorème qui fait appel à la notion de borne supérieure. Ce qu'il est très important de comprendre c'est qu'il s'agit d'un résultat d'existence sans avoir besoin de préciser la limite. On sait juste qu'elle existe.

Exercice 3.4 *a. Montrer que la suite $1 - \frac{1}{n}$ est convergente*

b. Montrer que la suite $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{nn!}$ est convergente (on montrera que u_n est décroissante).

3.2 Notion de série

Une série va simplement être une suite d'un type particulier.

Définition 3.5 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. On pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. u_k est le terme général de la série, s_n s'appelle la n-ième somme partielle de la série des u_k.*

Quand la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ est convergente, on dit que la série est convergente (dans le cas contraire on dit qu'elle est divergente). La limite s'appelle la somme de la série des u_k et on note
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Comme conséquence immédiate de la définition, on a

Proposition 3.6 *Si la série de terme général u_n est convergente, $u_n \to 0$.*

démonstration : Posons $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. On a $u_n = s_n - s_{n-1}$ donc si $s_n \to \ell$, $u_n \to 0$. $\square$

3.2.1 Séries géométriques

Rappelons qu'une suite est dite géométrique si elle est du type a^n où a est une constante réelle fixée.

Lemme 3.7 *Soit $a \in I\!R, a \neq 1$. On a*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

démonstration : Développons

$$(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) = (1+a+a^2+\cdots+a^n) - (a+a^2+\cdots+a^{n+1}) = 1 - a^{n+1} \quad \square$$

<u>remarque</u> Si $a_0 = 1, a^k = 1$ pour tout k. Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = n+1$.

On peut alors énoncer :

Proposition 3.8 *Soit $a \in I\!R, \mid a \mid < 1$. Alors*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

démonstration : $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. Or, $a^{n+1} \to 0$ puisque $\mid a \mid < 1$. Donc $s_n \to \frac{1}{1-a}$. $\square$

Exercice 3.9 *Calculer*

a. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$

b. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\pi^n}$

3.2.2 Théorème de comparaison

L'intérêt de la notion de série c'est qu'elle peut souvent être étudiée en comparant le terme général avec celui d'une autre série dont on connaît le comportement.

Théorème 3.10 *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux séries telles que $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ pour tout n.*

a. Si pour tout $n \geq 0, u_n \leq v_n$ et si la série de terme général v_n est convergente, alors la série de terme général u_n est convergente.

b. Si pour tout $n \geq 0, u_n \leq v_n$ et si la série de terme général u_n est divergente, alors la série de terme général v_n est divergente.

c. Si $u_n \sim v_n$ (au sens où $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$), alors les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

démonstration :

a) Posons $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\tilde{s}_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Il s'agit de deux suites croissantes puisque $u_k \geq 0$ et $v_k \geq 0$. Par hypothèse, $\tilde{s}_n \to \ell$. Donc c'est une suite bornée. Comme $0 \leq s_n \leq \tilde{s}_n$, s_n est aussi bornée donc majorée et de ce fait elle converge

b) Si la série des u_n diverge, comme la suite s_n est croissante, c'est donc que cette suite n'est pas majorée. Alors $\tilde{s}_n$ n'est pas majorée non plus, et la série des v_n est donc divergente.

c) Comme $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$, pour n assez grand on a

$$\frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n.$$

Il suffit alors d'appliquer a) et b). $\square$

3.3 Séries de Riemann

On appelle série de Riemann une série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in I\!R$. On a

Théorème 3.11 *La série des $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

démonstration : Il s'agit de séries à termes positifs, pour lesquelles on pourra donc faire usage des théorèmes de comparaison.

Notons d'abord que si $\alpha \leq 0$, $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers zéro donc la série diverge. Supposons donc que $\alpha > 0$.

Par le théorème des accroissements finis, on peut écrire

$$\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \alpha \sup_{x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]} x^{\alpha-1}.(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

Si $\alpha > 1$, on a donc

$$\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \alpha \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Or, si on vérifie immédiatement que la série de terme général $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ est convergente, puisque

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

D'après le théorème de comparaison, la série converge.

