Mastère de Mathématiques - M1 - MU4MA010

Probabilités de Base

Fascicule d'Exercices

Sorbonne Université
Année 2023-2024

Laurent MAZLIAK

IMPORTANT

• Le présent fascicule contient l'ensemble des exercices qui seront traités en Travaux Dirigés dans le module *Probabilités de Base* du Mastère de Mathématiques - M1. Notez que les exercices ne seront pas nécessairement traités dans un ordre linéaire, ni de façon exhaustive : il est donc indispensable, pour la qualité de votre travail, que vous suiviez l'évolution des TD de façon assidue. **Ayez toujours à disposition l'ensemble du fascicule (bien entendu, cela va très bien sous forme numérique si cela vous arrange).**

• Un certain nombre des exercices repérés par un ♡, sont corrigés dans le petit livre de la collection *Livrets d'exercices* de Laurent Mazliak chez Hermann sous le titre *Calcul de probabilités.* D'autres le sont dans le livre *Probabilités* de Yves Lacroix et Laurent Mazliak publié chez Ellipses dans la collection *Mathématiques à l'Université.* Repérés par un ♢, ces derniers peuvent éventuellement correspondre dans le livre à une partie traitée dans le cours (pas en exercice). Ces deux livres se trouvent en plusieurs exemplaires en bibliothque.

• **Il n'y aura pas de devoir à rendre**. Par contre, **trois interrogations écrites de 1 heure 30 en TD sont prévues dans le cadre du contrôle continu les mercredis 11 OCTOBRE, 8 NOVEMBRE ET 6 DÉCEMBRE 2023 DE 14H00 À 15H30.**

• **Quelques dates exceptionnelles :**
- le mercredi 27/9 : début du cours à 17h00 jusqu'à 20h00
- le mercredi 18/10 : fin du cours à 18h00
- pas de cours le jeudi 19/10
- le mercredi 13/12 : début du cours à 15h00

• Le présent fascicule est téléchargeable sur ma page personnelle du LPSM (rubrique Enseignement).

• Pour tout problème, vous pouvez me joindre à l'adresse
laurent.mazliak@sorbonne-universite.fr

Notez cependant que je ne répondrai à <u>aucune</u> question mathématique par mail. Pour discuter mathématiques, envoyez moi un mail et nous fixerons un rendez-vous. N'hésitez pas à le faire!

1 Variables aléatoires discrètes

Exercice ♡ 1.1 *Le Chevalier de Méré s'étonnait qu'en lançant deux dés, il obtienne plus souvent 11 que 12 alors que l'un et l'autre de ces nombres n'était obtenu que par une combinaison (5+6 et 6+6). Qu'en pensez-vous?*

Exercice ♡ 1.2 *a) On fait rouler quatre dés. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un "six"?*

b) On fait rouler deux dés vingt-quatre fois. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois deux "cinq"?

Exercice ♡ 1.3 *n personnes sont réunies dans une pièce. Calculez la probabilité pour que deux d'entre elles au moins aient la même date d'anniversaire.*

Exercice ♡ 1.4 *On suppose que dans une course, il y a n chevaux au départ.*

a) Calculez le nombre de tiercés possibles

b) Calculez la probabilité de gagner, avec un ticket, le tiercé

1-dans l'ordre

2-dans l'ordre ou le désordre

3-dans le désordre

c) Application numérique avec $n = 14$.

Exercice ♡ 1.5 *Dans les p boîtes à lettres d'un immeuble, un facteur est chargé de distribuer n lettres dont r_1 sont pour la boîte 1, …,r_p pour la boîte p. Peu consciencieux, il les distribue au hasard.*

a) Quelle est la probabilité pour que la distribution soit correcte?

b) Quelle est la probabilité pour que la boîte 1 soit correctement remplie?

c) Quelle est la probabilité pour que dans la boîte 1 il n'y ait aucune lettre destinée à un voisin?

d) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait dans chaque boîte exactement le nombre de lettres qui lui était destiné?

Exercice ♡ 1.6 *On lance deux dés au hasard et on considère les événements suivants*

$A =$ *le premier dé tombe sur une face impaire*

$B =$ *le deuxième dé amène une face impaire*

$C =$ *la somme des valeurs des faces des deux dés est impaire*

Montrer que A, B, C *sont deux à deux indépendants mais pas indépendants.*

Exercice ♡ 1.7 *A) Soient* $A_1, \ldots, A_n$ *des événements.*

a) Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ *sont indépendants, il en est de même de* $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n^c$.

b) Déduire que $\forall J \subset \{1, \ldots, n\}$, $(A_j^c, j \in J; A_i, i \in \{1, \ldots, n\} \setminus J)$ *forme un ensemble d'événements indépendants.*

B) Soient n *événements indépendants* $A_1, \ldots, A_n$ *dans* (Ω, P). *Calculer en fonction de* $P(A_i)$ *la probabilité* $p = P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ *et montrer que* $1 - p \leq \exp\{-\sum_i P(A_i)\}$.

Exercice ♡ 1.8 *On tire au hasard,selon une loi uniforme, un entier compris entre 1 et* n

a) Si q *divise* n, *quelle est la probabilité de tirer un multiple de* q

b) On suppose que la décomposition en facteurs irréductibles de n *soit*

$$n = q_1^{\alpha_1} \ldots q_p^{\alpha_p}$$

On note A_i *l'événement: "on tire un multiple de* q_i*".*

Montrer que les A_i *sont indépendants.*

Exercice ♡ 1.9 *En utilisant la loi de* (X, Y), *démontrer que* $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Exercice ♡ 1.10 *Construire un exemple de variable aléatoire non constante pour laquelle* $\mathrm{Var}(X) = 0$.

Exercice ♡ 1.11 *Une population comporte 60% de femmes et 40% d'hommes. On sait par ailleurs que 10% des hommes ont les cheveux longs et que 40% des femmes ont les cheveux courts.*

Une personne se présente avec les cheveux longs. Quelle est la probabilité pour que ce soit une femme?

Exercice ♡ 1.12 *Soit A un événement. On note $1\!\!I_A$ la variable aléatoire qui vaut 1 sur A et 0 ailleurs (fonction caractéristique de A). Montrer que $E(1\!\!I_A) = P(A)$.*

Exercice ♡ 1.13 *Soit X une variable aléatoire réelle.*

a) Montrer que pour tout $\alpha > 0$, si $X \geq 0$,

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(X) \text{ (Inégalité de Markov)}$$

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(\mid X - E(X) \mid > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \text{ (Inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff)}$$

Exercice ♡ 1.14 *Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes, de lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$. Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?*

Exercice ♡ 1.15 *Calculer la probabilité pour qu'en répartissant n boules dans k cellules, toutes les cellules soient occupées.*

On utilisera deux méthodes:

Directe *: a) Montrer que*

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} k+i \\ i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n+k+1 \\ n \end{array} \right).$$

b)

i) On note $N_{n,k}$ le nombre de manières de placer n boules dans k cellules. Montrer que

$$N_{n,k} = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k-1}.$$

ii) Déduire

$$N_{n,k} = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{pmatrix}.$$

Subtile *: utiliser un schéma avec des bâtons et des ronds...*

Exercice ♡ 1.16 *Un joueur joue à la roulette à 37 cases 10 euros sur le 19 et 100 euros sur "pair": si la bille tombe sur 19 il touchera 36 fois sa mise (soit 360 euros) et si elle tombe sur "pair"(0 exclu), il touchera* 2 *fois sa mise ; dans tous les autres cas, sa mise va à la banque. Quelle est l'espérance de son gain?*

Exercice ♡ 1.17 *a) Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit un garçon?*

b) Un autre voisin a deux enfants dont le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit un garçon?

