ENS Cachan, Antenne de Bretagne

Stage de fin de deuxième année

La théorie de l'intégration de Lebesgue

Par :
Victor Wasiolek

Encadrement :
Laurent Mazliak

28 août 2010

Table des matières

Introduction

Le problème de l'estimation de la mesure des surfaces est extrêmement ancien. On possède des traces de tels calculs, souvent en liaison avec des pratiques ésotériques et religieuses, dans des civilisations très anciennes de l'Antiquité, en Inde ou en Mésopotamie.

Ce sont cependant les *Élements* d'Euclide qui nous restent comme témoignage le plus vieux concernant ces interrogations, et c'est chez Archimède qu'on trouve systématisées certaines techniques d'approximations, telles que celles consistant à découper les aires en petits rectangles ou triangles, dont les aires deviennent de plus en plus petites, et sommer ces aires.

L'apparition de la notion de fonction et d'intégrale au $XVII^{ème}$ siècle allait établir un lien entre la question, géométrique, de la mesure des aires et celle, analytique, du calcul des intégrales. Le travail qui suit veut suivre l'évolution de ce lien entre la fin du $XVIII^{ème}$ siècle et le début du $XX^{ème}$ siècle, où les travaux révolutionnaires de Lebesgue changèrent l'approche de l'intégrale au point de surmonter nombre des difficultés accumulées suite aux questions soulevées par les recherches dans le courant du $XIX^{ème}$ siècle, au premier rang desquelles on trouve les études sur les développements en séries trigonométriques, inaugurées par Fourier.

Notre article se veut une étude historique. Elle se fonde sur les ouvrages et articles des différents acteurs de cette histoire, afin de les commenter et de rendre compte au mieux des multiples évolutions de cette théorie. Naturellement, un processus historique s'inscrivant dans des temps et lieux donnés, nous aurons aussi à évoquer les contextes dans lesquels cette trame a pu s'inscrire - contexte social et politique dont l'intéraction avec notre sujet se montrera parfois plus présente qu'on ne s'y attendrait en premier lieu. Nous prendrons également en compte un certain nombre de sources secondaires traitant des sujets que nous considérons, dont l'importance a naturellement attiré l'attention de nombreux historiens par le passé. Plus particulièrement, cette étude s'appuie en grande partie sur le cours du Master de Mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris), intitulé "Histoire des mathématiques : construction d'un objet mathématique", que Laurent Mazliak a enseigné depuis l'année scolaire 2008-09.

Notre travail est organisé comme suit. Nous étudierons dans un premier temps la manière dont la définition de l'intégrale s'est mise en place avec Cauchy, et les différents problèmes que soulevaient ces définitions, notamment quand il s'agissait de les faire fonctionner dans le cadre des études de Fourier et de ses successeurs, au premier rang duquel Dirichlet. Nous étudierons les évolutions de ces définitions, et en particulier les travaux fondateurs de Riemann. Puis, en évoquant les notions qui ont permis aux mathématiciens de traiter des problèmes annexes, en particulier autour des questions fondant la théorie des ensembles et la topologie, nous constaterons les bouleversements qu'engendrèrent les théories de Peano, Jordan et Borel, et plus particulièrement ce dont s'est inspiré Lebesgue pour construire ce qui deviendra la théorie de la mesure adoptée par les mathématiciens à partir du $XX^{\text{ème}}$ siècle.

1 Les prémices de l'intégrale

1.1 Intégration et séries trigonométriques

Si Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) n'a pas consacré ses études mathématiques à la théorie de l'intégration, sa *Théorie analytique de la chaleur* [Fourier, 1822] fut un élément central pour le développement de cette théorie, ou plutôt de ces théories. Son étude sur les séries trigonométriques favorisa l'émergence de nouveaux questionnements sur lesquels de nombreux mathématiciens du $XIX^{\text{ème}}$ siècle allaient se pencher : nombre de travaux sur l'intégrale furent motivés par les propriétés de convergence des séries de Fourier, et comme nous allons le voir tout au long de cet article, les deux théories progressèrent simultanément.

Après avoir intégré l'École Normale en 1795 [1], Fourier eut l'occasion d'enseigner à l'École Polytechnique en 1797, puis de faire partie de l'expédition d'Égypte en 1798. Remarqué pour ses qualités d'organisateur, il fut nommé à la préfecture de l'Isère en 1801 [2], et c'est à Grenoble que Fourier s'intéresse à la théorie de la propagation de la chaleur. Il présenta son mémoire à l'Académie des Sciences, la *Théorie analytique de la chaleur* [Fourier, 1822], en 1807. Cette dernière sera écartée pour manque de rigueur et pour son côté novateur. Néanmoins, ce même mémoire recevra en 1811 le prix de l'Académie, et ne sera publié qu'en 1822.

Rappelons dans un premier temps que Fourier avait une approche des notions de fonction, de continuité, de discontinuité, d'infini, ou d'aire, sensiblement différentes de la conception contemporaine.

Fourier ayant reçu son éducation au $XVIII^{\text{ème}}$ siècle, il conservait la même notion d'une fonction discontinue que Leonhard Euler (1707-1783), le plus grand analyste de ce siècle. Apparemment, ce dernier voyait les fonctions discontinues comme des fonctions qui se définissaient par morceaux, à l'aide de plusieurs formules ; Fourier aurait gardé cette idée-là.

Par exemple, Fourier considère la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ e^{x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

comme une fonction discontinue ; nous la considérerions continue aujourd'hui.

1. L'École Normale fut créée en octobre 1794, Fourier fut donc l'un des premiers élèves. Il y suivra entre autres les cours de Lagrange, Laplace et Monge.

2. nommé par Bonaparte ; il y restera de 1801 à 1815.

"On voit ici un second exemple d'une fonction d'une fonction discontinue exprimée par une intégrale définie. Cette fonction $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \dfrac{dq\cos qx}{1+q^2}$ *équivaut à* e^{-x} *lorsque* x *est positive, mais elle est* e^x *lorsque* x *est négative."*[3]

On pourrait croire qu'en utilisant le terme "fonction arbitraire" dans sa *Théorie analytique de la chaleur* [Fourier, 1822], Fourier se faisait une idée très générale de la notion de fonction :

"En général, la fonction fx *représente une suite de valeurs ou d'ordonnées dont chacune est arbitraire. L'abscisse* x *pouvant recevoir une infinité de valeurs, il y a un pareil nombre d'ordonnées* fx*. Toutes ont des valeurs numériques* actuelles, *ou positives, ou négatives, ou nulles. On ne suppose point que ces ordonnées soient assujetties à une loi commune ; elles se succèdent d'une manière quelconque, et chacune d'elles est donnée comme le serait une seule quantité."*[4]

"Cette équation sert à développer une fonction arbitraire fx *en une suite de sinus et de cosinus d'arcs multiples. La fonction* fx *désigne une fonction entièrement arbitraire, c'est-à-dire une suite de valeurs données, assujetties ou non à une loi commune, et qui répondent à toutes les valeurs de* x *comprises entre* 0 *et une grandeur quelconque* X*."*[5]

Cependant, en pratique, Fourier considérait une fonction "arbitraire" comme une fonction qui "ne peut pas se décrire à l'aide d'une seule équation", à l'instar de ses prédécesseurs. On peut imaginer que Fourier pensait ces deux notions équivalentes.

