La théorie du hasard est-elle née par hasard ?

« Un problème relatif aux jeux de hasard, proposé à un austère janséniste par un homme du monde, a été l'origine du calcul des probabilités. »[1] Ce qu'a de piquant la rencontre de Pascal et du chevalier de Méré invite au mot d'esprit : on n'a pas manqué de la célébrer comme une heureuse chance. N'est-il pas merveilleux qu'un mathématicien de génie se soit trouvé là au bon moment pour répondre aux devinettes d'un joueur ? Et qu'il ait tiré parti de cette « occasion »[2] pour créer une nouvelle science ? Même Cournot, si sobre d'habitude, se laisse aller à faire un jeu de mots ; mais on sera peut-être encore plus surpris par les jugements dont il l'accompagne. S'il a fallu attendre Pascal pour que soit fondée la théorie mathématique du hasard, « ce retard même est un pur effet du hasard, puisque rien ne s'opposait à ce qu'un Grec de Cos ou d'Alexandrie eût pour les spéculations sur les chances le même goût que pour les spéculations sur le cône »[3]. Alors que l'invention du calcul infinitésimal ou de la mécanique rationnelle ne pouvaient « venir qu'à la suite d'une longue élaboration scientifique », l'esprit subtil des Grecs aurait très bien pu résoudre les problèmes qui avaient piqué la curiosité de Pascal et de Fermat[4].

Tout à l'inverse, on a pu dire récemment qu'il avait fallu attendre l'avènement de la moderne Théorie des Jeux pour que la découverte de Pascal apparaisse sous son véritable jour. L'ouvrage de Von Neumann et Morgenstern : *Theory of Games and Economic Behaviour* a marqué une date dans l'histoire des sciences humaines ; malgré les apparences, il ne s'agissait là ni d'une théorie particulière, ni même d'un instrument mathématique inédit offert aux seuls économistes ; conjointement avec les théories de la Décision Statistique fondées par Neyman et Wald, la théorie des jeux ouvrait la voie à une nouvelle manière d'aborder les problèmes, un nouveau mode de pensée ayant pour thème essentiel l'organisation rationnelle de l'action humaine. Depuis quelques années, la plupart des auteurs s'accordent pour situer soit la Cybernétique, soit la Recherche Opérationnelle dans la perspective d'une science de la conduite de l'action.

Il ne s'agit pas seulement de proposer un corps de recettes, mais de bâtir des modèles généraux, susceptibles de décrire adéquatement le comportement humain (lequel est toujours à quelque degré processus de décision et de choix), et pouvant ensuite servir de base à l'élaboration des décisions dans des situations complexes. Or, au moment même où il faisait connaître en France les perspectives nouvelles qu'ouvrait aux sciences sociales la théorie de la décision, G.-Th. Guilbaud en avait évoqué les dimensions séculaires : ce point de vue révolutionnaire était déjà celui auquel s'était placé Pascal[1]. Et une même inspiration avait guidé Jacques Bernoulli, Buffon, Condorcet... et bien d'autres probabilistes qui avaient vu dans le calcul des probabilités l'instrument par excellence de la raison lorsqu'elle s'applique aux « affaires de la vie civile » et qu'elle doit aider les hommes à mieux choisir là où les embarrasse l'intervention du hasard. Ce qui avait jeté dans l'oubli ce courant de pensée, c'est que, au XIX[e] siècle, la Physique avait fait de ce calcul son bien exclusif, et que ceux qui s'en servaient, soit en sociologie, soit en économie politique le faisaient en physiciens. Si la théorie de la décision et les disciplines qu'elle inspire veulent renouer avec leur véritable tradition, elles doivent commencer par rendre hommage à leur véritable fondateur : Pascal[2]. *Le problème des partis*, poursuit G.-Th. Guilbaud, est un problème de décision : les règles du jeu ont prévu toutes les issues finales possibles ; on saura donc répartir les enjeux lorsque la partie sera terminée ; mais si on l'interrompt avant son terme, comment se fera le partage ? Il faut alors trancher un cas qui n'avait pas été explicitement prévu : donc prendre une décision. Pour ce faire, il faudra savoir mesurer les probabilités, mais cette connaissance n'est qu'un moyen au service de cette science que Jacques Bernoulli appellera la Stochastique. Chez ses fondateurs, le calcul des probabilités serait ainsi proche en esprit de la praxéologie contemporaine[3].