Exercice ♡ 1.18 *Ce matin là, Monsieur Martin, philosophe à ses heures, avait entrepris, compte tenu des prévisions météorologiques pessimistes, de se rendre à son travail en voiture et avait eu la bonne idée de proposer à son voisin, l'ingénieur Félicien Optimal de l'emmener.*

Hélas, bientôt pris dans des encombrements désespérants, ils durent se résoudre à engager les plaisirs de la conversation ce qui leur donna l'occasion de mieux se connaître.

M.Martin expliqua qu'il avait trois enfants dont un prénommé Jacques et un autre Paul.

"N'avez-vous pas aussi une fille?" demanda Félicien. "D'ailleurs, je n'ai qu'une chance sur quatre de me tromper".

M.Martin continua son propos qui fit apparaître que l'aîné des enfants était justement Jacques.

"Je pense encore que vous avez une fille, reprit Félicien, mais j'ai maintenant une chance sur trois de me tromper. - Puisque cela vous intéresse, je puis vous donner une autre indication, dit Monsieur Martin: mon benjamin est Paul.

- Alors, répondit Félicien, je ne sais plus du tout si vous avez une fille ou non!"

Cette démonstration de rationnalisme laissa notre philosophe un peu perplexe: ilne lui apparaissait pas clair en effet que les informations successives qu'il avait données avaient pu augmenter l'incertitude de son voisin Félicien. Ces informations étaient-elles des connaissances ou des anti-connaissances? Il *s'engagea alors dans une méditation sur le réel et aboutit à la conclusion que puisque effectivement le cadet de ses enfants était une fille, la première impression de Félicien avait été la bonne.*

(d'après N.Bouleau: Probabilités pour l'ingénieur, Hermann)

Exercice ♡ 1.19 *Soit (A_n) une suite d'événements telle que* $\sum_n P(A_n) < \infty$

Montrer que $P($*"une infinité de* A_i *se produisent simultanément"*$) = 0$ *(Lemme de Borel-Cantelli)*

Exercice ♡ 1.20 *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y une loi de Poisson de paramètre μ. Déterminer la loi de $X + Y$.*

Exercice 1.21 *Dans une urne contenant une infinité de boules noires et rouges en proportions respectives p et q, on tire un nombre aléatoire Z de boules. On suppose que Z suit une loi de Poisson de paramètre λ, indépendante des tirages faits dans l'urne. On note Y le nombre de boules noires tiré.*

Déterminer la loi de Y.

Exercice ♡ 1.22 *Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements.*

Montrer que

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Exercice ♡ 1.23 *Soient X et Y deux variables aléatoires de lois de Poisson de paramètres α et β. Montrer que pour tout i suffisamment grand, $\mid P(X = i) - P(Y = i) \mid \leq \mid \alpha - \beta \mid$.*

Exercice ♡ 1.24 *Soit X une variables aléatoire à valeurs entières. On pose $p_k = P(X = k)$ et $q_k = \sum_{j \geq k+1} p_j$*

Montrer que $E(X) = \sum_{j \geq 0} q_j$

Exercice ♡ 1.25 *Trouver la loi du minimum de deux variables aléatoires géométriques indépendantes*

Exercice 1.26

Décrire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *de l'expérience aléatoire qui consiste à répartir au hasard* n *boules dans* N *cases.*

On note X *le nombre de boules tombant dans une case donnée à l'avance.*

a) Expliciter les $p_k = P(X = k), 0 \leq k \leq n$, $E(X)$ *et* $\mathrm{Var}(X)$

b) Donner la limite de p_k *quand* k *étant fixé,* n *et* N *tendent vers l'infini de telle sorte que* $\frac{n}{N} \to \lambda, 0 < \lambda < \infty$

Exercice 1.27 *A - On dispose de* N *pièces numérotées de 1 à* N *et on en choisit* n *au hasard sans replacement* $(n \leq N)$

a) Décrire l'espace de probabilités $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ *(resp.* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$*) associé à cette expérience aléatoire quand on regarde la suite (resp. l'ensemble) des numéros obtenus.*

b) On suppose qu'une proportion p, $0 < p < 1$, *des* N *pièces sont défectueuses, avec* $pN > n$. *On note* X *le nombre de pièces défectueuses figurant parmi les* n *pièces choisies.*

(i) En considérant X *définie sur* Ω_2 *expliciter les* $p_k = P_2(X = k)$.

(ii) En considérant X *définie sur* Ω_1 *montrer que* X *peut s'écrire comme la somme de* n *variables aléatoires à valeurs dans* $\{0, 1\}$

$$X = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

Calculer les $E(Z_k), \mathrm{cov}(Z_k, Z_l)$. *En déduire*

$E(X) = np$ *et* $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)(1 - \dfrac{n-1}{N-1})$

B - On considère les mêmes pièces, mais on en choisit n *avec replacement (*n *peut être plus grand que* N*). On note* Y *le nombre de pièces défectueuses observées.*

a)

Décrire l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *associé à cette expérience aléatoire*

b) Expliciter les $q_k = P(Y = k), 0 \leq k \leq n$ *et montrer que, pour* k *et* n *fixés,* $p_k \to q_k$ *quand* $N \to \infty$. *Commenter.*

Exercice ♡ 1.28 *Soit X une variable aléatoire réelle telle que $E(X) = m$ et $\operatorname{Var} X = \sigma^2$.*

On se donne un $\alpha \geq 0$.

a) Soit $\lambda \geq 0$.

Montrer que $P(X - m \geq \alpha) = P(X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda)$.

b) Calculer $E[(X - m + \lambda)^2]$.

c) Montrer que

$$\forall \lambda \geq 0, P(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2 + 2\lambda\alpha}.$$

d) En étudiant $\varphi(\lambda) = \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2 + 2\lambda\alpha}$, déduire l' Inégalité de Cantelli

$$P(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$$

e) Montrer que

$$P(\mid X - m \mid \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$$

Quand cette inégalité est-elle meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff?

Exercice ♢ 1.29 *Une princesse a n prétendants numérotés par ordre de mérite décroissant 1,2,...,n. Elle doit en choisir un. Le problème est qu'ils défilent un par un au hasard devant elle et qu'elle ne peut revenir sur son choix si elle en a laissé partir un. Elle doit donc adopter une stratégie pour avoir le plus de chance de choisir le meilleur...*

Soit Ω l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ω est muni de la probabilité uniforme.