La thèse de Fourier était avant tout destinée à l'étude de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\Delta T$$

3. *Théorie analytique de la chaleur*, [Fourier, 1822] p.435
4. *Théorie analytique de la chaleur*, [Fourier, 1822] p.554
5. *Théorie analytique de la chaleur*, [Fourier, 1822] p.552

où Δ désigne le Laplacien.

En dimension 1, Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) avait prouvé [6] en 1747 grâce à l'étude de la corde vibrante - pour laquelle les ondes vérifiaient le même type d'équation - que les solutions étaient de la forme :

$$T(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t)\right]$$

où f devait être continue pour D'Alembert, mais pouvait être discontinue pour Euler (continue et discontinue au sens du $XVIII^{ème}$ siècle).

Plus tard, Daniel Bernoulli (1700-1782) montrait que cette fontion f doit nécessairement être de la forme :

$$f(x) = a_1 \sin(\frac{\pi x}{L}) + a_2 \sin(\frac{2\pi x}{L}) + a_3 \sin(\frac{3\pi x}{L}) + ...$$

où L désigne la longueur de la corde vibrante. Bernoulli émit alors l'hypothèse que n'importe quelle fonction "arbitraire" définie sur un intervalle fini de longueur L peut s'écrire sous la forme d'une série trigonométrique. Il resterait à savoir ce que Bernoulli entendait par fonction "arbitraire", même s'il s'agissait probablement de la même notion que celle de Fourier. Dans tous les cas, la nécessité de cette forme n'était pas claire pour de nombreux mathématiciens, dont D'Alembert, qui certes considérait que les fonctions de Bernoulli étaient solutions de l'équation de la chaleur, mais ne pensait pas que ces fonctions étaient les seules.

Fourier s'est certainement inspiré des résultats de Bernoulli pour ses travaux, puisqu'il cherchait à prouver que toute fonction bornée définie sur un intervalle de longueur $2a$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right))$$

avec

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

Comme beaucoup de mathématiciens du $XVIII^{ème}$ siècle, Fourier voyait le procédé d'intégration comme le calcul d'une aire, et non comme le procédé inverse de la dérivation :

6. cf. *Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration* [D'Alembert, 1747]

“Il faut en général, pour construire les valeurs des coëfficients a b c d e... etc., imaginer que les courbes, dont les équations sont

$$y = \sin .x, y = \sin .2x, y = \sin .3x, y = \sin .4x, \text{ etc.},$$

ont été tracées pour un même intervalle sur l'axe des x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$; et qu'ensuite on a changé ces courbes en multipliant toutes leurs ordonnées par les ordonnées correspondantes d'une même courbe, dont l'équation est $y = \varphi x$. Les équations des courbes réduites, sont :

$$y = \sin .x.\varphi x, y = \sin .2x.\varphi x, y = \sin .3x.\varphi x, y = \sin .4x.\varphi x, \text{ etc.},$$

Les aires de ces dernières courbes, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, seront les valeurs des coëfficients a b c d etc., dans l'équation

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = a \sin .x + b \sin .2x + c \sin .3x + d \sin .4x + \text{ etc.”}$$ [7]

Si nous savons aujourd'hui que le résultat de Fourier n'est pas valable pour toute fonction “arbitraire”, il reste que son raisonnement va mettre en exergue les questions que vont se poser de nombreux mathématiciens dans les années qui suivent.

La première preuve que Fourier donne de son résultat passe par une résolution de systèmes linéaires. Il prend une fonction “arbitraire”, qu'il développe en série entière, puis cherche à déterminer les coefficients de Fourier par identification avec les coefficients de la série entière.

“On examinera, en premier lieu, le cas où il s'agit de réduire en une série de sinus d'arcs multiples, une fonction dont le développement ne contient que des puissances impaires de la variable. Désignant une telle fonction par φx, on posera l'équation

$$\varphi x = a \sin .x + b \sin .2x + c \sin .3x + d \sin .4x + ... \text{ etc.}$$

et il s'agit de déterminer la valeur des coëfficients a, b, c, d,etc.
On écrira d'abord l'équation

$$\varphi x = x\varphi'0 + \frac{x^2}{2}\varphi''0 + \frac{x^3}{2.3}\varphi'''0 + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{iv}0 + \frac{x^5}{2.3.4.5}\varphi^{v}0 + \text{ ... etc.}$$

dans laquelle $\varphi'0, \varphi''0, \varphi'''0, \varphi^{iv}0$, *etc. désignent les valeurs que prennent les coëfficients*

$$\frac{d.\varphi x}{dx}, \frac{d^2.\varphi x}{dx^2}, \frac{d^3.\varphi x}{dx^3}, \frac{d^4.\varphi x}{dx^4}, \text{ etc.}$$

lorsqu'on y suppose $x = 0$. *Ainsi en représentant le développement selon les puissances de* x *par l'équation*

$$\varphi x = Ax - B\frac{x^3}{2.3} + C\frac{x^5}{2.3.4.5} - D\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + E\frac{x^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \text{etc.}$$

$$\begin{array}{llcl} \textit{on aura} & \varphi 0 = 0 & \text{et} & \varphi' 0 = A \\ & \varphi'' 0 = 0 & & \varphi''' 0 = B \\ & \varphi^{iv} 0 = 0 & & \varphi^{v} 0 = C \\ & \varphi^{vi} 0 = 0 & & \varphi^{vii} 0 = D \\ & \text{etc.} & & \text{etc.} \end{array}$$

Si maintenant on compare l'équation précédente à celle-ci

$$\varphi x = a \sin .x + b \sin .2x + c \sin .3x + d \sin .4x + e \sin .5x + \text{etc.}$$

En développant le second membre par rapport aux puissances de x, *on aura les équations*

$$\begin{aligned} A &= a + 2b + 3c + 4d + 5e + \text{etc.} \\ B &= a + 2^3b + 3^3c + 4^3d + 5^3e + \text{etc.} \\ C &= a + 2^5b + 3^5c + 4^5d + 5^5e + \text{etc.} \\ D &= a + 2^7b + 3^7c + 4^7d + 5^7e + \text{etc.} \\ E &= a + 2^9b + 3^9c + 4^9d + 5^9e + \text{etc.} \quad \text{(a)} \end{aligned}$$

Ces équations doivent servir à trouver les coëfficients a, b, c, d, e, *etc., dont le nombre est infini."*[8]

Il donne ensuite une seconde preuve :