Montrons maintenant que la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente. Si elle était convergente, on aurait $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \ell$. Alors $s_{2n} - s_n \to 0$. Or

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

ce qui est manifestement une contradiction.

Si $0 < \alpha < 1$, $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$, et donc la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est divergente, ce qui conclut la preuve. □

4 Séries de Fourier

Un des outils fondamentaux développés pour l'analyse des phénomènes vibratoires est la décomposition spectrale. Elle consiste en la décomposition des fonctions sur une base composée de fonctions aléatoires élémentaires (en général des exponentielles complexes).

Il existe de multiples cadres qu'on peut donner à cette décomposition suivant les exigences plus ou moins grandes qu'on est prêt à mettre sur la fonction à décomposer. Dans cette partie, et comme première approche, nous allons nous intéresser principalement au cas le plus simple, celui des séries de Fourier où la fonction que l'on décompose est périodique.

Mais avant tout, quelques mots sur l'homme étonnant que fut Fourier.

4.1 Jean Baptiste Joseph Fourier

Né le 21 mars 1768 à Auxerre, Fourier était le neuvième des douze enfants du second mariage d'un père tailleur. Orphelin à 10 ans, il est accueilli par le maître de chant de la Cathédrale d'Auxerre dans une institution scolaire qu'il dirigeait, et montre très tôt un énorme intérêt (et un immense talent...) pour les mathématiques. En 1787, décidé à devenir prêtre, Fourier entre au séminaire de l'Abbaye de Saint-Benoît-sur-Loire. En 1789, il abandonne Saint-Benoît et devient en 1790 professeur à l'Ecole Royale Militaire d'Auxerre. Il est alors passionné par la politique, qui va devenir l'autre grande occupation de sa vie, et devient en 1793 un membre du Comité local révolutionnaire. Au moment de la Terreur, il essaya prudemment de se retirer du jeu mais ne put y arriver tant il était impliqué dans les luttes entre factions rivales. Arrêté en 1794, il ne dût sa survie qu'à la chute de Robespierre.

En 1794, on lui propose d'entrer à la toute nouvelle Ecole Normale de Paris, où il suit les cours de Lagrange, de Laplace et de Monge. Il est ensuite nommé professeur à l'Ecole Polytechnique.

En 1798, il se joint à l'armée de Bonaparte parmi les multiples savants qui accompagnent l'expédition d'Egypte. Fourier fut quelques mois administrateur en Egypte et en profita pour mettre au point des campagnes de fouilles archéologiques et fonder l'Institut du Caire. Après la désastreuse conclusion de l'aventure de Bonaparte en Egypte, Fourier réussit à rentrer en France en 1801 et retrouve son poste de professeur d'Analyse à l'Ecole Polytechnique. Entre temps, Bonaparte, devenu Premier Consul, s'est emparé du pouvoir et décide d'envoyer Fourier prendre la place nouvellement vacante de Préfet de l'Isère.

C'est durant son séjour grenoblois que Fourier mène ses expériences fondamentales sur la propagation de la chaleur dans les corps solides, au sujet de laquelle il envoie en 1807 un mémoire à l'Académie des Sciences où il introduit notamment les développements en séries trigonométriques. Il faut croire que Fourier était un peu trop en avance sur son temps car l'Académie, par la voix de Laplace, Lagrange, Monge et Lacroix réserva alors un accueil mitigé à ce travail. Néanmoins, quand en 1811, l'Académie des Sciences proposa de récompenser un travail sur la propagation de la chaleur, ce fut Fourier qui eut le prix.

A la chute de l'Empire, Fourier essaya prudemment d'adopter une position de neutralité, mais fut rattrapé de nouveau par les événements. Quand Napoléon s'évada de l'île d'Elbe, il essaya cependant de persuader la population grenobloise de s'opposer à son retour et de proclamer sa loyauté à Louis XVIII. Quand Napoléon arriva à Grenoble, Fourier avait pris le large. L'Empereur ne lui en voulut malgré tout pas trop puisqu'il le nomma Préfet du Rhône, d'où Waterloo le délogea...