Mais qu'en dira l'historien qui sait, lui, à quelles méprises on peut être conduit lorsqu'on est trop prompt à projeter sur le passé ses propres préoccupations ? La généalogie dont se réclament ces nouveaux venus est-elle bien attestée ? En parti-

1. S.-D. Poisson, *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, Paris, Bachelier, 1837, p. 1.

2. « Les mathématiciens de notre temps ont commencé à estimer les hasards à l'occasion des jeux. Le chevalier de Méré... y donna occasion en formant des questions sur les partis... » (Leibniz, *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*, Œuvres philosophiques, éd. P. Janet, Paris, 1866, t. I, p. 496).

3. A. A. Cournot, *Matérialisme, vitalisme, rationalisme. Études sur l'emploi des données de la science en philosophie*, Paris, Hachette, 1875, p. 315.

4. A. A. Cournot, *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes*, Paris, Boivin & Cie, Bibliothèque de Philosophie, 1934, t. I, pp. 234-235.

1. Dans deux articles fondamentaux : « Les problèmes de partage. Matériaux pour une enquête sur les algèbres et les arithmétiques de la répartition » (*Économie appliquée*, t. V, 1952, n° 1, janvier-mars, pp. 93-137) ; « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation » (*Économie appliquée*, t. V, 1952, n° 4, octobre-décembre, pp. 501-584).

2. C'est ce que font effectivement, à la suite des articles de G.-Th. Guilbaud, tous les auteurs qui, ayant à parler de recherche opérationnelle, de cybernétique, de théorie des jeux, etc., jettent au préalable un coup d'œil sur le passé. Cf. par exemple : A. Kaufmann, R. Faure et A. Le Garff, *Les jeux d'entreprise*, Paris, P.U.F., 1960, p. 22 ; R. Faure, J. P. Boss et A. Le Garff, *La recherche opérationnelle*, Paris, P.U.F., 1961, p. 6 ; P. Rosenstiehl et J. Mothes (*Mathématiques de l'action*, Paris, Dunod, 1965, p. 275 sqq.), amorcent un exposé sur l' « espérance d'un aléa numérique » par une analyse de « la règle des partis de Pascal ».

3. G.-Th. Guilbaud, *op. cit.*

culier, peut-on à bon droit se réclamer de Pascal s'il n'a rencontré le problème des partis que de façon purement contingente ? et si le caractère « décisionnel » qu'on attribue à cette question particulière n'appartenait qu'à elle, et n'était dû, pour parler comme Cournot, qu'à un simple « hasard historique » ? Il en serait sans doute tout autrement si elle était au contraire un des signes les plus manifestes d'un vaste mouvement de pensée, bref, le reflet d'un moment historique. Aussi chercherons-nous à déterminer si ce qui n'est apparemment qu'un petit « problème », au sens où l'entendent les mathématiciens, ne s'inscrit pas en fait dans une problématique beaucoup plus large.

~~tas de questions qui vont foisonner et donner des résultats souvent très remarquables. Il ne fait aucun doute que toute la théorie des équations fonctionnelles, des équations différentielles aux dérivées partielles, intégrales, intégro-différentielles, etc., a été depuis trois cents ans une source d'inspiration constante pour les mathématiciens, et cela non seulement par les problèmes auxquels elle donne lieu, mais quelquefois par ses méthodes. Les physiciens ont en effet des idées à eux sur les problèmes qu'ils posent. Comme ils connaissent leur science beaucoup mieux que nous, ils ont des raisons de croire que c'est à certaines lois, par exemple à des principes de maxima et de minima, que les phénomènes physiques doivent satisfaire. Cela inspire alors le mathématicien qui se dit : « Pour trouver une solution prenons une fonction qui donne un minimum; peut-être est-ce la solution. » Ce procédé, qui réussit effectivement dans beaucoup de cas, fournit un exemple typique où la physique, en quelque sorte, inspire les mathématiques, non seulement par les problèmes, mais même par les méthodes, révélant ainsi un lien extrêmement étroit des mathématiques avec la physique et les applications. En outre, depuis, disons, une cinquantaine ou une centaine d'années, sont apparus les statistiques, les ordinateurs; et l'algèbre ainsi que la théorie des probabilités sont devenues à leur tour immédiatement applicables à des quantités de questions où autrefois les mathématiques n'intervenaient pas. Tout cela pour reconnaître qu'il serait ridicule de dire que les mathématiques actuelles n'ont aucun rapport avec la réalité. Mais l'inverse est tout aussi ridicule. Dire que le reste des mathématiques n'a pas d'importance et n'a jamais été intéressant en quoi que ce soit est complètement contredit par toute l'histoire.~~

