Musique sérielle

Laurent Mazliak*

12 juillet 2005

Introduction

Ce texte est un texte militant. Il provient de mon expérience d'enseignement des mathématiques à l'université, en particulier dans le premier cycle universitaire (DEUG, soit L1 et L2 dans le nouveau jargon), d'interrogateur en Classe Préparatoire aux Grandes Ecoles (CPGE), et d'interrogateur à l'oral d'un concours de recrutement à l'une de ces Grandes Ecoles. S'il est clair qu'une épreuve orale de concours est un moment trop particulier pour être absolument représentatif de certaines lourdeurs dans l'enseignement d'une discipline, il me semble néanmoins mettre en relief de façon particulièrement aiguë certains travers dont sont pollués depuis fort longtemps les programmes d'enseignement et que la plupart d'entre nous, adoptant une surprenante politique d'autruche, refusent de remettre en question, que ce soit par paresse intellectuelle, par respect inconditionnel de traditions ancestrales qui sont censées avoir fait leurs preuves (ce qui est faux), ou certainement par le peu de gratification personnelle qu'il y a à attendre de l'institution du fait de se creuser la tête sur des questions d'enseignement.

1 Majorer, minorer…

Comme je ne veux pas rester dans la stratosphère, je vais me concentrer sur un point très précis, à savoir celui de l'étude de la convergence des séries réelles. J'ignore d'ailleurs si récemment des collègues ont mentionné ce problème. Si c'est le cas, le silence fait autour de leur alerte est peut-être révélateur. Je citerai par contre plus loin de fort anciennes récriminations sur ce sujet …

Je ne crois pas rencontrer beaucoup d'opposition si j'affirme que la notion de série convergente est une des plus centrales que les étudiants de deuxième année (que ce soit en CPGE ou à l'université) ont à aborder. Or, depuis que j'enseigne (et il en était sans doute ainsi quand je me trouvais de l'autre côté de la barrière), je constate avec étonnement une remarquable stabilité dans la manière dont les étudiants abordent cette question, à savoir, dans 90% des cas au moins en se précipitant sur les incontournables règles de d'Alembert ou de Cauchy. Au passage, il est bien

*Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires, Université Paris VI, 4, Place Jussieu, 75252 PARIS CEDEX 05, mazliak@ccr.jussieu.fr

malheureux que les deux personnages ne semblent avoir laissé de trace pour les étudiants qu'à travers ces fioritures (même si d'Alembert a assez souvent l'heur de l'attribution du théorème fondamental de l'Algèbre).

Le premier étonnement devant cet immobilisme vient d'abord et avant tout du fait que les critères en question sont systématiquement mal employés et connus. Si au moins les résultats étaient correctement énoncés, on pourrait se contenter de soupirer devant le besoin maladif qu'ont les étudiants de s'accrocher à des recettes. Mais le plus souvent, on ne sait plus si le quotient à regarder est $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ou $\frac{u_n}{u_{n+1}}$, si la convergence a lieu quand la limite est (strictement... ?) supérieure à 1, quand on n'oublie pas carrément de regarder la limite en suggérant que le fait que le rapport soit inférieur à 1 entraîne la convergence, sans même parler des questions de signe etc. etc. etc.

Je n'apprendrai rien à personne en mentionnant combien les étudiants ont de difficulté à faire la différence entre une condition nécessaire et une condition suffisante. Or, bien entendu, dans la majorité des cas, les résultats des critères en question sont pensés comme représentant de la nature de la série. Et il faut bien se poser la question. Cette tendance n'est-elle pas considérablement renforcée par le fait de commencer sans cesse les cours sur les séries par l'énoncé de ces règles, assénées avec une telle autorité (et affublés de noms prononcés avec des trémolos de vénération dans la voix) qu'elles ne peuvent être comprises autrement que comme une panacée universelle. Qui plus est, il y a une forme de plaisir pervers à fournir des listes d'exercices contenant des termes généraux de séries fabriqués spécialement pour pouvoir être étudiés avec les critères en question. Ce qui étaye probablement en partie l'étonnante image que les mathématiciens donnent souvent d'eux mêmes, inventant des techniques destinées à résoudre les problèmes *ad hoc* construits *a posteriori* pour pouvoir être étudiés par elles.