Fourier revint alors à Paris. Il fut élu en 1817 à l'Académie des Sciences, dont il devint secrétaire. C'est seulement à ce moment, en 1822, que fut publié son mémoire sur la théorie de la chaleur qui allait avoir une énorme influence sur les mathématiques du XIXème siècle. Il mourut à Paris le 16 mai 1830.

4.2 Relations et polynômes trigonométriques

Nous allons maintenant commencer l'étude de la décomposition spectrale par des constats simples sur les fonctions circulaires.

Proposition 4.1 *a) Si m et p sont deux entiers distincts de $\mathbb{N}$ on a*

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\cos(p\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(m\theta)\sin(p\theta)d\theta = 0$$

b) Si m et p sont deux entiers naturels,

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\sin(p\theta)d\theta = 0$$

Démonstration : a) On a $\cos(m\theta)\cos(p\theta) = \frac{1}{2}[\cos((m+p)\theta) + \cos((m-p)\theta)]$.
Donc

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\cos(p\theta)d\theta = \frac{1}{2}(\int_0^{2\pi} \cos((m+p)\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} \cos((m-p)\theta)d\theta].$$

Comme p et m sont dans $\mathbb{N}$ et distincts, $m+p \neq 0$ et $m-p \neq 0$ donc

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\cos(p\theta)d\theta = \frac{1}{2}([\frac{1}{m+p}\sin(m+p)\theta]_0^{2\pi} - [\frac{1}{m-p}\sin(m-p)\theta]_0^{2\pi}) = 0.$$

Le même résultat est obtenu avec sinus en remarquant que $\sin(m\theta)\sin(p\theta) = \frac{1}{2}[\cos(m+p)\theta - \cos(m-p)\theta]$.
b) On a $\cos(m\theta)\sin(p\theta) = \frac{1}{2}[\sin(m+p)\theta + \sin(m-p)\theta]$.
Deux cas se présentent alors.
Si $m \neq p$, on obtient comme précédemment

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\sin(p\theta)d\theta = 0.$$

Si $m = p$, comme $\sin(m-p)\theta = 0$, on a

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\sin(m\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2m\theta)d\theta.$$

Si $m = 0$, cette quantité est clairement nulle. Si $m \neq 0$, elle vaut $\frac{1}{2}\frac{1}{2m}[-\cos(2m\theta)]_0^{2\pi} = 0$. $\square$

Ces simples remarques vont nous donner une piste d'exploration pour la décomposition cherchée. Soit en effet

$$F(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{n} b_k\sin(k\theta)$$

un *polynôme trigonométrique*, les a_k et b_k étant donc des constantes réelles fixées (le fait de prendre comme terme constant $\frac{a_0}{2}$, étrange à première vue, s'expliquera dans la suite). On se pose la question suivante : comment, à partir de la connaissance de F, est-il possible de retrouver la valeur des (a_k) et des (b_k) ?

D'après la Proposition précédente, on a, pour tout entier $1 \leq m \leq n$,

$$\int_0^{2\pi} F(\theta)\cos(m\theta)d\theta =$$

$$\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)d\theta + \sum_{k=1}^{n} a_k\int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\cos(m\theta)d\theta + \sum_{k=1}^{n} b_k\int_0^{2\pi} \sin(k\theta)\cos(m\theta)d\theta =$$

$$a_m\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)^2 d\theta$$

Si $m \geq 1$, $\cos^2(m\theta) = \frac{1}{2}[-\cos(2m\theta) + 1]$ et donc

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta)d\theta = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2m}[\sin(2m\theta)]_0^{2\pi} + 2\pi) = \pi.$$

On a donc

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)F(\theta)d\theta$$

De même , $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)d\theta$ et donc

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)d\theta.$$

On vérifie de la même façon que pour tout $1 \leq m \leq n$,

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\sin(m\theta)d\theta.$$

Naturellement, on constate que les expressions précédentes ont un sens non seulement quand F est un polynôme trigonométrique mais bien plus largement dès que la fonction F est suffisamment régulière pour qu'on puisse définir les intégrales. Typiquement, et c'est le cas où nous nous limiterons ici, on peut prendre F continue par morceaux. Pour simplifier l'exposé, nous allons étudier le cas des fonctions continues ; nous énoncerons ensuite sans démonstration un prolongement au cas où la fonction n'est que continue par morceaux (qui sera le cas important dans la pratique). Il ne réclame en fait que quelques petits ajustements techniques et le lecteur intéressé est invité à se reporter à l'un des innombrables livres qui traitent en détail de la théorie des séries de Fourier.