Quelquefois on vous dit : « Si ce ne sont pas les applications qui ont suscité les mathématiques, qu'est-ce donc? » Certains invoquent des raisons sociologiques. Je veux bien, mais je n'ai jamais rien vu de très convaincant dans ce sens-là. Il est évident — et tellement banal — qu'on ne peut pas faire de mathématiques quand le niveau social ne laisse pas un certain loisir et une certaine position sociale à ceux qui ont besoin de beaucoup de temps pour réfléchir et pour résoudre leurs problèmes. Il faut donc procurer aux mathématiciens en puissance un certain niveau de vie qui leur permette de consacrer énormément d'efforts et de concentration à leur recherche, sans être toujours occupés par la question de savoir s'ils mangeront

dans trois jours ou dans deux heures. Mais, à affirmer cela, on n'a rien expliqué du tout. C'est une de ces banalités qu'on ose à peine reformuler. Voici un petit problème pour ceux que cela intéresse : en 1796, le jeune Gauss, qui avait à l'époque dix-huit ou dix-neuf ans, s'est mis en tête de trouver une construction, par la règle et le compas, du polygone régulier à dix-sept côtés. Celui qui m'expliquera pourquoi le milieu social des petites cours allemandes du XVIIIᵉ siècle où vivait Gauss devait inévitablement le conduire à s'occuper de la construction du polygone régulier à dix-sept côtés, eh bien, je lui donnerai une médaille en chocolat. Mais tâchons d'être sérieux et revenons à la question de savoir ce qui fait démarrer les mathématiques. Je crois qu'on ne veut pas envisager quelque chose de tout à fait trivial et visible partout autour de nous : j'ai eu des enfants et des petits-enfants, et je vois les gosses passer leur temps à vous poser des devinettes, à exercer leur sagacité et leur curiosité en se précipitant sur les énigmes, les puzzles et les mots croisés avec une joie sans mélange. C'est un fait universel qu'on observe dans tous les pays et à toutes les époques : il y a une espèce de curiosité innée et naturelle de l'être humain à résoudre des devinettes. Ne cherchez pas plus loin, les neuf dixièmes des mathématiques, en dehors de celles qui ont été suscitées par des besoins pratiques, sont des résolutions de devinettes. ~~Si vous ne le croyez pas, voici quelques exemples :~~

~~D'abord, avant 1700 environ, personne n'aurait jamais osé soutenir cette croyance un peu stupide que seule la technique est à l'origine des mathématiques. Les Grecs étaient exactement de l'avis opposé. Des textes de Platon et d'Archimède foudroient de mépris les malheureux qui font servir les mathématiques à de viles besognes de calcul ou de mesure ([9]). Archimède lui-même dit — c'est Plutarque qui le rapporte ([10]) — qu'il était honteux des fameuses machines qu'il avait construites pour le siège de Syracuse, qu'il n'aurait jamais osé y consacrer un article parce que c'était de l'application et qu'il méprisait profondément ceux qui étaient assez vils pour s'occuper de choses pareilles. Aucun doute donc : l'idée que les mathématiques proviennent de besoins techniques est extrêmement récente et — comme je vous l'ai dit — tout à fait fausse. Commençons par des exemples tirés de l'Antiquité, parce que, justement, les Grecs ont commencé dès le Vᵉ siècle avant Jésus-Christ, et même avant, avec Pythagore, à se poser des problèmes dont il est visiblement impossible d'assigner les éventuelles origines pratiques. La~~