8. *Théorie analytique de la chaleur*, [Fourier, 1822] p.211-212

"On peut aussi vérifier l'équation précédente[9] *en déterminant immédiatement les quantités $a_1 a_2 a_3 ... a_j$ etc., dans l'équation :*

$$\phi x = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + ...a_j \sin jx + ...etc.$$

pour cela on multipliera chacun des membres de la dernière équation, par $\sin ixdx$, i étant un nombre entier, et l'on prendra l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, on aura

$$\begin{aligned} S(\phi x . \sin ixdx) =& a_1 S(\sin x . \sin ixdx) + a_2 S(\sin 2x . \sin ixdx) + \\ & ...a_j S(\sin jx . \sin ixdx) + ... \, etc. \end{aligned}$$

Or on peut facilement prouver, 1° que toutes les intégrales qui entrent dans le second membre, ont une valeur nulle, excepté le seul terme $a_i S(\sin ix . \sin ixdx)$; 2° que la valeur de $S(\sin ix . \sin ixdx)$ est $\frac{1}{2}\pi$; d'où l'on conclura la valeur de a_i, qui est $\frac{S(\phi x . \sin ixdx)}{\frac{1}{2}\pi}$."[10]

On peut remarquer que Fourier ne prête pas attention à l'interversion $\sum$-$\int$ (que Fourier notait S), il faudra d'ailleurs attendre les années 1860 pour que Weierstrass s'intéresse réellement à ce problème. Fourier omet également de se demander si les intégrales $S(\phi x . \sin ixdx)$ existent pour n'importe quelle fonction ϕ.

Néanmoins rappelons que l'objectif principal de Fourier était d'obtenir des résultats pour sa *Théorie de la chaleur*, et non d'établir des résultats généraux sur la théorie de l'intégration. Aussi explique-t-il son "manque de rigueur", notamment dans le fait qu'il n'ait pas prouvé la convergence de ces séries :

"En général les suites trigonométriques auxquelles nous sommes parvenus, en développant les diverses fonctions, sont toujours convergentes : mais il ne nous a point paru nécessaire de le démontrer ici : car les termes qui composent ces suites ne sont que les coëfficients des termes des séries qui donnent les valeurs des températures ; et ces coëfficients affectent des quantités exponentielles qui décroissent très-rapidement, en sorte que ces dernières séries sont très-convergentes."[11]

9. Il s'agit de l'équation $\frac{1}{2}\pi\phi x = \sin x S(\sin x . \phi x dx) + ... + \sin ix S(\sin ix . \phi x dx) + etc.$ qu'il veut montrer dans le cas d'une fonction ϕ impaire - S désigne le signe d'intégration

10. *Théorie analytique de la chaleur*, [Fourier, 1822] p.235-236

11. *Théorie analytique de la chaleur*, [Fourier, 1822] p.246-247

C'est probablement parce que les fonctions auxquelles il songeait devaient correspondre à une situation physique concrète que Fourier n'était pas préoccupé par l'existence de fonctions qui ne seraient pas développables en séries trigonométriques.

1.2 Continuité et définition analytique de l'intégrale

Le mathématicien que nous considérons ensuite est Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Même s'il entretint toute sa vie des opinions politiques farouchement hostiles à la Révolution Française, il ne fait pas de doute que sa carrière fut un pur produit des réalisations de cette dernière. Professeur à l'École Polytechnique à partir de 1815, il n'eut de cesse de promouvoir une mathématique toute de rigueur et de clarté pour faciliter la transmission aux nouvelles élites techniciennes en formation. C'est donc avant tout dans un but pédagogique qu'il publia en 1821 et 1823 ses *Cours d'analyse algébrique* [Cauchy, 1821] et son *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* [Cauchy, 1823]. Ainsi ces ouvrages virent apparaître des notions plus rigoureuses de continuité, discontinuité, limite. Il y donnera de plus sa propre définition de l'intégrale. L'ensemble de ses notes sera publié en 1829 [12]. Ces cours eurent en outre une influence considérable sur les autres mathématiciens. Abel, qui avait pourtant eu maille à partir avec Cauchy, ne cachait pas son admiration pour la modernité de son approche :

> *"Cauchy est fou, mais actuellement c'est le seul qui sache comment on doit faire des mathématiques"*
>
> (Abel, 1826)

Comme c'était le cas pour Fourier, Cauchy paraît avoir eu une notion de fonction assez générale. En effet, Cauchy disait que y était une fonction de x si une valeur particulière de x détermine une valeur de y.

Cependant les notes de cours de 1821 et 1823 semblent indiquer que Cauchy sépare les fonctions en deux catégories : celles définies par une unique formule, et celles définies par le fait d'être solution d'une équation donnée. La notion de fonction est donc généralisée, mais on ne peut toujours pas considérer ces fonctions comme des fonctions quelconques au sens moderne.

Dans ses notes de 1821, Cauchy décrivait la continuité d'une fonction f en un point x comme suit :

12. *Leçons sur le calcul différentiel*, [Cauchy, 1829]

> *"Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x fonction* continue *de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence*
>
> $$f(x+\alpha) - f(x)$$
>
> *décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes,* la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. *"*[13]

Autrement dit, f est continue si pour tout x de l'intervalle :

$$f(x+\alpha) - f(x) \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0$$

On note donc que Cauchy définit la continuité sur un segment et non en un point ; il s'agirait donc plutôt de continuité uniforme. En revanche, sa définition de la discontinuité n'est pas comme on pourrait le penser "ne pas être continu", mais "ne pas être continu sur chaque voisinage de x", c'est-à-dire qu'une fonction sera discontinue en x si tout voisinage de x contient un point où la fonction n'est pas continue[14].

> *"Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle devient alors* discontinue *et qu'il y a pour cette valeur particulière* solution de continuité.*"*[15]

Par la suite, cette définition de la discontinuité n'a pas été adoptée. La plupart des mathématiciens considèraient une fonction comme discontinue lorsqu'elle est de la forme

13. *Cours d'analyse algébrique*, [Cauchy, 1821] p.43
14. Par exemple, si l'on considère la fonction :

$$f(x) = \begin{matrix} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \, p \wedge q = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{matrix}$$

On montre que f est continue sur les irrationnels et discontinue sur les rationnels ; elle sera donc pour Cauchy discontinue partout, puisque chaque voisinage d'un point contient des rationnels.

15. *Cours d'analyse algébrique*, [Cauchy, 1821] p.43

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_{I_i}(x) g_i(x)$$

où les I_i partitionnent l'intervalle sur lequel est définie la fonction, où χ désigne la fonction indicatrice, et où les g_i sont continues (dans le sens d'Euler cette fois).

Par la suite, et notamment dans son *Mémoire sur les fonctions discontinues* [Cauchy, 1849], Cauchy reprendra cette définition de la discontinuité, mais avec les g_i continues en son sens :

> *"On y parvient en considérant les fonctions discontinues comme des valeurs particulières de fonctions plus générales, mais continues, desquelles on les tire en réduisant à zéro un paramètre spécial. [...] Ajoutons que, dans ce cas, la fonction discontinue peut être considérée comme équivalente au produit de la fonction continue donnée par un coefficient qui se réduise toujours à l'unité entre les limites proposées, et à zéro en dehors de ces limites."*[16]

Cauchy est apparemment conscient qu'il existe d'autres formes de fonctions discontinues, puisqu'il utilise les termes *"il arrive* souvent *qu'une fonction discontinue..."* et *"...cessent* généralement *d'être continues..."*.