$\sigma \in \Omega$ représente un tirage du hasard (les prétendants défilent dans l'ordre $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$).

Pour $1 \leq k \leq n$, on introduit la variable Y_k qui est le rang de $\sigma(k)$ dans l'ensemble $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\}$ rangé en ordre décroissant: $Y_k = 1$ signifie que $\sigma(k)$ est le plus grand parmi l'ensemble $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\}$, $Y_k = 2$ signifie qu'il y a exactement un élément de $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\}$ plus grand que $\sigma(k)$ etc...

Par convention, on pose $Y_{n+1} = 0$.

a) Montrer que

$$F : \sigma \to (Y_1(\sigma), \ldots, Y_n(\sigma))$$

définit une bijection de Ω sur $\Pi = \{1\} \times \ldots \times \{1, 2, \ldots, n\}$

b) En déduire que les variables Y_j sont indépendantes et que Y_k suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, k\}$.

c) Soit $\tau_r = \inf\{k \geq r, Y_k = 1\}$ ($= n+1$ si cet ensemble est vide).

Calculer la probabilité pour qu'au temps τ_r, le prétendant qui se présente soit le meilleur (i.e. le numero 1). Comment choisir r^* pour maximiser la probabilité précédente? Trouver un équivalent de r^* quand n tend vers l'infini.

Exercice ♡ 1.30 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$, indépendantes et de même loi donnée par*

$$P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

1- Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Calculer $E(S_n)$.

2- On appelle temps d'arrêt de la suite (X_n) une variable aléatoire τ qui vérifie $\forall n \geq 0, \exists A_n \subset \{-1,1\} \times \ldots \times \{-1,1\} = \{-1,1\}^n$ (cet ensemble peut être vide) tel que

$$(\tau \leq n) = [(X_1, \ldots, X_n) \in A_n]$$

a- Montrer que toute variable aléatoire constante $n_0 \in \mathbb{N}$ est un temps d'arrêt

b- Montrer que si τ et ν sont deux temps d'arrêt, $\rho = \max(\tau, \nu)$ est un temps d'arrêt.

c- Montrer que si τ est un temps d'arrêt, alors $\forall n$, $\exists \widetilde{A}_n \subset \{-1,1\}^n$ tel que $(\tau = n) = [(X_1, \ldots, X_n) \in \widetilde{A}_n)]$.

d- Soit $\tau = \inf\{n \geq 1, X_n = 1\}$.

Montrer que τ est un temps d'arrêt.

Calculer $E(S_\tau)$.

Exercice ♡ 1.31 *Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs*

$$x_1, x_2, \ldots, x_l$$

avec les probabilités respectives $p_1, \ldots, p_l (p_1 + \ldots + p_l = 1)$.

On considère la fonction de moments de X définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $M(t) = E(e^{tX})$.

1 - Montrer que l'on a $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k)$$

2 - En déduire que M est de classe C^∞ sur $I\!R$ et que $\forall k \geq 0, E(X^k) = M^{(k)}(0)$

3 - Calculer la fonction de moments d'une variable de Bernoulli de paramètre p

4 - Soient $X_1, \ldots, X_n, n$ variables aléatoires indépendantes prenant chacune un nombre fini de valeurs. On pose $S = X_1 + \ldots + X_n$. Calculer la fonction de moments de S.

5 - Quelle est la fonction de moments d'une variable binômiale de paramètres n et p

6 - Montrer que $M(t)$ caractérise la loi de X

7 - On pose $C(t) = \ln M(t)$

a) Montrer que C est définie sur $I\!R$, de classe C^∞

b) Calculer $C(0), C'(0), C''(0)$.

c) Montrer que M et C sont convexes.

Exercice 1.32 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite indépendante de variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$. Soit τ le premier instant où la valeur 1 est prise:*

$$\tau(\omega) = \inf\{m, X_m(\omega) = 1\}, (= +\infty \text{ si } \emptyset)$$

On pose $r_n = P(X_n = 1)$ et l'on suppose que $0 \leq r_n < 1$ pour tout n.

a) Expliciter la loi de τ à l'aide des r_n A quelle condition sur les r_n a-t-on $\tau < \infty$ p.s.?

b) Déterminer la fonction génératrice de τ ainsi que $E(\tau)$ et $\mathrm{Var}(\tau)$ dans le cas où $r_n = a$ (a fixé dans]0,1[).

c) On pose $\tau_0 = 0, \tau_1 = \tau$ et

$$\tau_{n+1} = \inf\{m > \tau_n, X_m = 1\}$$

Montrer que les variables τ_n sont finies p.s., que les v.a. $\tau_{n+1} - \tau_n, n \geq 0$ sont indépendantes et de même loi. En déduire la fonction génératrice et la loi de chacune des τ_n, leur espérance et leur variance.

Exercice ♡ 1.33 *Un joueur va au casino avec une fortune $a \in I\!N$. A chaque partie, il peut gagner 1 euro avec une probabilité p et perdre 1 euro avec une probabilité $q = 1 - p$.*

Son but est de jouer jusqu'à l'obtention de la fortune $c \geq a, c \in I\!N$ mais il doit s'arrêter s'il est ruiné. On note $s_c(a)$ sa probabilité de succès (atteindre c avant la ruine).

a) Calculer $s_c(0)$ et $s_c(c)$

b) Montrer, pour $a > 0$, en raisonnant sur ce qui s'est passé au premier coup, la relation

$$s_c(a) = ps_c(a+1) + qs_c(a-1)$$

c) Déduire la valeur de $s_c(a)$

d) Application numérique:

Calculer la valeur précédente avec $a = 900, c = 1000$; $a = 100, c = 20000$ dans les cas $p = 0,5$ et $p = \frac{18}{38}$.

Exercice 1.34 *On reprend le modèle de l'exercice précédent mais le jeu change et le joueur est maintant autorisé à s'endetter (il ne doit plus s'arrêter quand il est ruiné). On s'intéresse au temps d'attente du premier gain par le joueur (c'est à dire au premier instant où sa fortune s'est accrue d'une unité par rapport à sa fortune initiale).*

a) Posons

$\phi_n = P($"au n ième coup, pour la première fois, le joueur réalise un gain"$)$.

Par convention, $\phi_0 = 0$.

Calculer ϕ_1.

b) On pose $\Phi(s) = \sum_{n\geq 0} \phi_n s^n$ pour $0 \leq s \leq 1$. Montrer que pour $n > 1$,

$$\phi_n = q(\phi_1\phi_{n-2} + \ldots + \phi_{n-2}\phi_1)$$

c) Déduire que $\Phi(s) - ps = qs\Phi^2(s)$.

d) Résoudre l'équation et en déduire Φ.

e) Calculer $\sum_{n\geq 0} \phi_n$

f) Soit N le numéro du coup où le joueur réalise un gain pour la première fois.

Calculer $E(N)$.

Exercice $\diamondsuit$ 1.35 *On rappelle la Formule de Poincaré : si $(A_1, \ldots, A_n)$ sont des événements,*

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k$$

où $S_k = \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$.