Mais le plus déconcertant est le fait que l'invraisemblable insistance mise sur ces critères-gadget fait passer la majorité des étudiants à côté de la façon universelle dont on met en œuvre la convergence d'une série, à savoir en établissant une majoration intéressante. Le titre du présent paragraphe s'appuie sur la haute autorité de *maître* Dieudonné, à qui on a pu reprocher bien des choses mais dont on ne saura je crois nier la vision juste quand il proclama dans la préface son livre *Calcul Infinitésimal* que les mots clefs de l'analyse enseignée en Premier cycle universitaire sont (ou plutôt devraient être) *majorer, minorer* (auquel s'ajoute *approcher* dont on ne parlera pas ici). Or il n'arrive qu'aux seuls étudiants exceptionnels d'avoir le réflexe de penser à trouver une majoration quand on leur demande d'étudier une série. D'où souvent des difficultés invraisemblables pour faire une telle étude de convergence dans des cas où la majoration crève le tableau alors que l'application des critères fait aligner d'inextricables expressions. Qui plus est, et sûrement beaucoup plus grave, cette volonté forcenée d'utilisation de recettes de cuisine fait perdre aux étudiants le minimum de compréhension qu'on peut espérer qu'ils aient acquis de la notion de convergence d'une série, à savoir qu'une série converge si les termes deviennent "suffisamment vite petits" (si on me répondait cela ne serait-ce qu'une fois sur cinq à l'oral d'un concours, je pense que je me serais épargné l'écriture de cet article !). Au lieu de cela, l'impossibilité de mettre en œuvre leur formule magique leur fait perdre tout recul et tout bon sens dont une dose, comme Poincaré l'a écrit, n'est pas moins nécessaire en mathématique que dans la vie courante. Ainsi, j'ai été de nombreuses fois perturbé par le fait qu'un étudiant mis en face de la série de terme général $\frac{\cos(n)e^{-n}}{n}$ et acculé à trouver une majoration, commence systématiquement par

majorer e^{-n} par 1. Que ceux qui doutent fassent le test et ils seront surpris du résultat.

S'ajoute à cela un questionnement. Je n'ai jamais rencontré non seulement au cours de mes recherches, mais surtout dans aucun des livres ou articles mathématiques que j'ai pu lire le moindre emploi d'une des règles en question. Il faut voir les choses en face : ces règles ne servent à rien, si ce n'est dans le cas du calcul du rayon de convergence d'une série entière, c'est à dire dans une situation où elle ne servent pas à discriminer la convergence de la série. Comment s'expliquer que nous puissions alors continuer comme si de rien n'était à enseigner des choses si manifestement inutiles si ce n'est par une inertie amenant à la reconduction inconditionnelle des cours de la génération précédente avec une absence totale de sens critique.

2 Autres temps, mêmes mœurs...

En France, les régimes passent et la cuisine demeure aurait dit le fin gourmet que fut Talleyrand. Il n'y a pas que la cuisine. Car ce n'est pas d'hier que date l'enseignement des critères de convergence des séries dans la présentation péremptoire qui en est donnée aujourd'hui. Dans cette section, j'illustrerai ce fait par un rapide parcours de quelques traités d'Analyse de différents niveaux, répartis dans la période 1880-1950 et qui ont à leur époque fait autorité dans l'enseignement en France. Il me paraîtrait d'ailleurs très judicieux d'aller voir comment dans d'autres pays on enseigne le point d'analyse auquel je m'intéresse : je n'exclus pas du tout d'ailleurs que la situation puisse être encore pire qu'en France, mais cela ne me semble en rien une justification suffisante pour ne pas balayer devant notre porte.

Dans l'ordre chronologique, nous allons regarder rapidement le point d'Analyse considété dans : le Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique de Camille Jordan (1ère édition en 1882) , le cours d'Analyse d'Edouard Goursat (Première édition en 1902), le cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique de Georges Humbert (Première édition en 1904), le Cours de Mathématiques spéciales de Jules Haag (1914), le traité de Théorie des Fonctions de Georges Valiron (Première édition en 1941).