> *"Il importe d'observer que les fonctions discontinues introduites dans le calcul par la considération de l'état initial d'un système ne cessent généralement d'être continues que pour certaines valeurs des variables qu'elles renferment. Ainsi, par exemple, il arrive souvent qu'une fonction discontinue d'une ou de plusieurs variables se confonde entre des limites données de ces variables avec une certaine fonction continue, et passe brusquement, hors de ces limites, d'une valeur sensible à une valeur nulle."*[17]

Dans ses notes de 1823 [Cauchy, 1823], Cauchy donne sa définition de l'intégrale pour une fonction continue sur un intervalle $[x_0; X]$. Il commence par partitionner l'intervalle en $x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = X$, puis considère la somme

16. *Mémoire sur les fonctions discontinues*, [Cauchy, 1849] p.123-124
17. *Cours d'analyse algébrique*, [Cauchy, 1849] p.123

$$S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})$$

> *"Or il importe de remarquer que, si les valeurs numériques des éléments deviennent très petites et le nombre n très considérable, le mode de division n'aura plus sur la valeur de S qu'une influence insensible."*[18]

Cauchy va alors montrer que si les normes de deux partitions P et P' diffèrent d'une assez petite quantité, alors les deux sommes S et S' vont différer d'une quantité aussi petite que l'on veut. Ce que l'on noterait aujourd'hui par

$$|S - S'| \xrightarrow[|P-P'| \to 0]{} 0$$

La série S est donc une série qui vérifie le critère de Cauchy (un des outils fondamentaux introduit dans les travaux d'analyse de Cauchy), et qui converge donc vers un nombre réel que Cauchy appelle l'*intégrale définie* de f entre x_0 et X.

> *"...la valeur de S finira par être sensiblement constante ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x. Cette limite est ce que l'on appelle une* intégrale définie.*"*[19]

Dans la suite de son *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* [Cauchy, 1823], Cauchy va introduire la fonction

$$\mathcal{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx \quad \text{(notations de Cauchy)}$$

Il montre que cette fonction, toujours pour f continue, est différentiable ; il montre en outre que :
- $\mathcal{F}' = f$.
- Toutes les primitives de f sont de la forme $\int_a^x f + C$ où C est constante.
- Si $\pi'(x) = 0$ pour tout x dans $[x_0; X]$ alors $\pi(x)$ reste constant sur cet intervalle.

18. *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*, [Cauchy, 1823] p.122-123
19. *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*, [Cauchy, 1823] p.125

Les deux résultats en question, que nous appelerons "Théorèmes fondamentaux de l'intégration" :

- **Théorème 1** :

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

- **Théorème 2** :

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

joueront par la suite un rôle essentiel, lorsque l'on cherchera à préciser sous quelles hypothèses ils restent valables.

Dans le cas de Cauchy, celui-ci a prouvé le premier théorème fondamental pour f continue, et le second théorème fondamental pour f et f' continues, où l'intégrale doit être comprise au sens de Cauchy.

Cauchy a d'ailleurs remarqué que l'on peut étendre cette définition aisément aux fonctions f discontinues (en son sens, c'est-à-dire $\sum \chi_{I_i} g_i$, avec les g_i continues). Il suffit simplement de remarquer qu'en une discontinuité c, les deux limites

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_0}^{c-\varepsilon} f$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{X} f$$

existent, et que l'on peut alors définir

$$\int_{x_0}^X f = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_0}^{c-\varepsilon} f + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{X} f$$

Les deux théorèmes fondamentaux peuvent alors se prouver pour les fonctions discontinues en un nombre fini de points. C'est à Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) que reviendra quelques années plus tard le mérite de s'intéresser au cas où les fonctions sont discontinues sur une infinité de points.

1.3 De la France à l'Allemagne : convergence des séries de Fourier

Comme nous allons le voir, Dirichlet fut le personnage qui réalisa le transfert en Allemagne des résultats et méthodes de l'analyse française, et c'est en grande partie grâce à Dirichlet que la théorie de l'intégration a pu se développer en Allemagne.

En 1820, on enseigne la *Théorie de la chaleur* [Fourier, 1822] à Dirichlet à Cologne. L'anné suivante, il part à Paris dans le but de suivre de meilleures études. Il alla à l'Université de Paris ainsi qu'au Collège de France, où il suivit les cours de Fourier.

En 1823 il devient tuteur des enfants du général Foy. La mort de ce dernier lui fait quitter la France pour retourner en Allemagne fin 1825. Il enseignera par la suite à l'université de Breslau (1827), au collège militaire de Berlin (1828), puis à l'université de Berlin (1828-1843). Avec la présence de Dirichlet débute l'"âge d'or des mathématiques" à Berlin.

En 1829, il publie un papier *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données* [Dirichlet, 1829], contenant pour la première fois une étude complète sur la convergence des séries de Fourier. L'article, publié en Français, s'adresse clairement à ses anciens maîtres parisiens. Ce n'est que huit ans plus tard, en 1837, que Dirichlet publie une nouvelle version de ses travaux en Allemand [20].

La notion de fonction quelconque chez Dirichlet se rapproche de la notion actuelle : une correspondance $x \longmapsto f(x)$ arbitraire, et non nécessairement définie par une équation. Par exemple, à un x rationnel on associe la valeur c, et à un irrationnel la valeur d.

En outre, Dirichlet utilise la même définition de la continuité que Cauchy :

> *"$f(\beta)$ une fonction de β qui reste continue entre les limites 0 et h ; j'entends par là une fonction qui a une valeur finie et déterminée pour toute valeur de β comprise entre 0 et h, et en outre telle que la différence $f(\beta+\varepsilon)-f(\beta)$ diminue sans limite lorsque ε devient de plus en plus petit"* [21]

Comme nous l'avons dit plus haut, la note de 1829 de Dirichlet fut la première preuve rigoureuse de la convergence de la série de Fourier associée à une fonction f. Les hypothèses sur f étaient différentes de celles de Fourier, mais il est intéressant de voir que Dirichlet ne cherche plus à prouver que la série de Fourier converge vers $f(x)$, mais vers [22]

---

20. *Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus und Cosinusreihen*, [Dirichlet, 1837]

21. *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, [Dirichlet, 1829] p.159

22. notons que Dirichlet ne regarde plus les intervalles $[-a;a]$ mais simplement l'intervalle $[-\pi;\pi]$, et que la formule suivante diffère aux points $-\pi$ et π

$$\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$$

(notations actuelles, Dirichlet utilise quant à lui les notations $f(x+\varepsilon)$ et $f(x-\varepsilon))$.

L'hypothèse faite sur la fonction f est qu'elle ait un nombre fini de maxima, de minima, et de points discontinus (au sens "non continu", et non au sens de Cauchy) entre $-\pi$ et π.