A) Sur $\mathbb{N}^*$, on considère la probabilité μ_s ($s > 1$ réel fixé), définie par

$$\mu_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$$

où $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ *(fonction de Riemann).*

Pour p premier, on définit les variables aléatoires ρ_p *et* α_p *par* $\rho_p(n) = 1$ *si p divise n, 0 sinon, et* $\alpha_p(n) =$ *exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n.*

a) Trouver la loi des variables ρ_p *et montrer qu'elles sont indépendantes.*

b) Montrer que $\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{\mu_k^s})^{-1}$ *où* $\{p_k, k \geq 1\}$ *désigne la suite des nombres premiers dans* $\mathbb{N}$.

B) Soit $N \geq 2$ *un entier fixé. On pose* $\Omega = \{1, \ldots, N\}^2$ *et on note* μ_N *la probabilité uniforme sur* Ω.

On introduit les événements $B = \{$ *les entiers choisis sont premiers entre eux*$\}$ *et* $A_p = \{$ *les entiers choisis sont divisibles par p*$\}$ *où p est premier.*

On note $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *les nombres premiers inférieurs à* N *et on fixe un entier* $m \geq 1$.

a) Montrer que

$$\mu_N(\bigcup_{k=1}^{m} A_{\mu_k}) = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}S_k$$

où $S_k = \frac{1}{N^2} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq m} [N/\mu_{i_1} \ldots \mu_{i_k}]^2.$

b) Déduire, toujours pour m fixé, que

$$\lim_N \mu_N(\bigcup_{k=1}^{m} A_{\mu_k}) = 1 - \prod_{k=1}^{m}(1 - \frac{1}{\mu_k^2}).$$

c) Conclure que $\lim_{N\to+\infty} \mu_N(B) = \frac{6}{\pi^2}$ *(on rappelle que* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$*).*

---

2 Variables aléatoires continues

Exercice 2.1 *Soit X une variable aléatoire réelle. On pose* $F(t) = P(X \leq t)$ *(fonction de répartition).*

a) Montrer que F est croissante et continue à droite.

b) Comment interpréter les sauts de F? Montrer qu'il y en a au plus un nombre dénombrable.

c) Montrer que F est continue si X est une variable à densité.

d) Si X est à densité, relier F et la densité de X.

e) Montrer que F caractérise la loi de X.

Exercice 2.2 *a) On suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On pose $F(t) = P(X \leq t)$.*

Montrer que $E(X) = \int_0^\infty (1 - F(t))dt$

b) Soit X une variable admettant un moment d'ordre 1. Montrer que

$$E(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt - \int_{-\infty}^0 P(X < t)dt$$

Exercice 2.3 *Si X est uniforme sur $[-1, 1]$, déterminer la loi de $\mid X \mid$ et de X^2.*

Exercice 2.4 *Si X est une variable aléatoire réelle strictement positive de densité f, déterminer la loi de $X^{-1}, X^2 + 1, \min(X, 1)$.*

Exercice 2.5 *Supposons que X et Y soient indépendantes et $f(x, y) \geq 0$. On pose $g(x) = E(f(x, Y))$.*

Montrer que $E(g(X)) = E(f(X, Y))$.

Exercice 2.6 *Soient 3 nombres X, Y, Z choisis indépendamment et uniformément dans [0,1]. Quelle est la probabilité pour que l'on puisse former un triangle à l'aide de segments de longueurs X, Y, Z ?*

Exercice ♡ 2.7 *Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de densité*

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-y} 1\!\!1_D(x, y)$$

avec $D = \{x > 0, y > 0, y^2 > x\}$.

a) Déterminer les lois de X et Y.

b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

c) Les variables X et $Y - X^{\frac{1}{2}}$ sont-elles indépendantes?

d) Les variables aléatoires $\frac{X}{Y^2}$ et Y sont-elles indépendantes?

Exercice ♡ 2.8 *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, de mêmes lois de densité $f(x) = 2x, 0 < x < 1$*

Déterminer la loi de $\frac{X_1}{X_2}$.

Exercice ♡ 2.9 *Soit une variable aléatoire telle que*

$$P(X > x + y / X > x) = P(X > y), x, y \geq 0$$

Déterminer la loi de X et interpréter.

Exercice 2.10 *On considère une variable X admettant*

un moment d'ordre 1.

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{F}, P(A) < \delta \Rightarrow E(\mid X \mid 1\!\!I_A) < \varepsilon$$

Exercice 2.11 *On dit qu'une suite de variables aléatoires (X_n) est*

uniformément intégrable si on a

$$\lim_{a \to \infty} \sup_n E(\mid X_n \mid 1\!\!I_{\mid X_n \mid > a}) = 0$$

1 - Montrer que (X_n) est uniformément intégrable si et seulement si $(E(\mid X_n \mid))_{n \in I\!\!N}$ est bornée et si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{F}, P(A) < \delta \Rightarrow \sup_n E(\mid X_n \mid 1\!\!I_A) < \varepsilon$$

2 - Soit (X_n) une suite de variables uniformément intégrable. On pose $Y_n = \max(\mid X_1 \mid, \mid X_2 \mid, \ldots, \mid X_n \mid)$.

Montrer que $E(Y_n) = o(n)$.

Exercice ♢ 2.12 *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires*

à valeurs réelles. Construire une probabilité Q équivalente à P telle que toutes les variables X_n admettent par rapport à Q un moment d'ordre 1.

Exercice 2.13 *Prouver que*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-tx^2}{2}}dx = t^{\frac{-1}{2}}$$

et déduire que si X est une variable gaussienne centrée réduite

$$E(X^{2k}) = 1.3.\ldots.(2k-1), \forall k \geq 1$$

Exercice 2.14 *Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles positives indé pendantes, de même loi de fonction de répartition F. On pose $M = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Exprimer à l'aide de F les moments de M (c'est à dire les $E(M^k)$ où k est un entier).*

Exercice 2.15 *Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et soit ε une variable aléatoire indépendante de X telle que $P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $Y = \varepsilon.X$.*

a) Quelle est la loi de (X,Y)?

b) Calculer $E(XY)$

c) X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 2.16 *Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Soit de plus (U,V) un vecteur aléatoire à valeurs dans $I\!R^2$ de loi uniforme sur la surface $u \geq 0, v \geq 0, u^{1/\alpha} + v^{1/\beta} \leq 1$. On note S la mesure de cette surface.*

Déterminer la loi de $X = \dfrac{U^{1/\alpha}}{U^{1/\alpha} + V^{1/\beta}}$.

Exercice 2.17 *a) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que la loi de X admet une densité sur $I\!R$ et que Y est à valeurs entières. La loi de $X+Y$ admet-elle une densité?*

b) Que pensez-vous du cas non-indépendant?