4.3 Coefficients de Fourier

Soit F une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on pourrait la prendre d'ailleurs sans problème à valeurs dans $\mathbb{C}$), 2π-périodique.

On a alors

Définition 4.2 *Pour tout $m \geq 0$, on pose*

$$\boxed{a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\cos(m\theta)d\theta}$$

et pour tout $m \geq 1$

$$\boxed{b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\sin(m\theta)d\theta.}$$

Les coefficients $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ s'appellent les coefficients de Fourier de la fonction F. La série de Fourier formelle de F est

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\theta)d\theta.}$$

Remarques : (i) On a donc vu dans la partie précédente que si F est un polynôme trigonométrique, F coïncide avec sa série de Fourier.

(ii) Il faut bien comprendre que l'expression de la série de Fourier formelle ne préjuge en rien de la convergence de la série en question. Il s'agit véritablement d'une expression formelle et les problèmes de convergence forment d'ailleurs l'essentiel du travail que nous allons fournir par la suite.

La forme intégrale des coefficients de Fourier leur donne une série de propriétés que nous évoquons maintenant.

Proposition 4.3 *Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et 2π-périodique. On note (a_k) et (b_k) ses coefficients de Fourier.*

a) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(\theta) \cos(k\theta) d\theta$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(\theta) \sin(k\theta) d\theta.$$

b) Si F est une fonction paire, on a $b_k = 0, \forall k \geq 1$. Si F est une fonction impaire, on a $a_k = 0, \forall k \geq 0$.

Démonstration : a) Cela résulte de la 2π-périodicité des fonctions $\theta \mapsto F(\theta)\cos(k\theta)$ et $\theta \mapsto F(\theta)\sin(k\theta)$.

b) Si F est paire, on a $\theta \mapsto F(\theta)\sin(k\theta)$ impaire. Or

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) \sin(k\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} (\int_{0}^{\pi} F(\theta) \sin(k\theta) d\theta + \int_{-\pi}^{0} F(\theta) \sin(k\theta) d\theta) =$$

$$= \frac{1}{\pi} (\int_{0}^{\pi} F(\theta) \sin(k\theta) d\theta - \int_{0}^{\pi} F(u) \sin(ku) du) = 0$$

où on a fait le changement de variable $u = -\theta$ et utilisé $F(-u)\sin(-ku) = F(u)\sin(ku)$.

La propriété pour F impaire se démontre de même. □

Une autre propriété importante que nous admettrons concerne la convergence des coefficients de Fourier.

Proposition 4.4 *(Lemme de Riemann-Lebesgue) Si F est continue sur $[a, b]$,*

$$\boxed{\lim_{r \to +\infty} \int_{a}^{b} F(\theta) \cos(r\theta) d\theta = \lim_{r \to +\infty} \int_{a}^{b} F(\theta) \sin(r\theta) d\theta = 0.}$$

On a alors immédiatement le :

Corollaire 4.5 *Pour toute fonction F continue sur $[a, b]$ de coefficients de Fourier (a_k) et (b_k), on a*

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k = 0.}$$

Notons que ceci montre que la série de Fourier formelle de F est candidate à converger. On a le résultat suivant que nous admettrons

Théorème 4.6 *(Dirichlet) Soit F une fonction continue 2π-périodique et dérivable à droite et à gauche en tout point de $\mathbb{R}$.*

Alors la série de Fourier formelle de F converge en tout point $t_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\boxed{F(t_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt_0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt_0).}$$

Comme annoncé plus haut, on peut, au prix d'un petit effort technique, généraliser le résultat précédent aux fonctions continues par morceaux. Introduisons d'abord une définition.