Afin de prouver la convergence, Dirichlet introduisit les sommes partielles

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

dont il montre qu'elles sont égales à

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\frac{1}{2}(2n+1)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt$$

il montra alors la convergence vers la limite énoncée ci-avant.

Suite à cette démonstration, il évoqua le souhait d'étendre sa méthode aux fonctions f dont les points non continus formeraient ce que nous appelons aujourd'hui un ensemble rare :

> *"Il est nécessaire qu'alors la fonction $\phi(x)$ soit telle que, si l'on désigne par a et b deux quantités quelconques comprises entre $-\pi$ et π, on puisse toujours placer entre a et b d'autres quantités r et s assez rapprochées pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de r à s."*[23]

La note qu'il promet, où cette extension devait être expliquée, ne paru jamais.

Néanmoins, Rudolf Lipschitz (1832-1903) publia dans sa thèse[24] ce qu'il pensait être une preuve de cette extension, qui s'avèrera en fait défectueuse.

23. *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, [Dirichlet, 1829] p.169

24. *Recherches sur le développement en séries trigonométriques des fonctions arbitraires d'une variable et principalement de celles qui, dans un intervalle fini, admettent une infinité de maxima et de minima (De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrariarum, et praecipue earum, quae per variabilis spatium finitum valorum maximorum et minimorum numerum habent infinitum, disquisitio)*, [Lipschitz, 1864]

C'est cependant dans cette thèse que Lipschitz introduira pour la première fois ce que l'on appelle la *condition de Lipschitz*, condition qui va lui servir à remplacer l'hypothèse de Dirichlet sur le nombre de maxima et de minima.

Dirichlet remarque par ailleurs que sa définition de l'intégrale ne lui permet pas de calculer l'intégrale de certaines fonctions, telles que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$:

> *"On aurait un exemple d'une fonction qui ne remplit pas cette condition, si l'on supposait $\varphi(x)$ égale à une constante déterminée c lorsque la variable x obtient une valeur rationelle, et égale à une autre constante d, lorsque cette variable est irrationnelle. La fonction ainsi définie a des valeurs finies et déterminées pour toutes valeurs de x, et cependant on n'en saurait la substituer dans la série, attendu que les différentes intégrales qui entrent dans cette série, perdroient toute signification dans ce cas."*[25]

Henri Léon Lebesgue (1875-1941) donnera pourtant une définition qui permet ce calcul.

On peut remarquer par ailleurs que Dirichlet fut le premier à introduire les fonctions intégrables comme une catégorie de fonctions.

Mais si Dirichlet s'impose des conditions sur ses fonctions f pour qu'elles soient intégrables, il ne s'intéressera pas au fait de trouver des propriétés caractéristiques de f garantissant son intégrabilité. Ce sera Bernhard Riemann (1826-1866), un de ses étudiants, qui se penchera plus profondément sur la question.

1.4 Critères d'intégrabilité

C'est en effet Riemann, un des mathématiciens les plus inventifs du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, qui acheva d'autonomiser le concept de l'intégration.

Après avoir suivi les cours de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) à Göttingen en 1846, c'est à Berlin, en 1847, que Riemann suivit les cours de Dirichlet et entra en contact avec la théorie de l'intégration.

En 1849, il retourna à Göttingen pour préparer son doctorat sous la tutelle de Gauss.

25. *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, [Dirichlet, 1829] p.169

Il présenta sa thèse, *Grundlagen für eine allgemeine Theory der Functionen einer veränderlichen complesen Grösse* [Riemann, 1851], deux ans plus tard. Il obtint alors un poste d'assistant à Göttingen, et commença à préparer sa thèse d'habilitation.

Il présente cette dernière en 1854 : *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (*Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique*) [Riemann, 1867], où il poursuit les idées de Dirichlet et donne ses propres conditions d'intégrabilité. Elle ne sera publiée qu'un an après sa mort, en 1867, par un de ses étudiants de Göttingen : Dedekind. En effet, Riemann mourut prématurément suite à une santé précaire. En 1863, suite à une tuberculose, il partait en Italie, où il retrouvait Enrico Betti (1823-1892), Felice Casorati (1835-1890) et Francesco Brioschi (1824-1897), mathématiciens italiens qui l'avaient visités à Göttingen lors d'un voyage de 1858. Ces visites et ces relations privilégiées italo-allemandes constituèrent un socle pour le futur développement des mathématiques en Italie, comme nous le verrons ensuite.

C'est probablement de la complicité spirituelle entre Dirichlet et Riemann que naquit chez ce dernier l'envie de poursuivre les travaux de Dirichlet dans sa thèse d'habilitation.

> *"Riemann était lié à Dirichlet par une solide complicité reposant sur une même façon de penser. Dirichlet aimait se rendre claires les notions d'une façon intuitive ; en parallèle, il se livrait à des analyses logiques fines de questions fondamentales et évitait les longs calculs autant qu'il était possible. Sa démarche convenait à Riemann, qui l'adopta et travailla selon les méthodes de Dirichlet."*[26]

Riemann était convaincu tout comme Dirichlet que toute fonction continue de la variable réelle pouvait se développer en sa série de Fourier. De plus, il considérait que *"les fonctions qui ne sont pas du type considéré par Dirichlet n'arrivent pas dans la nature"*[27]. Pourtant, Riemann jugeait nécessaire de justifier les développements de Fourier pour des fonctions plus générales : d'une part parce que, selon lui et Dirichlet, cette théorie peut s'avérer utile dans le calcul infinitésimal ; et d'autre part car les mathématiques ne se limitent plus aux applications de la physique, mais

26. *Development of mathematics in the Nineteenth century*, [Klein, 1979] p.234-235
27. *Gesammelte mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, [Riemann, 1902] p.237

peuvent servir à ce qu'il nommait les "mathématiques pures"[28] (ayant probablement en tête ce que nous appelons aujourd'hui la théorie analytique des nombres).

Lorsqu'il parle de fonctions quelconques, Riemann suit l'idée de Dirichlet d'une correspondance arbitraire $x \longmapsto f(x)$.

Riemann s'intéressait à savoir quand une fonction quelconque est intégrable. Reprenant la définition d'intégrabilité de Cauchy, il cherche donc une condition équivalente à $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1})$ "s'approche indéfiniment d'une valeur constante" lorsque $|P| \to 0$.

Riemann trouve alors un premier critère, que nous noterons (R_1) :

$$D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + ... + D_n\delta_n \xrightarrow[|P|\to 0]{} 0$$

où δ_i est la longueur des intervalles formant la partition, c'est-à-dire $x_i - x_{i-1}$, et où D_i est l'oscillation de la fonction f dans ces intervalles, c'est-à-dire

$$\sup_{[x_{i-1};x_i]} |f| - \inf_{[x_{i-1};x_i]} |f|$$

Tout comme Cauchy, il notera la limite commune des sommes $\sum(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1})$ par $\int_a^b f(x)dx$.