Exercice ♡ 2.18 *(Aiguille de Buffon).*

Le plan est strié de droites parallèles équidistantes de $2a$. Une aiguille de longueur $2l, l < a$ est jetée au hasard sur le plan au sens où la distance du milieu de l'aiguille à la droite la plus proche est une variable aléatoire X uniforme sur $[0, a]$ et où l'angle que fait l'aiguille avec cette droite est une variable aléatoire φ, indépendante de X, uniforme sur $[0, \pi]$. Quelle est la probabilité que l'aiguille coupe l'une des parallèles?

Exercice 2.19 *Soit Θ et Φ la longitude et la latitude d'un point tiré aléatoirement sur la surface de la shère unité de $\mathbb{R}^3$*

Déterminer la loi du couple (Θ, Φ) et étudier l'indépendance.

Exercice 2.20 *Soient A, B, C trois variables aléatoires strictement positives et indépendantes de fonction de répartition F de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.*

Montrer que la probabilité pour que le polynôme $AX^2 + BX + C$ admette une racine réelle est égale à

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(\frac{x^2}{4y})F'(x)F'(y)dxdy$$

Application numérique si A, B, C suivent une loi uniforme sur [0,1].

Exercice ♢ 2.21 *1 - Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables réelles indépendantes et de même loi μ.*

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, ensemble des bijections de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sur lui même.

Montrer que $\forall H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$P[(X_1, \ldots, X_n) \in H] = P[(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \in H]$$

2 - Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi possédant une densité sur $\mathbb{R}$.

a) On définit $\widetilde{\Omega}$ comme l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que

$$X_k(\omega) \neq X_j(\omega), \forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, k \neq j$$

Montrer que $P(\widetilde{\Omega}) = 1$.

b) Sur $\widetilde{\Omega}$, on définit la variable aléatoire $T^n(\omega)$ à valeurs dans $\mathcal{S}_n$ comme la permutation ordonnant $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$. Autrement dit, $T^n(\omega) = \sigma$ signifie

$$X_{\sigma(1)}(\omega) < X_{\sigma(2)}(\omega) < \ldots < X_{\sigma(n)}(\omega)$$

On pose de plus $Y_n(\omega)$ égal au rang de $X_n(\omega)$ parmi $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ i.e. $Y_n(\omega) = k$ signifie que parmi $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$, $k-1$ valeurs exactement sont inférieures à $X_n(\omega)$.

Montrer que T^n suit une loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$.

c) Montrer que Y_n suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$

d) Montrer que les variables $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ sont indépendantes

e) Soit A_n l'événement $(\max_{k<n} X_k < X_n)$ (on pose $A_1 = \tilde{\Omega}$).

Montrer que $A_1, A_2, \ldots$ sont indépendants et que $P(A_n) = \frac{1}{n}$

f) Soit $N_n(\omega) = \inf\{n' > n, \omega \in A_{n'}\}$

Montrer que

$$P(N_n = n + k) = \frac{n}{(n+k-1)(n+k)}$$

Calculer $E(N_n)$

---

3 Convergences des variables aléatoires

Exercice 3.1 *Soit (X_n) une suite de variables indépendantes centrées et telles que $\sup_n E(X_n^4) < \infty$.*

Montrer que $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ converge vers 0 p.s.

Exercice ♡ 3.2 *Soit $f : [0, 1] \to I\!R$, continue.*

On pose $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

a) Montrer que si $M = \sup_x \mid f(x) \mid$ et $\delta(\varepsilon) = \sup_{|x-y| \leq \varepsilon} \mid f(x) - f(y) \mid$, on a pour tout n

$$\sup_x \mid f(x) - B_n(x) \mid \leq \delta(\varepsilon) + \frac{2M}{n\varepsilon^2}$$

b) Conclure

Exercice ♡ **3.3** *Soit* (S_n) *une suite de variables aléatoires telle que* S_n *suit une loi binômiale de paramètres* n *et* p_n, $0 \leq p_n \leq 1$. *On suppose que* $\lim_n np_n = \lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

Etudier la convergence en loi de la suite (S_n).

Exercice 3.4 *Soit* X *une variables aléatoire à valeurs entières, de fonction génératrice* $P(s)$. *On suppose qu'il existe* $s_0 > 1$ *tel que* $P(s_0) < \infty$.

a) Montrer que $m_r = E(X^r) < \infty$ *pour tout* $r \geq 0$.

b) On pose

$$F(s) = \sum_{r \geq 0} \frac{m_r}{r!} s^r$$

Montrer que F *converge pour* $\mid s \mid < \ln s_0$.

Exercice ♡ **3.5** *a) Monter que des variables à densité peuvent converger vers des variables sans densité.*

b) Et réciproquement.

Exercice 3.6 *Montrer que si* X_n *converge en loi vers* X, *alors* $\mu_{X_n}(I) \to \mu_X(I)$ *pour tout borélien* I *tel que* $\mu_X(\partial I) = 0$.

Exercice ♡ **3.7** *Calculer la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy de densité*

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

Exercice ♡ **3.8** *Soient* $X_1, \ldots, X_n$ *indépendantes et de loi de Cauchy. Déterminer la loi de* $\dfrac{(X_1 + \ldots + X_n)}{n}$.

Exercice 3.9 *Soit X une v.a. de loi μ et de fonction caractéristique φ.*

a) Montrer que

$$\mu(\{a\}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-ita}\varphi(t)dt$$

b) Soit $\{x_k\}$ la suite des points de masse non nulle pour μ. Montrer que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mid \varphi(t) \mid^2 dt = \sum_k \mu(\{x_k\})^2$$

Indications: Commencer par considérer deux variables indépendantes Z_1 et Z_2 de loi μ. Montrer que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mid \varphi(t) \mid^2 dt = P(Z_1 - Z_2 = 0)$$

Montrer alors que

$$P(Z_1 - Z_2 = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X = y)\mu(dy) = \sum_k \mu(\{x_k\})^2$$

c) Montrer que μ n'a pas de point de masse si φ est dans $L^2(dt)$.

Exercice $\diamondsuit$ 3.10 *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers X.*

a) Montrer que (φ_{X_n}) forme une suite de variables uniformément équicontinues.

b) Montrer que φ_{X_n} converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 3.11 *Soient $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ des variables aléatoires de même loi admettant une variance finie.*

a) Montrer que

$$\forall \varepsilon, \lim_n nP(\mid X_1 \mid > \varepsilon\sqrt{n}) = 0$$

b) Déduire que

$$\lim_n P(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1\le k\le n} \mid X_k \mid > \varepsilon) = 0$$

Exercice 3.12 *1 - Montrer que si les v.a.* $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ *sont indépendantes et* $X_n \stackrel{p.s.}{\to} X$*, alors* X *est constante*

2 - Démontrer que ce résultat reste vrai si l'on suppose seulement la convergence en probabilité.

Exercice 3.13 *Montrer que si* $X_n \stackrel{P}{\to} X$ *et on a* $|X_n| \leq Y$*, où* Y *est une v.a. intégrable, alors* $X_n \stackrel{L^1}{\to} X$.