Le Chapitre III du tome I "Calcul différentiel" du cours de Jordan est intitulé *Séries*. De manière assez étonnante à nos yeux, Jordan y expose d'abord (numéros 251 à 283) des considérations sur les développements en série entière des fonctions avant même de mentionner la notion générale de série numérique. De ce fait, les premiers exemples de séries mis sous les yeux du lecteur ont une nature de convergence extrêmement calibrée. C'est uniquement au paragraphe III (numéros 284 à 335) qu'il en vient à parler de la notion générale de série *à termes numériques*. L'introduction de la règle de Cauchy (non nommée) apparait au numéro 302, introduite par la phrase révélatrice : *La comparaison avec une progression géométrique nous fournit une première règle* **simple et suffisante dans un grand nombre de cas** (je souligne). Le type même comme on voit de la phrase catastrophique. Par la suite (numéros 303 à 314), Jordan fournit une avalanche de règles bricolées de manière plus ou moins subtile, dont on peut quand même se demander s'il était vraiment attendu des étudiants qu'ils les connaissent un tant soit peu. Un exemple parmi d'autres : au numéro 314, est énoncée *une dernière règle de convergence, due à M.Kummer* :

Si, pour $n \geq \nu$, on peut mettre le rapport $\frac{\nu_n}{\nu_{n+1}}$ sous la forme

$$\frac{\nu_n}{\nu_{n+1}} = \frac{e_{n+1} + \alpha}{e_n}$$

$\alpha, e_\nu, \ldots, e_n, \ldots$ *désignant des quantités positives quelconques, la série* $\sum \nu_n$ *sera convergente.*

Le genre de résultat passionnant, qui conforte l'impression de recettes de cuisine autour de l'étude des séries et ceci d'autant plus qu'il n'est suivi d'aucun exemple.

Le chapitre VIII du tome I du cours de Goursat est consacré aux *Séries et produits infinis*. Goursat choisit lui de présenter d'abord des généralités sur les séries convergentes, dans un ordre très proche de celui classiquement suivi aujourd'hui. On peut néanmoins noter que le premier paragraphe du chapitre (numéros 148 à 158) s'intitule *Règles de convergence*, un vocable peu innocent, d'autant que dans le paragraphe introductif l'auteur mentionne que *[D]ans la pratique, pour reconnaître si une série donnée est convergente ou divergente, on se sert le plus souvent de règles (...)d'une application plus commode. Nous allons rappeler les règles de convergence les plus usitées, qui suffisent dans la plupart des applications*. Et d'ailleurs dès la troisième page, les *règles de convergence* se succèdent en cascade, en commençant par celles de Cauchy et de d'Alembert (numéro 150) et ceci alors que ne me semble même pas énoncer clairement qu'une condition nécessaire est la convergence vers 0 du terme général.

Chez Humbert, dont le très court chapitre V est consacré à l'étude des séries, il s'agit en fait surtout de rappels puisque *[L]es principales propriétés des séries à termes positifs, et notamment les règles de convergence les plus importantes, ont été établies dans le Cours de Mathématiques spéciales*. Ces *règles* (Cauchy, d'Alembert et la comparaison avec une série de Riemann (la règle $n^\alpha u_n$ que nous avons tous annonée dans notre jeunesse)) sont énoncées laconiquement au numéro 130.