~~Il reste quelque chose de chaque énoncé ; la solution ou le problème, même si ce n'est, pour ce qui concerne le problème, que sa rationalité. La moitié de la solution de tout problème est déjà contenue dans sa formulation. Toute vérification ultérieure revient toujours à emprunter les rails intellectuels déjà existants. Un futur ne sera jamais tout à fait libéré du passé – que ce dernier soit normal ou anormal –, sauf à ce que les lois mêmes de sa structure spécifique de pensée engendrent une rupture avec ledit passé.~~

~~La tendance des systèmes d'opinions à perdurer nous prouve que ces systèmes doivent être regardés comme étant, pour ainsi dire, des entités à part entière, des configurations indépendantes ayant leur style propre. Ils ne sont pas simplement des sommes d'énoncés partiels ; en tant que totalités harmonieuses, ils révèlent des caractéristiques stylistiques particulières, chacune d'entre elles déterminant et conditionnant une fonction cognitive et une seule.~~

~~La fermeture des systèmes ainsi que les interactions entre ce qui est connu, ce qui est à connaître et ceux qui connaissaient assurent une harmonie à l'intérieur de ces systèmes, en même temps que cette fermeture et ces interactions garantissent une harmonie des illusions qui, par la suite, dans le domaine d'un style de pensée déterminé, ne saurait en aucune manière être dissoute.~~

4. Remarques introductives sur le collectif de pensée

Le conditionnement social de tout acte cognitif.

Une théorie de la connaissance ne doit pas considérer l'acte cognitif comme une relation binaire entre le

sujet et l'objet, entre celui qui connaît et ce qui est à connaître. Parce qu'il est un facteur fondamental de toute nouvelle connaissance, l'état du savoir du moment doit être le troisième terme de cette relation. Sinon il est impossible de comprendre comment on parvient à un système d'opinions fermé sur lui-même, ayant son style propre, et pourquoi on trouve des dispositions au développement d'une connaissance dans le passé qui, à leur époque, n'étaient légitimées par aucune raison « objective » (pré-idées).

Les connexions historiques et empreintes d'un style que l'on trouve à l'intérieur du savoir prouvent une interaction entre ce qui est connu et les connaissances en cours d'élaboration ; ce qui est déjà connu influence l'art et la manière dont sont élaborées de nouvelles connaissances, les connaissances en cours d'élaboration élargissent, renouvellent, donnent un sens nouveau à ce qui déjà est connu.

C'est pourquoi l'acte cognitif n'est en aucun cas le processus individuel d'une « conscience » théorique « existant de toute façon » ; il est le résultat d'une activité sociale, puisque l'état des connaissances du moment dépasse les limites imposées à un individu.

Formulé de la manière qui suit, l'énoncé : « Quelqu'un reconnaît quelque chose (une relation, un fait, une chose) » n'est pas complet, il ne fait pas sens en lui-même, pas plus que ne le font les énoncés : « Ce livre est plus gros » ou « la ville A se trouve à gauche de la ville B ». Il leur manque encore quelque chose. Pour les rendre corrects, il faudrait ajouter quelque chose comme « que ce livre » pour le deuxième énoncé ; et « si quelqu'un se tient sur la route entre A et B et a le visage tourné vers le nord » ou « si l'on emprunte la route de campagne allant de C vers B », pour le troisième énoncé, puisque les concepts « plus gros » et « gauche » induisent des relations et ne conservent un sens univoque que lorsqu'ils sont mis en relation avec des termes leur correspondant.

L'énoncé « quelqu'un reconnaît quelque chose » a besoin d'un complément du type : « En raison de cet état déterminé des connaissances », ou mieux, « en tant que partie prenante d'un milieu culturel déterminé », le meilleur étant « dans un style de pensée déterminé, dans un collectif de pensée déterminé ».

Si nous définissons un collectif de pensée comme *la communauté des personnes qui échangent des idées ou qui interagissent intellectuellement, alors nous tenons en lui le vecteur du développement historique d'un domaine de pensée, d'un état du savoir déterminé et d'un état de la culture, c'est-à-dire d'un style de pensée particulier*. C'est ainsi que le collectif de pensée apporte l'élément manquant de la relation cherchée.