Exercice $\diamondsuit$ **3.14** *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires à valeurs 0 ou 1. On pose* $p_n = P(X_n = 1)$.

a) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (X_n) *converge vers 0 dans* L^1.

b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (X_n) *converge vers 0 en probabilités.*

c) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (X_n) *converge vers 0 p.s.*

d) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (X_n) *converge vers 0 en loi.*

Exercice 3.15 *Soit* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de variables iid telles que* $P(X_1 \geq 0) = 1$ *et* $P(X_1 > 0) > 0$.

Montrer que $\displaystyle\sum_n X_n = \infty$ *p.s.*

Exercice 3.16 *Soit* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires convergeant p.s. vers* X*. On suppose de plus que* $\lim_n E(| X_n |) = E(| X |)$*. Montrer que la convergence a lieu en fait dans* L^1.

Exercice $\diamondsuit$ **3.17** *Soit* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *une suite de v.a. indépendantes.*

a) On suppose que pour un $c > 0$ *les trois séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|X_n| \geq c\} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^c) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n^c)$$

convergent, où on note $X_n^c = X_n 1_{\{|X_n|\leq c\}}$. *Montrer que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *converge p.s.*

b) Montrer que la convergence des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n)$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_n|^p)$ *pour un* $1 < p \leq 2$ *entraine la convergence p.s. de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$.

Exercice 3.18 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction uniformément continue. On considère deux suites* (X_n) *et* (Y_n) *de variables réelles telles que* $X_n \to_P X$ *et* $Y_n \to_P Y$. *Montrer que* $f(X_n, Y_n) \to_P f(X, Y)$.

Exercice 3.19 *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Montrer que*

$$\int_{[0,1]^n} f(\tfrac{x_1+\ldots+x_n}{n})\, dx_1 \ldots dx_n \to f(\tfrac{1}{2})$$

Exercice 3.20 *Soit* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *une suite de v.a. indépendantes et uniformes sur* $[0,1]$. *Soit* f *borélienne bornée.*

Etudier la convergence p.s. de la suite $\frac{1}{n}(f(X_1) + \ldots + f(X_n))$ *pour* $n \to \infty$.

Exercice 3.21 *Soit* (X_n) *une suite de v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre* $p = 1 - q$.

On pose $Y_n = 1\!\!I_{X_{n+1}=1, X_{n+2}=0}$.

a) On pose $Z_n = 1\!\!I_{X_{2n+1}=1, X_{2n+2}=0}$ *et* $Z'_n = 1\!\!I_{X_{2n}=1, X_{2n+1}=0}$.

Montrer que les deux suites (Z_n) et (Z'_n) sont composées, chacune, de variables indépendantes.

b) Déduire la convergence p.s. de la suite $\dfrac{Z_1 + \dots Z_n}{n}$ *et de la suite* $\dfrac{Z'_1 + \dots Z'_n}{n}$.

c) Etudier la convergence p.s. de la suite $\dfrac{Y_1 + \dots Y_n}{n}$.

Exercice ♡ 3.22 *Soient X_1 et X_2 des variables indépendantes de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 < +\infty$. On suppose que $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim X_1 \sim X_2$. Quelle est cette loi?*

Exercice 3.23 *Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de fonction caractéristique $\Phi_X(u)$.*

a) Quelle est la fonction caractéristique de X_1?

b) Soit $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Quelle est la fonction caractéristique de $A(X)$?

Exercice ♢ 3.24 *On dit qu'une variable aléatoire réelle admet une loi à réseau si sa loi est portée par un ensemble $\{a + nb, n \in \mathbf{Z}\}$, où a et $b > 0$ sont deux réels.*

On note φ la fonction caractéristique de X.

a) Montrer que X a une loi à réseau si et seulement si $\mid \varphi(t) \mid = 1$ pour un $t > 0$.

b) Montrer que si $\mid \varphi(t) \mid = \mid \varphi(t') \mid = 1$ pour un t et un t' incommensurables (i.e. de rapport irrationnel), alors X est p.s. constante.

Exercice 3.25 *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi μ. On suppose que $\forall x > 0, \mu([x, +\infty[) = \mu(]-\infty, -x])$ et que μ n'est pas une masse de Dirac. En outre, on suppose que $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \alpha X + \beta Y$ a même loi que $(\alpha + \beta)X$.*

Déterminer la loi μ.

Exercice 3.26 *Soient* $(s_i)_{i\geq 1}$ *une suite de réels positifs décroissante vers 0,* (d_k) *une suite de réels positifs telle que* $\sum_{k\geq 1} d_k = +\infty$. *On suppose enfin que* $\sum_{k\geq 1} s_k d_k = 1$ *et on pose* $t_0 = 0$ *et* $t_k = d_1 + \ldots + d_k$.

Soit φ *la fonction telle que* $\varphi(0) = 1$, φ *est affine sur chaque intervalle* $[t_k, t_{k+1}]$, *de pente* $-s_{k+1}$.

a) Dessiner le graphe de φ.

b) Calculer la fonction caractéristique de la loi de densité $(1- \mid x \mid)1\!\!1_{-1<x<1}$.

c) Calculer la fonction caractéristique φ_0 *de la loi de densité* $\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

d) Montrer que, si $p_k = (s_k - s_{k+1})t_k, \sum_{k\geq 1} p_k = 1$ *et* $\varphi(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p_k \varphi_0(\frac{t}{t_k})$.

Déduire que φ *est une fonction caractéristique.*

e) Soit ψ *une fonction paire, réelle, telle que* $\psi(0) = 1$, *continue, convexe, positive et décroissante sur* $I\!R^+$. *Montrer que* ψ *est une fonction caractéristique.*

Exercice $\diamondsuit$ **3.27** *1- Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires réelles.*

a) Montrer que si X_n *converge en loi vers* X_∞, *alors* $\forall \varepsilon > 0$, *il existe* $K > 0$ *tel que*

$$\sup_{n\in[0,\infty]} P(\mid X_n \mid \geq K) < \varepsilon$$

b) Montrer que si X_n *converge en loi vers* X_∞, *alors* $\varphi_{X_n}(t)$ *converge uniformément vers* $\varphi_X(t)$ *sur tout intervalle borné de* $I\!R$.

2- Soient (a_n) *et* (b_n) *deux suites réelles avec* $a_n > 0, \forall n$. *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires non constantes et* (X_n) *une suite de variables aléatoires telle que* X_n *converge en loi vers* X *et* $a_n X_n + b_n$ *converge en loi vers* Y.