Chez Haag, qui naturellement se situe à un niveau inférieur à celui des autres livres mentionnés. Une phrase placée au détour de la Préface à l'ouvrage soulève des interrogations. Haag, donnant les usuels conseils d'auteur pour l'utilisation optimale du livre, mentionne que les *candidats aux grandes écoles, qui ne s'intéressent pas particulièrement aux Mathématiques, pourront laisser de côté ce qui n'est pas dans leur programme*. On sait ce que représente dans le système scolaire français la place symbolique des grandes écoles. Dans quelle mesure une telle remarque, quelque peu troublante en introduction à un traité de mathématiques, indique-t-elle la tonalité qui va être donnée à l'enseignement, plutôt axé sur l'acquisition de recettes simples (ou simplistes...) que sur un approfondissement de l'analyse des situations. Comme on peut s'y attendre, dans le chapitre IV consacré au *séries*, l'ordre "habituel" est suivi et les *régles* de convergences arrivent immédiatement (numéro 43) en bon ordre : Cauchy, Dalembert (*sic*) et n^α. Mais c'est la phrase péremptoire employée au numéro 45 qui fait sourire (jaune) : *Les trois règles que nous venons d'énoncer sont celles qu'on emploie le plus couramment et qu'il faut savoir appliquer sans hésitation*. Evidemment, avec une affirmation pareille, surtout étayée par les noms de Cauchy et d'Alembert (avec ou sans particule), la guerre est perdue d'avance. Le numéro 55 du livre, qui clôt le chapitre IV, est également fort instructif. Intitulé *Conseils pratiques pour l'étude d'une série*, il résume en quelques instructions simples la marche à suivre *la plus rationnelle* proposée à l'étudiant : après avoir vérifié que le terme général tendait vers 0, pour une série à termes positifs, on propose d'abord de voir si un équivalent avec *une série* (u_n) *très connue* se présente en évidence, et sinon immédiatement d' *essayer les règles de Cauchy, de Dalembert (*re-sic*) ou* $n^\alpha u_n$. Je trouve intéressante et révélatrice cette présentation : soit on *devine* un équivalent (il n'est pas mentionné qu'on puisse être amené à le *chercher*), soit on fonce tête baissée dans l'application mécanique de règles un peu bêbêtes. Certes dans une remarque finale, l'auteur indique que la marche proposée *n'a rien d'absolu*, mais il faudrait attribuer beaucoup de capacités de recul

aux étudiants, tout spécialement dans les classes à haute pression que sont les CPGE, pour penser qu'ils peuvent saisir la finesse d'une telle observation.

Dans le très célèbre traité de *Théorie des fonctions* de Georges Valiron (au demeurant, un très beau livre), la première partie du chapitre II *Séries et produits infinis* est encore plus laconique puisqu'elle ne présente la convergence des séries qu'à travers une liste de quelques règles, au premier rang desquelles se trouvent naturellement celles de Cauchy et d'Alembert présentées dans leur version *sophistiquée* avec limites supérieures et inférieures. On notera que l'unique application donnée à l'utilisation de la règle de Cauchy est la détermination du rayon de convergence d'une série entière.

Pour conclure cette brève et aléatoire revue de presse, il n'est pas inintéressant de regarder la façon dont Bourbaki conçoit l'étude des séries, en raison de la volonté affichée par les auteurs des Eléments de Mathématique de revenir à une forme de pureté en se débarassant de toutes les scories que des décennies de traditions mal remises à jour avaient déposé dans l'enseignement de la discipline. Et le constat est vite fait. Dans la première édition (1942) du Chapitre IV (*Nombres réels*) du Livre III de Topologie Générale, l'étude spécifique des séries et produits infinis numériques occupe trois pages (numéro 6, pp.125 à 127, non inclus les exercices), se référant à l'étude générale des familles sommables de réels qui occupe les premiers numéros. Dans le numéro 1 consacré aux sommes de réels positifs, on ne trouve qu'un unique théorème "actif" pour l'étude de la nature d'une série : le *principe de comparaison*, c'est à dire la majoration par le terme général d'une série convergente. Certes, on dira que Bourbaki n'est pas vraiment conçu comme un support de cours (en tout cas à destination des étudiants). Mais enfin, on peut raisonnablement lire ces chapitres comme une tentative d'extraction de la quintessence des notions élémentaires. Ce qui reste alors concernant les séries me semble hautement significatif.

3 Une vieille querelle

Pour illustrer le fait que cette question est fort ancienne, regardons des extraits de textes sur ce sujet qu'ont écrits deux mathématiciens français emblématiques de la première moitié du XXème siècle, Paul Lévy (1886-1971) et Maurice Fréchet (1878-1973).