Il manque un complément à l'énoncé : « Schaudinn a

PREMIÈRE PARTIE

LES SCHÉMAS DE STRUCTURE

CHAPITRE PREMIER

LE LOCAL ET LE GLOBAL

Un des traits caractéristiques du développement des mathématiques depuis le milieu du XIX^e siècle, c'est que les recherches mathématiques les plus différentes aient pu être poursuivies à un double point de vue, le point de vue local et le point de vue global. L'étude locale se porte vers l'élément, le plus souvent infinitésimal, de la réalité; elle cherche à le déterminer dans sa spécificité, puis cheminant de proche en proche, établit progressivement des liaisons assez solides entre les différentes parties ainsi reconnues, pour qu'une idée d'ensemble se dégage de leur juxtaposition. L'étude globale cherche au contraire à caractériser une totalité indépendamment des éléments qui la composent; elle s'attaque d'emblée à la structure de l'ensemble, assignant ainsi leur place aux éléments avant même que d'en connaître la nature; elle tend surtout à définir les êtres mathématiques par leurs propriétés fonctionnelles, estimant que le rôle qu'ils jouent leur confère une unité bien plus assurée que celle qui résulte de l'assemblage des parties.

La dualité du point de vue local et du point de vue global s'est tout d'abord présentée aux mathématiciens comme une opposition entre deux modes d'étude, irréductibles l'un à l'autre. Il semblait qu'il fallût choisir entre ces deux conceptions incompatibles, et de fait, la division qui s'installait ainsi au sein des mathématiques y subsiste encore aujourd'hui en bien des domaines. Nous voudrions rapidement montrer ce qu'il en est dans la théorie des fonctions analytiques, en géométrie, et dans la théorie des équations différentielles.

La conception de la fonction analytique selon les idées de Cauchy et de Riemann est une conception globale ou tout au moins régionale. Elle repose en effet sur la considération d'ensemble d'un domaine du plan de la variable complexe $z = x + iy$. Une expression complexe $\zeta = u + iv$ représente pour Cauchy une fonction analytique sur toute l'étendue de ce domaine, si l'on peut définir en chaque point du domaine, l'existence d'une dérivée unique de ζ par rapport à la variable complexe z. On sait que pour qu'une pareille dérivée existe, il faut que les fonctions u et v soient des fonctions continues de x et de y possédant des dérivées partielles continues du premier ordre et satisfaisant aux équations différentielles (dites de Riemann) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

La fonction analytique définie ainsi par l'unicité de la dérivée en chaque point n'est pas encore une notion définie du point de vue global mais elle conduit à la théorie de l'intégrale qui est au plus haut degré une notion globale : la valeur d'une fonction analytique en un point intérieur z d'un domaine limité par une courbe fermée C est déterminée par la valeur de la fonction sur la courbe frontière :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz,$$

si le domaine en question est simplement connexe, c'est-à-dire n'a pour frontière que la seule courbe fermée C. On voit ainsi intervenir dans cette définition des propriétés structurales de simple connexion relatives à la topologie du domaine de base. Nous étudierons dans un chapitre ultérieur toute l'importance qu'ont prise avec Riemann ces considérations topologiques et comment elles ont permis de lier l'existence de fonctions analytiques à l'existence de domaines de base, définis dans leur totalité par leurs propriétés topologiques. Les conditions relatives à l'existence de la dérivée en chaque point ne jouent plus le premier rôle, et la fonction n'est plus tant définie par ses propriétés en chaque point du domaine que parce qu'elle est appropriée au domaine tout entier.

A la conception globale de Riemann s'oppose la conception locale de Weierstrass. Une fonction analytique est essentiellement définie pour Weierstrass au voisinage d'un point complexe z_0, par une série de puissances à coefficients numériques, qui converge dans un « cercle de convergence » autour du point z_0. La méthode du « prolongement analytique » permet ensuite de construire de proche en proche tout un domaine où la

fonction est dite « analytique » et cela de la façon suivante : on prend comme nouveau centre un point intérieur du premier cercle, on obtient ainsi à la fois une nouvelle série et un nouveau cercle de convergence qui peut déborder le premier. La nouvelle série prolonge la première si leurs valeurs coïncident dans la partie commune des deux cercles. La série peut être prolongée ainsi dans toutes les directions jusqu'aux points dans le voisinage immédiat desquels les séries obtenues divergeraient. On voit donc que dans cette méthode le domaine n'est pas circonscrit à l'avance, mais résulte plutôt de la succession infinie des opérations locales.