Définition 4.7 *Soit F une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, admettant en tout point des limites à droite et à gauche (F n'a que des discontinuités de première espèce). On appelle régularisée de F la fonction $\overline{F}$ définie par*

$$\overline{F}(t) = \frac{F(t+) + F(t-)}{2}.$$

On a alors

Théorème 4.8 *Si F continue par morceaux et 2π-périodique, admet en tout point des limites à droite et à gauche et est telle que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la fonction*

$$h \mapsto \frac{F(t_0+h)+F(t_0-h)-F(t_0^+)-F(t_0^-)}{h}$$

soit bornée, alors la série de Fourier formelle de F converge en tout t_0 vers $\overline{F}(t_0)$.

Exercice 4.9 *Dans les quatre cas suivants, trouver l'expression de la série de Fourier formelle de la fonction f après en avoir tracé rapidement le graphe. Etudier la convergence*
a) $f(\theta) = \mid \sin(\theta) \mid$
b) $f(\theta), 2\pi$-périodique, $f(0) = f(2\pi) = 0$ et

$$f(\theta) = \frac{\pi - \theta}{2}, 0 < \theta < 2\pi.$$

c) f 2π-périodique ,

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \theta - \frac{3\pi}{2}, & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

d) $f(\theta) = \theta^2, -\pi \leq \theta \leq \pi, 2\pi$-périodique. Déduire $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

5 Eléments sur le théorème des résidus

5.1 Généralités

Si une fonction f est de classe C^n sur un intervalle $]-R, R[$, on peut écrire f sous la forme d'un développement limitéde Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

où $o(x^n)$ désigne une fonction telle que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$.

Dans certaines conditions, il est possible en quelque sorte de généraliser cette écriture et de considérer des fonctions qui vont pouvoir se décomposer en *série* de Taylor sous la forme suivante

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

On dit que f est développable en série entière sur $]-R, R[$. La théorie qui s'occupe de ce type de fonctions est celle des fonctions analytiques. Nous n'avons absolument pas le temps d'aborder ce vaste thème ici, et nous allons en voir uniquement un petit (mais important) aspect à savoir le théorème des résidus qui permet de calculer certaines intégrales.

Commençons par une définition.

Définition 5.1 *On appelle contour du plan complexe une application $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ injective, de classe C^1, et telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$.*

Un contour est donc une courbe *simple, régulière et fermée* du plan complexe.

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Définition 5.2 *Quand elle existe, on appelle intégrale de f le long du contour γ, notée $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.*

On va alors se poser la question : est-il possible d'intégrer une fonction

$$f(z) = \sum_{k=-n_0}^{\infty} a_k z^k, n_0 \geq 1$$

sur un contour γ. Nous allons raisonner très formellement : **il faut juste avoir conscience que les différentes étapes demanderaient à être justifiées (et c'est parfois difficile . . .)**.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^1 \sum_{k=-n_0}^{\infty} a_k \gamma(t)^k \gamma'(t)dt$$

$$= \sum_{k=-n_0}^{\infty} a_k \int_0^1 \gamma(t)^k \gamma'(t)dt$$

$$= a_{-1} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt + \sum_{k=-n_0, k\neq -1}^{\infty} [\frac{\gamma(t)^{k+1}}{k+1}]_0^1$$

et $[\frac{\gamma(t)^{k+1}}{k+1}]_0^1 = 0$ puisque $\gamma(0) = \gamma(1)$. Donc $\int_\gamma f(z)dz = a_{-1} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt$ et il reste donc à évaluer cette intégrale. Le problème vient de ce qu'on ne peut pas directement considérer une expression comme $\ln \gamma(t)$ car il ne faut pas oublier que $\gamma(t)$ est un complexe. Pour comprendre pourquoi ceci représente une difficulté, remarquez par exemple que $1 = e^0 = e^{2i\pi}$ ce qui fait qu'on peut se demander si le logarithme complexe de 1 est 0 ou $2i\pi$.

Nous allons nous limiter pour continuer au cas particulier où $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$, c'est à dire au cas où γ est le cercle unité, et *admettre* que le résultat serait le même pour tout contour entourant 0.