Paul Lévy, dans son autobiographie *Quelques éléments de la pensée d'un mathématicien* revient sur ses années d'apprentissage, et à cette occasion mentionne sa rencontre avec les séries.

> *C'est, je crois, au début de décembre que notre professeur (...) commença à nous parler des séries. (...)[J]e n'avais jamais réfléchi au problème technique qui consiste à reconnaître la nature d'une série donnée. Dans le cours, on nous donnait trois règles, justifiées par des calculs dont l'idée directrice n'était pas bien mise en évidence. Pendant deux ou trois jours, je fus désorienté. Puis tout à coup je compris : pour les séries à termes positifs, si le terme général u_n de la série considérée tend assez vite vers zéro, les sommes successives S_n croissent lentement et la série est convergente ; si u_n décroît lentement, S_n croît plus vite et la série est divergente. Il s'agissait donc, pour étudier une série donnée, de mettre en évidence la rapidité de décroissance de son terme général u_n, et la situer par rapport à la coupure idéale qui sépare les séries convergentes des séries divergentes. La règle de Cauchy, basée sur le calcul de $u_n^{1/n}$, définit très grossièrement la place de cette coupure. La règle basée sur l'étude*

du produit $n^\alpha u_n$, est plus précise. La règle de Cauchy, étendue aux séries à termes imaginaires, reste tout de même intéressante, à cause de son application aux séries entières : il y a, à l'intérieur du cercle de convergence, la convergence rapide définie par cette règle ; à l'extérieur il y a divergence rapide. Sur la circonférence même, la règle de Cauchy ne peut rien apprendre. Quant à la règle de d'Alembert, par laquelle on commençait toujours, elle ne s'applique jamais que si la variation de u_n est assez régulière, et, dans ce cas, elle ne saurait aller plus loin que celle de Cauchy. Elle n'a d'intérêt que dans les cas, dont l'exemple le plus classique est celui où $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$, où l'étude du rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est, si on n'est pas déjà renseigné sur la rapidité de la croissance de $n!$, le seul moyen de démontrer que u_n tend rapidement vers zéro.

Je compris tout cela très rapidement, et quand plus tard je fis passer des examens d'admission à l'Ecole des Mines, je fus souvent exaspéré de voir qu'on ne l'avait pas dit aux candidats. Ils essayaient invariablement les trois règles, dans l'ordre. C'était prendre le problème à l'envers. Il fallait regarder l'expression de u_n, et, par des opérations permises, c'est à dire qui ne risquent pas de changer la nature de la série (par exemple : ajouter le terme général d'une série convergente ; remplacer u_n dans le cas où u_n est > 0 et $\to 0$, par un infiniment petit équivalent), la ramener à une expression plus simple. Alors la conclusion sera souvent immédiate.

Il est clair que si l'étudiant moyen faisait la démarche analytique sur la définition de la convergence que Lévy avait faite (et *très rapidement* dit-il...), nous n'aurions pas trop besoin de nous poser de questions sur la façon d'enseigner la notion de série. Mais

Tout le monde n'est pas Cézanne
Nous nous contenterons de peu...

Que peut-on dès lors tirer des commentaires de Lévy évoquant ses années de Classe Préparatoire (vers 1904) et ses années d'interrogateur des Mines (vers 1912) ? D'abord le fait que les trois règles lui avaient été présentées comme une sorte de préalable à la considération d'exemples. En second lieu, que la règle de Cauchy n'a d'intérêt important que pour la détermination du rayon de convergence d'une série entière. En troisième lieu que la règle de d'Alembert ne sert à rien du tout, si ce n'est à aborder des séries type (et souvent fabriquées *ad hoc*) . La présence d'un $n!$ fait se jeter sur d'Alembert n'importe quel étudiant par réflexe conditionné) qui se comparent de plus en général immédiatement avec des séries bien connues du type de la série exponentielle. Comme le dit l'auteur, la démarche de tester la convergence à l'aide des règles mentionnées, c'est prendre le problème à l'envers. La question que nous devons nous poser est de savoir dans quelle mesure cet état de choses ne résulterait pas de la présentation que nous faisons de ces questions aux étudiants. D'autant que nous savons bien que ce ne sont plus les mêmes étudiants, non qu'ils soient plus ou moins stupides, mais parce qu'ils sont moins préparés à une introspection mathématique que nous ne le fûmes en d'autres temps. De ce fait, si au lieu de leur farcir la tête avec des recettes de cuisine dont ils ne comprennent pas la portée, on s'obsédait à leur faire avaler une seule chose concernant les séries *qu'une série converge si son terme général tend suffisamment vite vers 0* et qu'une seule démarche technique *majorer, majorer et encore majorer*, peut-être éviterait-on l'écueil qui exaspérait déjà Lévy. Comme tout un chacun à l'université j'ai eu un jour à enseigner les séries et je me souviens d'une année où j'ai décidé de faire de la