Riemann cherche ensuite un second critère. Pour un nombre σ et une partition P de l'intervalle $[a;b]$, on note $s(P,\sigma)$ la somme des δ_i pour lesquels l'oscillation D_i est plus grande que σ. Riemann prétend alors que le critère (R_1) est équivalent au critère (R_2) suivant :

> *Pour toute paire de nombres strictement positifs ε et σ, il existe un nombre strictement positif d tel que si P est une partition de norme plus petite que d, alors $s(P,\sigma)$ est plus petit que ε.*

Si Riemann prouve l'équivalence entre les deux critères, il ne montre pas l'équivalence entre la définition de Cauchy de l'intégrale et le critère (R_1). Pour lui, il s'agit juste d'une reformulation de la définition de l'intégrabilité.

On pourra voir plus tard que ce critère (R_2) est proche de la Jordan-mesurabilité, et plus particulièrement de ce que Camille Jordan (1838-1922) appellera "mesure extérieure".

On peut remarquer que ces deux critères ne font pas intervenir la continuité de la fonction f. D'ailleurs, Riemann va donner un exemple de fonction, discontinue

28. *Gesammelte mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, [Riemann, 1902] p.238

“sur une infinité de points dans chaque intervalle”, et qui va tout de même vérifier (R_2). Il s'agit de la fonction :

$$f(x) = (x) + \frac{(2x)}{2^2} + \frac{(3x)}{3^2} + ... + \frac{(nx)}{n^2} + ...$$

où (x) représente la distance de x à l'entier le plus proche (Riemann prendra $(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, ...$). (cf. figure 1.4)

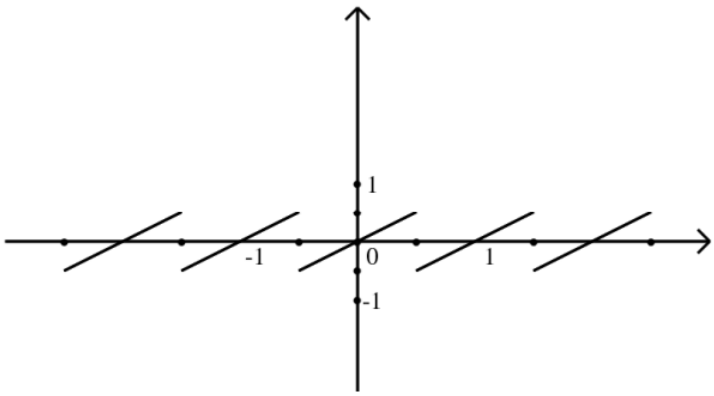


FIGURE 1 – La fonction f(x) de Riemann

Concernant les séries de Fourier, Riemann va examiner le problème avec un nouveau point de vue. Il part non pas d'une série de Fourier, mais d'une série trigonométrique

$$\Omega(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + ... + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + ...$$

où les a_n et b_n deviennent quelconques. Riemann cherchera alors des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit représentée non plus par sa série de Fourier, mais plus généralement par une série trigonométrique.

La thèse de Riemann soulevait de nouveaux problèmes, et la distinction entre séries trigonométriques et séries de Fourier va être très importante pour la suite de l'histoire. Durant les décennies suivantes, les mathématiciens se demanderont notamment s'il y a unicité des coefficients d'une série trigonométrique, et si ces coefficients correspondent toujours aux coefficients de Fourier.

2 La décennie post-Riemannienne

Comme nous l'avons constaté grâce à Fourier et Cauchy, les débuts de la théorie de l'intégration naissaient principalement en France.

Suite à Dirichlet et Riemann, les travaux mathématiques concernant l'intégration migraient en Allemagne. Et comme nous allons le voir, différents événements ont permis aux Italiens de s'y intéresser à leur tour, et d'autres ont permis aux Français de voir renaître cet intérêt.

2.1 L'intégration terme-à-terme

À l'époque de Riemann, le "centre intellectuel" des mathématiques se situait à Berlin. Grâce à Dirichlet et Riemann, certes, mais aussi grâce à l'expansion de l'empire allemand à cette époque (1865 : guerre contre le Danemark ; 1866 : contre l'Autriche ; 1870 : contre la France). Ainsi l'Allemagne succédait logiquement à la France en terme de centre mathématique mondial, et c'est entre autres pour cela que les idées post-riemanniennes trouvèrent leur berceau là-bas.

Par exemple, en 1870, Heinrich Eduard Heine (1821-1881) joua comme nous allons le voir un rôle précurseur dans la validité de l'intégration terme-à-terme.

On peut rappeler que Fourier admettait l'interversion $\sum$-$\int$ sans se poser la question de la validité. Plus tard, que ce soit avec Cauchy ou Gauss, on continuait à admettre cette interversion :

"Considérons une série

$$(1) \qquad u_0, u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$$

dont les différents termes soient des fonctions de la variable x qui restent continues entre les limites $x = x_0$, $x = X$. Si, après avoir multiplié ces mêmes termes par dx, on les intègre entre les limites dont il s'agit, on obtiendra une série nouvelle composée des intégrales définies

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{X} u_0 dx, \int_{x_0}^{X} u_1 dx, \int_{x_0}^{X} u_2 dx, \int_{x_0}^{X} u_3 dx, ..., \int_{x_0}^{X} u_n dx, ...$$

En comparant cette nouvelle série à la première, on obtiendra sans peine le théorème que nous allons énoncer.

THÉORÈME 1. - Supposons que, les deux limites x_0, X étant des quantités finies, la série (1) *soit convergente, non seulement pour $x = x_0$ et pour $x = X$, mais aussi pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et X. La série* (2) *sera elle-même convergente ; et si l'on appelle s la somme de la série* (1)*, la série* (2) *aura pour somme l'intégrale*

$$\int_{x_0}^{X} s dx." $$ [29]

Suite aux travaux d'Heine, la question de l'interversion a commencé à se poser systématiquement.

Niels Henrik Abel (1802-1829) s'était déjà rendu compte qu'intervertir lim et $\sum$ n'était pas si évident. Il montrait en 1826 [30] que Cauchy avait tort lorsqu'il affirmait qu'une série de fonctions continues en un point a convergeait vers une fonction également continue en a :

"De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME 1. - Lorsque les différents termes de la série (1) *sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x."* [31]

Or, le raisonnement de Fourier, à propos de l'unicité des coefficients de Fourier, reposait sur l'intégration terme-à-terme. Heine se reposa donc la question de la validité de ce raisonnement.

Le concept de convergence uniforme avait été vaguement suggéré par Abel en 1826, et avait été établi par Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) en 1841. En effet, dans un écrit de 1841, Weierstrass distinguait convergence normale et uniforme, mais cet écrit ne sera publié qu'en 1894 (*Mathematische Werke*, [Weierstrass, 1894-1927]). Entre temps il parlait de cette convergence dans ses cours à Berlin : Weierstrass montrait à ses étudiants la validité de l'intégration terme-à-terme dans le cas d'une convergence uniforme ; mais hormis ses élèves les mathématiciens ne se sont pas intéressés à ce concept avant Heine.