On note φ_n, φ *et* ψ *les fonctions caractéristiques de* X_n, X *et* Y.

a) Montrer que $\mid \varphi_n(a_n t) \mid$ *converge uniformément sur tout intervalle borné vers* $\mid \psi(t) \mid$.

b) Déduire que 0 n'est pas valeur d'adhérence de la suite (a_n)

c) En "échangeant" les rôles de φ *et* ψ, *montrer que* $+\infty$ *n'est pas valeur d'adhérence de la suite* a_n.

d) Montrer que (a_n) *converge vers* $a > 0$.

e) Montrer que e^{itb_n} *converge vers* $\dfrac{\psi(t)}{\varphi(at)}$ *dans un voisinage de 0.*

f) En considérant $\displaystyle\int_0^t e^{isb_n} ds$, *déduire que* (b_n) *converge.*

Exercice $\heartsuit$ **3.28** *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. On suppose qu'il existe $a < b$ tels que*

(i) $P(X_1 < a) = 0, P(X_1 > b) = 0$

(ii) $\forall a < x < b, 0 < P(X_1 \leq x) < 1$

On pose $Y_n = \inf(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = \sup(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Montrer que (Y_n) converge en loi vers a.

b) Etudier la convergence en loi de (Z_n)

c) On suppose que X_i suit une loi uniforme sur [0,1]. Etudier la convergence en loi de $W_n = nY_n$.

Exercice $\heartsuit$ **3.29** *1) Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer la fonction caractéristique de la variable $Y = \sigma X + m$ avec $\sigma > 0, m \in \mathbb{R}$.*

2) Soit (X_n) une suite de v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On considère deux suites (σ_n) et (m_n), respectivement dans $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$ et on pose $Y_n = \sigma_n X_n + m_n$.

a) On suppose que $\sigma_n \to \sigma$ et $m_n \to m$. Montrer que (Y_n) converge en loi.

b) On suppose que $Y_n \to_{\mathcal{L}} Y$.

b1) Montrer que (σ_n) converge vers $\sigma \geq 0$.

b2) Montrer que (m_n) converge vers $m \in \mathbb{R}$.

b3) Déduire la loi de Y.

Exercice $\heartsuit$ **3.30** *Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur [0,1]. On pose*

$$Y_n = e^{\alpha\sqrt{n}}(U_1 \ldots U_n)^{\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}$$

où α est une constante strictement positive.

a) Montrer que $E(\ln U_1) = -1$ et $\mathrm{Var}(\ln U_1) = 1$.

b) Etudier la convergence en loi de $\frac{1}{\alpha}\ln Y_n$.

c) Etudier la convergence en loi de Y_n.

Exercice $\diamondsuit$ **3.31** *On considère la densité de probabilités*

$$h_\alpha(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\alpha^2}{2t}}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(t)$$

où $\alpha > 0$.

a) Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ donnés, et $X \sim h_\alpha, Y \sim h_\beta$ deux variables aléatoires indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$ (on pourra utiliser des transformées de Laplace).

b) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi possédant la densité h_α. Déterminer la loi de

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n^2}$$

Y-a-t-il une contradiction avec la loi des grands nombres?

c) Etudier la convergence de la suite

$$Y_n = \frac{1}{n^2} \max_{k \leq n} X_k$$

(on pourra regarder la fonction de répartition de Y_n)

Exercice $\diamondsuit$ 3.32 *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que $\sup_n E(X_n^2) < \infty$.*

On suppose que (X_n) converge en loi vers X.

Montrer que $E(X_n) \to E(X)$.

Exercice $\diamondsuit$ 3.33 *Soit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ où les X_n sont des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1.*

a) Montrer que

$$E\Big((\frac{S_n - n}{\sqrt{n}})^- \Big) = \frac{n^{(n+\frac{1}{2})} e^{-n}}{n!}$$

b) Montrer que $(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}})^-$ converge en loi vers N^-, la partie négative d'une loi gaussienne centrée réduite.

c) Montrer que

$$E\Big((\frac{S_n - n}{\sqrt{n}})^- \Big) \to E(N^-)$$

d) Déduire un équivalent de $n!$ (formule de Stirling).

Exercice $\diamondsuit$ **3.34** *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires réelles telles que* (X_n) *converge en loi vers* X.

a) Soit $F_n(x)$ *la fonction de répartition de* X_n *(resp.* F*, fonction de répartition de* X*).*

On pose $G_n(t) = \inf\{x, F_n(x) \geq t\}$ *(resp.*$G(t) = \inf\{x, F(x) \geq t\}$*).*

Déterminer la loi de G_n *en tant que variable aléatoire sur l'espace de probabilités* $[0,1]$ *muni de la mesure de Lebesgue.*

b) Etudier la convergence de la suite G_n. *(Théorème de Skorokhod)*

Exercice 3.35 *Soient p un entier fixé* ≥ 2 *et* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi uniforme sur* $\{0,1,\ldots,p-1\}$. *Montrer que la série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{p^n}$ *converge p.s. et que sa somme suit une loi uniforme sur* $[0,1]$.

Exercice 3.36 *Soit* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *une suite de v.a. indépendantes et de même loi uniforme sur* $[-1,1]$.

a) Soit $\alpha > \frac{1}{2}$. *Montrer que la série*

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} X_n/n^{\alpha}$ *converge dans* L^2 *et p.s*

b) Etudier le cas $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 3.37 *Soit* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *une suite de v.a. telle que* X_n *suive la loi uniforme sur* $\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\}$. *Montrer que* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *converge en loi et déterminer la loi limite.*

---

4 Conditionnement et vecteurs gaussiens

Exercice $\diamondsuit$ **4.1** *Soient* R *et* Θ *deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives exponentielle de paramètre* $\frac{1}{2}$ *et uniforme sur* $[0,2\pi]$.

1) Déterminer la loi de

$$\tilde{X} = (\sqrt{R}\cos\Theta, \sqrt{R}\sin\Theta).$$

2) Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois uniformes sur [0,1]. On pose $X = \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2)$ et $Y = \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2)$.

Déterminer la loi de (X, Y).

3) Quel usage faire du résultat précédent?

Exercice $\diamondsuit$ 4.2 *On pose* $\mathrm{Var}(X/\mathcal{G}) = E[(X - E(X/\mathcal{G}))^2/\mathcal{G}]$. *Montrer que*

$$\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X/\mathcal{G})] + \mathrm{Var}(E(X/\mathcal{G})).$$

Exercice 4.3 *a1) Soient (X, Y, Z) tel que $(X, Z) \sim (Y, Z)$. Montrer que $\forall f \geq 0$ et borélienne, $E(f(X)/Z) = E(f(Y)/Z)$.*

a2) On pose $h_1(X) = E(g(Z)/X)$ et $h_2(Y) = E(g(Z)/Y)$ pour g borélienne positive donnée. Montrer que $h_1 = h_2, \mu$-pp, où μ désigne la loi de X.

b) Soient $T_1, \ldots, T_n$ des variables aléatoires réelles intégrables indépendantes et de même loi.

On pose $T = T_1 + \ldots + T_n$.

b1) Montrer que $E(T_1/T) = \frac{T}{n}$.

b2) Calculer $E(T/T_1)$

Exercice 4.4 *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles idépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On pose $S_0 = 0, S_n = X_1 + \ldots + X_n, \mathcal{F}_n\sigma(S_k, k \leq n)$. Montrer que pour toute $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne bornée,*

$$E(f(S_n)/\mathcal{F}_{n-1}) = E(f(S_n)/S_{n-1})$$

et calculer cette quantité.

Exercice $\diamondsuit$ 4.5 *a) Soit X à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ tel que $X = \varphi(Y) + Z$ où Y et Z sont indépendantes. Calculer $E(f(X)/Y)$.*

b) Soient X et Y à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement.