résistance. L'enseignant qui faisait le cours avait naturellement repris le schéma habituel dont je parle depuis le début de cet article, et les étudiants, gobant passivement ce qu'on leur donnait (et à qui, me croira-t-on, importait assez peu de s'interroger comme Lévy élève l'avait fait…,) se préparaient invariablement à ânoner devant chaque série les sempiternelles règles. J'ai pris le taureau par les cornes, et décidé (sans bien entendu le mentionner à l'enseignant qui faisait le cours qui m'aurait immanquablement réprimandé…) que du semestre je ne parlerai jamais des règles en question mais que nous ne ferions que des majorations ou des minorations, dans tous les cas qui pourraient se présenter. Dans un sens, cette position était presque trop extrême mais du moins je crois pouvoir dire que pendant quelques mois (car je ne me fais aucune illusion…) ces étudiants ont eu comme première idée face à un terme général de série le sain réflexe d'essayer de repérer des inégalités, et je ne me rappelle pas que leurs résultats à l'examen aient été pires que ceux des autres groupes…Cette anecdote n'est pas racontée pour me glorifier mais pour dire qu'autre chose est possible, au prix de quelques efforts par forcément surhumains.

Le deuxième extrait que je veux proposer est tiré d'un rapport écrit par Maurice Fréchet quand il fut, dans les années 1920, interrogateur pour le concours d'entrée à l'Ecole Navale et que j'ai déniché dans l'énorme fonds d'archives Fréchet de l'Académie des Sciences. Les séries ne sont mentionnées qu'au passage, mais l'intérêt du texte me semble justifier de le proposer *in extenso* car il souligne combien il est important de sans cesse revenir sur nos modes d'enseignement pour éviter de tomber dans un académisme dont nous ne mesurons pas souvent la portée nuisible.

> *Le programme de l'examen d'entrée à l'Ecole Navale est très sensiblement le programme de la classe de mathématiques spéciales. Les observations que j'ai faites au cours des épreuves orales de cet examen peuvent donc être de quelque utilité aux professeurs de mathématiques spéciales. Je suis en effet persuadé que l'expérience acquise par ceux-ci dans leurs interrogations journalières n'est pas identique à celle que leur apporterait l'examen d'un grand nombre de candidats différents, à la fin de l'année scolaire.*
>
> *L'élève qui a préparé soigneusement une interrogation hebdomadaire peut tirer un réel profit de ses efforts de mémoire. Apprenant minutieusement un sujet très limité, il arrivera à reproduire très exactement le cours du professeur sans en avoir réellement pénétré les idées maîtresses. A l'examen annuel au contraire, il est rare que l'élève le plus consciencieux n'ait aucune défaillance de mémoire lorsqu'il doit répondre à une question posée au hasard sur un programme vingt fois plus étendu. S'il a conçu l'idée générale de la démonstration, il ne sera pas arrêté par cette défaillance et comblera tout seul la lacune, surmontera lui-même la difficulté qui se présente. Si au contraire, comme c'est malheureusement l'immense majorité des cas, il s'est attaché à retenir séparément les détails les plus infimes des solutions, l'oubli d'un maillon de la preuve le désoriente complètement. Il lui suffira par exemple d'avoir utilisé des notations différentes de celles qui figuraient dans la page du cours sur laquelle porte la question qui lui a été posée pour qu'il s'embrouille de plus en plus et irrémédiablement.*
>
> *Ainsi donc même si l'on compare les différentes méthodes de préparation en se plaçant au seul point de vue de leur efficacité à l'examen, il est très utile d'attirer particulièrement l'attention des élèves sur le principe, l'idée essentielle de chacune*