La théorie de Weierstrass s'est développée en opposition voulue avec la conception intégrale de Cauchy et Riemann. Si, de nos jours, certains auteurs comme M. Bieberbach présentent un exposé d'ensemble de la théorie des fonctions analytiques où les deux points de vue sont intimement mêlés, d'autres au contraire comme Goursat ou M. Courant[1] estiment nécessaire de maintenir une séparation entre les conceptions de Cauchy-Riemann et celles de Weierstrass. Nous aurons l'occasion de voir plus loin l'importance que cette séparation des points de vue présente également aux yeux de M. Hermann Weyl[2].

En ce qui concerne la géométrie et la théorie des groupes, nous ne pourrons mieux faire que de nous inspirer des articles célèbres que M. Cartan a publiés sur la question[3]. Il met toujours au premier plan de ses exposés généraux sur la géométrie, les différences profondes qui ont séparé jusqu'à la théorie de la Relativité la conception globale de l'espace telle que l'a définie F. Klein dans son fameux « programme d'Erlangen » de 1872, et la conception infinitésimale de Riemann développée dans le mémoire de 1854, *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu grunde liegen*[4]. Une géométrie au sens de Klein est l'étude des propriétés des figures qui sont conservées lorsqu'on fait subir à l'espace pris dans son ensemble certaines transformations formant ce qu'on appelle un groupe de transformations. La géométrie euclidienne est ainsi l'étude des propriétés des figures qui sont

1. *Cf.* R. Courant, préface à l'*Allgemeine Funktionentheorie* de Ad. Hurwitz et R. Courant, Berlin, Springer, 1925.

2. En fait, l'étude globale et l'étude locale n'amènent pas à des résultats strictement équivalents, M. Borel a, en effet, démontré par la découverte de classes de fonctions quasi analytiques que la classe des fonctions de Cauchy est plus étendue que la classe des fonctions de Weierstrass.

3. Voir principalement E. Cartan, « Les récentes généralisations de la notion d'espace », *Bulletin des Sc. Math.*, t. 48, année 1924, p. 294 ; « La théorie des groupes et des recherches récentes de géométrie différentielle », *Enseignement math.*, année 1924, p. 1 et surtout « La théorie des groupes et la géométrie », *Enseignement math.*, année 1927, p. 211.

4. Voir *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1867.

« Je devrais être un adhérent des Social Sciences à la mode, tant j'ai été conscient toute ma vie du caractère collectif de la science, du mouvement souterrain d'informations qui se trouvent à point nommé là où il faut (…) du caractère injuste de beaucoup d'attributions, du caractère fragile de la connaissance (…). Il me faut expliquer pourquoi je n'y adhère pas. Je sais parfaitement ce qu'on peut dire de la Science. Les gens lui demandent beaucoup trop, mais moi non. Non seulement j'ai depuis longtemps renoncé à tout savoir, mais je me suis persuadé que si je savais tout, je ne saurais pas grand chose. Cependant, mon enthousiasme pour la science n'a pas diminué, et je suis heureux d'avoir participé à la vie scientifique, même de façon relativement marginale.

L'histoire des sciences telle qu'elle est racontée dans les *Social Sciences* est dépourvue de toute grandeur humaine. Elle ne s'exprime qu'en termes de pressions sociales, réseaux d'influences, copinages et hostilités. Je me rappelle avoir voyagé entre Paris et Strasbourg dans le même compartiment que trois profs. Pendant tout le trajet ils n'ont parlé qu'avancement : proviseurs, syndicats, commissions, concours. C'est l'univers des *Social Sciences*. Moi qui ai été un étudiant-2CV des années 50, j'y reconnais les étudiants-Austin des années 70, nés dans un monde pauvre en postes. Les *Social Sciences* ne sont que l'expression des classes moyennes frustrées. »