30. cf. *Recherches sur la série* $1+(m/1)x+(m(m-1)/1.2)x^2+(m(m-1)(m-2)/1.2.3)x^3+\ldots$, [Abel, 1826]

31. *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, [Cauchy, 1821] p.120

Ce dernier aurait eu vent des idées de Weierstrass grâce à Georg Cantor (1845-1918). Ce dernier partait de Berlin en 1867 pour aller à Halle, ville où enseignait Heine.

Également au courant des travaux de Dirichlet, Heine s'était rendu compte que la convergence ne pouvait être uniforme au voisinage des points où $f(x^+) \neq f(x^-)$, c'est pourquoi il introduisit la notion de convergence uniforme "en général" : une série converge uniformément "en général" s'il existe un ensemble P fini tel que sur chaque intervalle de $[a;b]$ ne rencontrant pas P, la convergence est uniforme. Heine réduisait alors son problème d'unicité à :

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = 0 \Longrightarrow a_n = 0,\ b_n = 0$$

dans le cas où la convergence est uniforme "en général" (avec P fini). Sa démonstration reprendra les idées de Riemann lorsqu'il distinguait séries trigonométriques et séries de Fourier (cf. **1.4**).

Heine savait que sa condition n'était que suffisante, aussi réussit-il à convaincre Cantor de s'intéresser au cas où la convergence uniforme en général n'était plus vérifiée. Ainsi, dans un papier de 1872 [32], Cantor s'intéresse à étendre la proposition de Heine au cas où l'ensemble P deviendrait infini.

Dans un premier temps, Cantor introduit de nouvelles notions relatives aux ensembles infinis.

Il définit ce qu'est un point d'accumulation d'un ensemble P, point dont le voisinage contient un sous-ensemble infini de P. Il définit ensuite l'ensemble P' dérivé de P, qui est l'ensemble des points d'accumulation de P. Puis par récurrence il définit l'ensemble $P^{(\nu)}$ dérivé ν-ième de P, qui est l'ensemble dérivé de $P^{(\nu-1)}$. Si l'ensemble $P^{(\nu)}$ est fini, son dérivé sera vide, et Cantor appelera un tel ensemble P un ensemble *de type fini* ν.

Plus tard, Cantor nommera ces ensembles de type fini les ensembles de *première espèce*. Les autres ensembles seront de *seconde espèce*.

Ces nouvelles notions seront utiles dans le développement de la topologie, mais elles nous intéressent également ici : Cantor va montrer que la proposition de Heine est encore valable lorsque la série converge uniformément excepté sur un ensemble P de type fini. Il s'agit en fait de la même preuve que celle de Heine - qui prouve cela pour $\nu = 0$ - que Cantor va étendre par induction aux ensembles de type fini ν quelconque.

32. *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, [Cantor, 1872]

"***Theorem.*** *Wenn eine Gleichung besteht von der Form :*

$$(1) \qquad 0 = C_0 + C_1 + ... + C_n + ...,$$

wo $C_0 = \frac{1}{2}d_0$ *;* $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$*, für alle Werthe von* x *mit Ausnahme derjenigen, welche den Punkten einer im Intervalle* $(0...(2\pi))$ *gegebenen Punktmenge* P *der* ν^{ten} *Art entsprechen, wobei* ν *eine beliebig grosse ganze Zahl bedeutet, so ist :*

$$d_0 = 0, c_n = d_n = 0.$$" [33]

On peut remarquer que si Heine et Cantor ont prouvé l'unicité des coefficients, ils ne se sont pas penchés sur la nature de ces coefficients. Ce furent deux Italiens, Giulio Ascoli (1843-1896) et Ulisse Dini (1845-1918), qui se demandèrent si ces coefficients sont bien ceux décrits par Fourier.

Les mathématiques italiennes étaient également en pleine expansion à cette époque. En effet, les mouvements révolutionnaires de 1848 (que l'on nommera "Printemps des Peuples") ont permis l'indépendance de l'Italie [34]. D'ailleurs, les intellectuels italiens, et notamment les mathématiciens comme Betti, ont largement participé à ce "Printemps des Peuples".

Cette indépendance a entre autres donné un second souffle à l'École Normale de Pise [35], dont Dini et Betti prendront la direction de 1865 à 1876.

En outre, les mathématiques allemandes auront une grande influence sur les mathématiques italiennes. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué (cf. **1.4**), les Italiens auront des liens privilégiés avec les Allemands, et ce jusqu'à l'aube de la première guerre mondiale. On l'a vu avec Riemann : Betti, Brioschi et Casorati sont venus lui rendre visite à Göttingen en 1858 ; et Riemann a rejoint Betti en 1863 suite à ses problèmes de santé. Par ailleurs, ces trois Italiens sont également passés à Paris et Berlin au cours de leur visite.

Ainsi, notamment grâce à Riemann, les mathématiciens italiens étaient au courant des avancées de la théorie de l'intégration. De plus, l'Italien Dini travaillait sur la représentation en séries de Fourier durant les années 1870, ce qui lui permit d'être au courant des travaux de Heine et Cantor.

34. Première guerre d'indépendance
35. créée en 1810

Aussi, entre 1872 et 1874, Ascoli et Dini se penchèrent à leur tour sur le problème de l'unicité des coefficients dans une série trigonométrique.

Ils prouvèrent non seulement l'unicité - dans le cas où l'ensemble des points de discontinuité est fini pour Ascoli [36], et dans le cas où le dérivé de cet ensemble est fini pour Dini [37] - mais ils montrèrent de plus que ces coefficients étaient bel et bien les coefficients introduits par Fourier :

$$a_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx$$
$$b_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx$$

Là encore, leurs preuves sont basées sur les premiers résultats de Riemann sur les séries trigonométriques (cf. **1.4**).

Un pas supplémentaire a été franchi avec l'Allemand Paul Du Bois-Reymond (1831-1889), qui en 1874 prouva le même résultat pour des fonctions uniquement supposées Riemann-intégrables. Sa démonstration est semble-t-il longue et pénible, mais a eu le mérite de montrer l'importance de l'intégrale de Riemann dans la théorie des séries de Fourier.

Quant aux mathématiques françaises, ces dernières ont connu un certain déclin suite à la défaite de 1870 contre la Prusse. Pasteur, par exemple, critiquait la faiblesse des sciences françaises, notamment de l'École Polytechnique, et les rendait coupable de cette défaite. Cependant, les scientifiques français souhaitaient "reconstruire" leur renommée internationale :

> *"Je vous disais donc quand M. Chasles est venu que nous avons besoin de refaire notre enseignement supérieur. Je pense que vous êtes du même avis, les Allemands nous enfoncent par le nombre, là comme ailleurs. Je crois que si cela continue les Italiens nous dépasseront avant peu. Aussi tâchons avec notre* Bulletin *de réveiller ce feu sacré et de faire comprendre aux Français qu'il y a un tas de choses dans le monde dont ils ne se doutent pas, et que si nous sommes toujours la Grrrande nation, on ne s'en aperçoit guère à l'étranger."* [38]

36. cf. *Ueber trogonometrischen Riehen*, [Ascoli, 1873]
37. cf. *La serie de Fourier*, [Dini, 1874]
38. 1870, correspondance entre Darboux et Houël, cf. cours de Laurent Mazliak

C'est dans ce *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, créé par Jean Gaston Darboux (1842-1917) en 1869, que ce même Darboux publia la traduction française de la thèse d'habilitation de Riemann, en 1873, permettant à la France de se tenir au courant des avancées de la théorie de l'intégration.