des méthodes qui leur sont enseignées. Peut-être est-il difficile de le faire sans rompre une exposition bien ordonnée avec lemmes préparatoires, énoncés méticuleusement pesés et corollaires bien à leurs places. Mais il est loisible au professeur de faire ces remarques en dehors du cours sous forme d'interrogations.

On éviterait ainsi souvent de présenter telle ou telle preuve dont le principe est particulièrement simple sous une forme où tout a été prévu sauf le fil directeur. Combien voit-on par exemple de candidats aligner une série de syllogismes séparément corrects pour démontrer que $\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m = e$ *et qui ne se sont jamais aperçus du fait essentiel et évident que que le terme de rang* p *du développement du binôme de* $(1+\frac{1}{m})^m$ *tend vers le terme de rang* p *de la série* e*. Que cette constatation ne soit pas suffisante en toute rigueur, cela ne doit pas être une raison d'en masquer l'importance.*

D'une façon générale, si l'élève est toujours prêt à faire crédit au professeur et à admettre que l'introduction de telle ou telle notion sera justifiée dans la suite du cours, le professeur ne devrait pas abuser de cette confiance.

Pourquoi par exemple introduit-on la notion de différentielle totale. Est-ce pour avoir ensuite le plaisir d'intégrer par exemple une équation aux différentielles totales ? N'est-ce pas plutôt une notion qui s'impose. Si l'on disait que la différentielle totale a été imaginée pour permettre de remplacer approximativement l'expression compliquée de l'accroissement d'une fonction par une fonction aussi simple que possible des accroissements des variables, on rendrait aussitôt manifeste la véritable utilité de la différentielle totale. On pourrait par exemple, avant de définir la différentielle totale, constater que sous des conditions simples on a

$$\Delta f = (f'_x + \epsilon)\Delta x + (f'_y + \epsilon')\Delta y$$

ϵ *et* ϵ' *étant infiniment petits en même temps que* Δx *et* Δy *et en conclure que* $f'_x\Delta x + f'_y\Delta y$ *est la fonction linéaire de* $\Delta x, \Delta y$ *qui est la plus approchée de* Δf *quand* Δx *et* Δy *sont petits. Il sera donc souvent suffisant de substituer approximativement l'une à l'autre et il sera utile de donner un nom à cette quantité* $f'_x\Delta x + f'_y\Delta y$ *dont la considération sera si commode. Ce sera la différentielle totale de* f*. Celle-ci se présente donc comme une fonction des accroissements* $\Delta x, \Delta y$ *qui est particulièrement simple puisqu'elle est du premier degré et qui pourtant pourra remplacer approximativement* Δf*, en ce sens que* $df - \Delta f$ *est infiniment petit par rapport au plus grand des deux nombres* $\mid \Delta x \mid$ *et* $\mid \Delta y \mid$.

On pourrait, il est vrai, objecter qu'on introduit ici une condition restrictive qui ne figure pas dans la définition ordinaire de la différentielle totale qui suppose seulement l'existence de f'_x *et* f'_y*. Mais c'est là précisément le grand défaut de cette définition, qu'elle n'est utilisable que si on la complète pas la condition ci-dessus, ou comme on le fait d'habitude par des conditions plus restrictives encore.*

De même, il ne suffit pas, pour mettre un élève en état d'étudier la convergence d'une série, de lui énoncer et de démontrer avec soin les différents critères de convergence. Il faut encore que cet élève apprenne à distinguer entre ces différents instruments ; il faut qu'il n'emploie pas une balance de précision, délicate à manier, lorsqu'une

grossière bascule suffit. Par exemple, avant de chercher la limite de $n \mid u_n \mid$, il est en général préférable de chercher celle de $\sqrt{|u_n \mid}$ ou de $\mid \frac{u_{n+1}}{u_n} \mid$ et bien des candidats ne savent pas pourquoi. Et à propos de ces expressions, il est regrettable de constater combien fréquemment les candidats parlent d'un nombre alors qu'ils pensent à sa valeur absolue, sans marquer aucune différence. Combien ignorent que la fonction primitive de $\frac{1}{x}$ est $L \mid x \mid$ et non Lx.