Si $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$,

$$\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_0^1 \frac{2i\pi e^{2i\pi t}}{e^{2i\pi t}} dt = 2i\pi$$

et de ce fait

$$\int_\gamma f(z)dz = (2i\pi)a_{-1}$$

Par un changement de variables immédiat, si on avait

$$f(z) = \sum_{k=-n_0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, n_0 \geq 1$$

on obtiendrait, pour tout contour γ entourant z_0,

$$\int_\gamma f(z)dz = (2i\pi)a_{-1}$$

a_{-1} s'appelle le *résidu* de f au pôle z_0.

Nous allons maintenant énoncer le théorème des résidus sous la forme qui nous sera utile.

Théorème 5.3 *Soit g une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$. Soit Q un polynôme n'ayant que des racines simples*

$$Q(z) = \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)$$

Soit γ un contour <u>ne contenant aucun des</u> z_k. Posons $f(z) = \dfrac{g(z)}{Q(z)}$. Alors,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{z_i \text{ intérieurs à } \gamma} \mathrm{Res}(f, z_i)$$

où $\mathrm{Res}(f, z_i) = \frac{g(z_i)}{Q'(z_i)}$.

Remarque. $\frac{g(z_i)}{Q'(z_i)}$ est égale à a_{-1} car

$$\begin{aligned}\frac{g(z)}{Q(z)} &= \frac{1}{z-z_i} \cdot \frac{g(z)}{\prod_{k\neq i}(z-z_k)}\\ &= \frac{1}{z-z_i} \cdot \Big(\frac{g(z_i)}{\prod_{k\neq i}(z_i-z_k)} + \mathcal{O}(|z-z_i|)\Big)\\ &= \frac{1}{z-z_i} \cdot \Big(\frac{g(z_i)}{Q'(z_i)} + \mathcal{O}(|z-z_i|)\Big).\end{aligned}$$

5.2 Exemple de calcul d'intégrale par la méthode de résidus

Nous allons nous proposer de calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$$

où x est une constante réelle positive.

Considérons le contour γ de $\mathbb{C}$ composé de la façon suivante :

- Le segment réel $[-R, R]$ (noté γ_1)
- Le demi-cercle centré en 0 et de rayon R, parcouru dans le sens trigonométrique (noté γ_2)

Commençons par remarquer que $1+z^2 = (z+i)(z-i)$, ce qui fait que la fonction $\frac{e^{izx}}{1+z^2}$ est bien du type considéré dans le théorème précédent. A l'intérieur du contour γ, il n'y a qu'un seul pôle : $+i$. De plus,

$$\mathrm{Res}(f, i) = \frac{e^{-x}}{2i}$$

Le théorème des résidus nous dit donc que

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \frac{e^{-x}}{2i} = e^{-x}.$$

Par ailleurs,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Comme un point z de γ_2 s'écrit sous la forme $Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$, sur γ_2 on a $dz = iRe^{i\theta}d\theta$. De ce fait,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt + iR \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}x}}{1+R^2e^{2i\theta}} e^{i\theta} d\theta.$$

Notons que $\int_{-R}^{R} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$ qui est l'intégrale qu'on recherche. Donc, si l'on peut montrer que quand $R \to +\infty$, la deuxième intégrale tend vers 0, on obtiendra le résultat cherché.

Notons que

$$\Big| \frac{e^{iRe^{i\theta}x}}{1+R^2e^{2i\theta}} e^{i\theta} \Big| = \Big| \frac{e^{iRe^{i\theta}x}}{1+R^2e^{2i\theta}} \Big| = \Big| \frac{e^{-Rx\sin\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}} \Big|$$

$$\leq \frac{e^{-Rx\sin\theta}}{R^2-1} \leq \frac{1}{R^2-1}$$

la dernière inégalité provenant du fait que pour $0 \leq \theta \leq \pi, \sin\theta \geq 0$ et $x \geq 0$, on a $e^{-Rx\sin\theta} \leq 1$.

De ce fait,

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz \leq R\int_0^\pi \frac{1}{R^2-1}d\theta = \frac{R\pi}{R^2-1} \to 0$$

quand $R \to +\infty$.

On en déduit donc que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2}dt = e^{-x}.$$

Exercice. Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus.

a.

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx$$

b.

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$$

c.

$$\int_0^\infty e^{itx}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

d.

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}e^{ix}dx$$

e.

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+2)(x^2+1)}dx$$