On suppose que (X, Y) est un vecteur gaussien de moyenne $\begin{pmatrix} M_X \\ M_Y \end{pmatrix}$ et de covariance $\begin{pmatrix} R_X & R_{XY} \\ R_{XY} & R_Y \end{pmatrix}$. On suppose R_Y inversible.

b1) Déterminer A telle que $X - AY$ et Y soient indépendantes.

b2) Montrer que $E(f(X)/Y) = \int f(x)\mu_Y(dx)$ où μ_Y est la loi gaussienne de moyenne $E(X/Y) = M_X + R_{XY}R_Y^{-1}(Y - M_Y)$ et de covariance $R_X - R_{XY}R_Y^{-1}R_{YX}$.

Exercice ◊ 4.6 *A) Soient $\sigma > 0, a \in I\!R^d$ et C une matrice $d \times d$ définie positive.*

Montrer que

$$(C + \sigma^2 a^t a)^{-1} = C^{-1} - \frac{C^{-1} a^t a C^{-1}}{\sigma^{-2} + < C^{-1} a, a >}.$$

B) Soient (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles idépendantes. On suppose que pour tout n, $Z_n \sim \mathcal{N}(0, c_n^2)$ où $c_n > 0$. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), indépendante de la suite (Z_n). On pose $Y_n = X + Z_n$, $\mathcal{G}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$, $\hat{X}_n E(X/\mathcal{G}_n)$. On pose $Y^n = (Y_1, \ldots, Y_n)$.

B1) Quelle est la loi de $(X, Y_1, \ldots, Y_n)$?

B2) Calculer $E(f(X)/Y^n)$

B3) Calculer $\hat{X}_n$ et $E((X - \hat{X}_n)^2)$

B4) Montrer que $\hat{X}_n \to X$ dans L^2 si et seulement si $\sum_{n \geq 1} c_n^{-2} = +\infty$

Exercice 4.7 *Soit $(B_t)_{t \in I\!R^+}$ une famille de variables aléatoires vérifiant les conditions suivantes:*

(i) $\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ est un vecteur gaussien centré

(ii) $\forall (s,t), E(B_s B_t) = s \wedge t$

(iii) p.s., $t \mapsto B_t(\omega)$ est une fonction continue

a) Montrer que (B_t) est à accroissements indépendants et stationnaires i.e.

$\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont des variables indépendantes et $\forall s < t, B_t - B_s$ a même loi que B_{t-s}.

b) On pose $G_t^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (B_{\frac{k+1}{n}t} - B_{\frac{k}{n}t})^2$.

Montrer qu'il existe une suite n_p telle que $G_t^{n_p} \to t$ p.s.

c) Soit $t > 0$.

Montrer que p.s., $s \mapsto B_s(\omega)$ n'est pas à variations finies sur l'intervalle $[0, t]$.

d) Montrer que si on pose $\widetilde{B}_t = t B_{\frac{1}{t}}$ pour $t > 0$ et $\widetilde{B}_0 = 0$, $(\widetilde{B}_t)$ satisfait aux propriétés (i) et (ii).

Montre que (iii) est satisfaite sur $]0, +\infty[$.

On admettra que la propriété (iii) est satisfaite par $\widetilde{B}$ sur $[0, +\infty[$.

e) Montrer que les tribus $\displaystyle\bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma(B_s, 0 < s < \varepsilon)$ et $\displaystyle\bigcap_{t > 0} \sigma(B_s, s \geq t)$ ne contiennent que des événements de probabilité 0 ou 1.

f) Montrer que $\inf_{n>0} B_n = -\infty$ *et* $\sup_{n>0} B_n = +\infty$ *(on pourra montrer que* $B'_t = -B_t$ *satisfait à (i),(ii) et (iii).*

g) Montrer que p.s., $t \mapsto B_t(\omega)$ *n'est pas dérivable en 0.*

h) Montrer que p.s., $\forall t,\ s \mapsto B_s(\omega)$ *s'annule sur* $]0, t]$.

Exercice 4.8 *Soit* (M_n) *une suite de variables aléatoires. On pose* $\mathcal{G}_n = \sigma(M_0, \dots, M_n)$.

On suppose que $M_0 = 0$ *et* $\forall n, E(M_{n+1}/\mathcal{G}_n) = M_n$.

Montrer que

$$E(M_n^2) = \sum_{k=1}^{n} E((M_k - M_{k-1})^2).$$

Exercice $\diamondsuit$ **4.9** *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes, de même loi centrée, de variance 1.*

a) On suppose X *et* Y *gaussiennes. Trouver une CNS sur les réels* a, b, c, d *pour que* $aX + bY$ *et* $cX + dY$ *soient indépendantes.*

Montrer en particulier que $X + Y$ *et* $X - Y$ *sont indépendantes.*

b) On suppose que $X + Y$ *et* $X - Y$ *sont indépendantes.*

b1) Montrer que ϕ*, fonction caractéristique de* X *est telle que*

$$\phi(2t) = \phi(t)^3 \phi(-t)$$

b2) Montrer que ϕ *ne s'annule pas.*

b3) Montrer que $\phi(t) = \phi(-t)$ *pour tout* t *(considérer* $\rho(t) = \frac{\phi(t)}{\phi(-t)}$*).*

b4) Déduire que X *et* Y *sont gaussiennes.*

Exercice $\diamondsuit$ **4.10** *Soit* $(U_n)_{n\geq 0}$ *une suite de v.a.r. indépendantes de même loi* $\mathcal{N}(m, \sigma^2), \sigma > 0$.

Soit $a > 0$ *donné. On considère* $X_0 = 0$ *et* $X_{n+1} = aX_n + U_n, n \geq 0$.

a) $(X_1, \dots, X_n)$ *est-il un vecteur gaussien?*

b) Calculer $E(X_n)$ *et* $\mathrm{Var}(X_n)$.

c) c1) On suppose que $a < 1$. *Montrer que* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en loi.*

c2) On suppose que $a > 1$. *Montrer que* $\frac{X_n}{a^{n-1}}$ *converge dans* L^2 *vers une v.a.r.* X *dont on déterminera la loi.*

c3) On suppose $a = 1$. *Que peut-on dire de* X_n*?*

Exercice $\diamondsuit$ **4.11** *Soit* $(X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}_3(0, I_3)$. *Soient* $U = X_1 - X_2 + X_3$, $T_1 = X_1 + X_2$, $T_2 = X_2 + X_3$, $T_3 = X_1 - X_3$.

a) Quelle est la loi de U *?*

b) Montrer que U *est indépendante de* (T_1, T_2, T_3).

Exercice $\diamondsuit$ **4.12** *Soit* $(X_i)_{i\geq 1}$, *une suite de variables indépendantes de loi normale centrée réduite. On pose* $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *et* $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

a) Quelle est la loi de $\overline{X}$ *?*

b) Montrer que $\overline{X}$ *et* S^2 *sont indépendantes.*