Pour ne pas trop allonger cette note, je me contenterai de signaler en terminant l'intérêt qu'il y aurait pour un professeur à employer systématiquement les mots finis et bornés dans un sens différent. Non que je conseille d'introduire dans le cours de mathématiques spéciales les subtilités de la théorie des fonctions de variables réelles. Mais j'ai observé que l'emploi différent de ces deux mots rendrait service en maintes occasions où le candidat emploie une périphrase ou n'arrive pas à exprimer sa pensée. Par exemple, il dira que le développement de Taylor de $f(x)$ est valable si cette fonction est dérivable indéfiniment et si ses dérivées sont finies alors qu'il veut exprimer que leurs valeurs absolues ont une borne supérieure finie indépendante de x et de l'ordre de dérivation.

Que faire ?

A la fin de ce tour d'horizon sur l'enseignement de l'analyse, et notamment celui des séries, certaines réactions sont hautement prévisibles, du genre : *Tout cela est bien joli et certainement vrai en partie. Mais il faut voir qu'avec les étudiants que nous avons, ne pas leur donner les recettes qu'ils attendent ne ferait qu'augmenter l'étendue du sinistre. Avec ces règles un peu bêbêtes, au moins ils savent faire quelque chose....* Combien de fois ai-je entendu ces jérémiades ? Eh bien j'espère par ce texte m'inscrire en faux contre cette idée intellectuellement nauséabonde que la seule réponse à donner au niveau alarmant des étudiants est d'espérer les transformer en robots en leur donnant des tches préprogrammées à effectuer. Je pense que si, pour les raisons que j'ai rappelées en introduction, nous tenons ce discours nous ne nous rendons pas compte de l'effet dévastateur qu'il peut avoir non seulement sur les étudiants, mais pour l'avenir de la discipline. Nous nous tirons une balle dans le pied. Et entre nous, au passage, nous donnons parfaitement raison à des collègues d'autres disciplines qui pensent (sans désir d'offense d'ailleurs), que mis à part pour un noyau infinitésimal d'étudiants qui se destinent à faire des mathématiques, les mathématiques qui sont *utiles* sont enseignables en quelques semaines et que cela est fort bien (ou mieux) fait par des non mathématiciens...

Pour conclure, je ne résiste pas au plaisir de raconter une anecdote. Ayant eu il y a quelques années à subir une petite intervention à l'hôpital, je me suis trouvé face à un chirurgien, grand *ponte* de sa spécialité, pour la visite pré-opératoire. Quand à sa demande, je lui ai annoncé ma profession d'enseignant-chercheur, il s'est encquis de ma spécialité. A l'énoncé du mot mathématiques sa moue a été suffisamment caractéristique pour que je n'ai pas besoin de la décrire, mais c'est surtout son commentaire que je veux mentionner : *Ah voilà bien une spécialité française...* (sous-entendu pour dilapider en vain l'argent du contribuable).

C'était un idiot ? Soit, c'est possible : on en trouve dans tous les milieux (et même parfois chez nous). Mais si nous voulons ne pas rester au niveau zéro de la pensée en nous retirant avec une

bonne conscience offensée dans notre tour d'ivoire, il faut regarder la vérité en face et essayer de comprendre pourquoi une personne cultivée (ce que j'ai appris par ailleurs quand j'ai raconté l'anecdote en question à un ami de ce médecin), occupant le haut du pavé d'une des spécialités les plus reconnues dans la société et l'université française, peut tenir un discours aussi réducteur sur les mathématiques. Et il me semble certain qu'une critique serrée de la forme que nous donnons à notre enseignement est un point important pour cela.