Deux ans plus tard, en 1875, Darboux publia un *Mémoire sur les fonctions discontinues*, ouvrage dôté d'une grande précision et d'une grande rigueur.

> *"Au risque d'être trop long, j'ai tenu avant tout, sans y réussir peut-être, à être rigoureux. Bien des points, qu'on regardait à bon droit comme évidents ou que l'on accorderait dans les applications de la science aux fonctions usuelles, doivent être soumis à une critique rigoureuse dans l'exposé des propositions relatives aux fonctions les plus générales."*[39]

Il reprit notamment les résultats de Heine et Cantor, et réécrivit une preuve de l'intégrabilité d'une série uniformément convergente, ainsi qu'une preuve de la validité de l'intégration terme à terme (toujours pour une série uniformément convergente).

Darboux donna de plus un exemple de convergence non uniforme où l'intégration n'est pas valide, et tenta de justifier cette non-validité par le fait que la série n'est pas uniformément bornée sur l'intervalle d'intégration.

> *"Une série peut être toujours convergente dans un intervalle donné, sans être uniformément convergente dans cet intervalle. En voici un premier exemple. Considérons la série*
>
> $$x^2e^{-x^2} = \sum_1^{\infty}[n^2x^2e^{-n^2x^2} - (n+1)^2x^2e^{-(n+1)^2x^2}],$$
>
> *qui est convergente pour toute valeur de* x*. La série n'est pas également convergente dans l'intervalle* $(0,1)$*. En effet, le reste* R_n *a pour expression*
>
> $$R_n = n^2x^2e^{-n^2x^2};$$
>
> *il tend vers* 0 *avec* $\frac{1}{n}$*, quelle que soit la valeur fixe donnée à* x*. Mais, dans l'intervalle* $(0,1)$*, il y a toujours une valeur de* x *égale à* $\frac{1}{n}$ *pour*

39. *Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues*, [Darboux, 1875] p.58

laquelle on a $R_n = \frac{1}{e}$. Donc R_n ne peut pas être rendu, quel que soit x, plus petit que σ pour une valeur fixe donnée à n ; son maximum ne tend pas vers zéro quand n augmente indéfiniment. *Si l'on prenait la série*

$$\sum[n^2xe^{-n^2x^2} - (n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}],$$

le reste R_n tendrait bien vers zéro avec $\frac{1}{n}$, pour toute valeur fixe de x ; mais la valeur maximum $\frac{n}{e}$ dans l'intervalle $(0,1)$, au lieu de tendre vers zéro, croîtrait indéfiniment avec n."[40]

Cependant, Darboux ne fait qu'effleurer cette idée : il n'introduit pas la notion d'"uniformément bornée", et n'avait apparemment pas idée de l'importance de cette notion dans l'intégration terme à terme.

2.2 Un peu de topologie, et les confusions qui s'y rattachent

Depuis l'étude de Dirichlet sur les séries trigonométriques (cf. **1.3**), les points de discontinuité semblaient être le cœur du problème de l'intégrabilité d'une fonction. Ainsi l'étude de l'ensemble de ces points paraissait naturelle, et notamment les propriétés que cet ensemble devait vérifier.

C'est dans ce besoin d'étudier les ensembles que naquirent les premiers concepts de topologie.

Si nous voulions "mesurer" un ensemble de nos jours, nous pourrions procéder de plusieurs façons : par cardinalité, par densité, ou par mesure. Durant les années 1870-1880, comme nous pourrons le constater, les mathématiciens qui s'intéressaient à l'intégration eurent tendance à confondre les deux premières notions. Cette confusion, à l'évidence, provenait principalement du fait que des exemples concrets d'ensembles rares étaient alors inconnus.

Pourtant, en 1875, Henri John Stephen Smith (1826-1883) donnait des exemples et des méthodes de construction de tels ensembles[41] :

40. *Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues*, [Darboux, 1875] p.77-78
41. Smith qualifiera les ensembles rares de "in loose order"

"Let m be any given integral number greater than 2. Divide the interval from 0 to 1 into m equal parts ; and exempt the last segment from any subsequent division. Divide each of the remaining $m - 1$ segments into m equal parts ; and exempt the last segment of each from any subsequent division. If this operation be continued ad infinitum, *we shall obtain an infinite number of points of division P upon the line from 0 to 1. These points are in loose order [...]"*[42]

Le premier exemple de Smith ressemble à ce que l'on appelle aujourd'hui l'ensemble de Cantor : on divise l'intervalle $[0;1]$ en m parties égales ($m > 2$), puis on enlève la dernière partie. On considère ensuite les $m - 1$ intervalles restants, sur lesquels on répète l'opération (cf. 2.2)

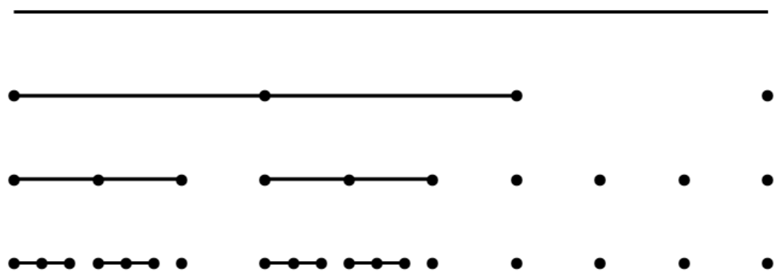


Figure 2 – Construction de l'ensemble de Smith pour $m = 3$

Si l'on note E_n le n-ième ensemble obtenu, alors $\bigcap E_n$ est l'ensemble rare décrit par Smith.

Le seconde exemple de Smith est l'ensemble $P_2 = \{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}, a_1, a_2 \in \mathbb{N}\}$, qu'il étend ensuite aux ensembles P_n par induction.

"Let a system of points P_{s+1} be defined by the equation

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{s+1}},$$

where $a_1, a_2, ..., a_{s+1}$ are positive integers. Assuming (what has just been proved for $s = 2$) that the system P_s is in loose order over the whole

42. *On the integration of discontinuous functions*, [Smith, 1875] p.145-146

interval from 0 *to* 1*, we shall prove the same thing for the system* P_{s+1}*. Let* $x = L_1, x = L_2$ *be any two consecutive points of the system* P_s *; and consider as before the interval* $(\frac{\mu L_1+L_2}{\mu+1}, L_2)$*. If the point* P_{s+1}*, or* $x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{s+1}}$*, lies on this interval, we must have, besides the inequality*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{s+1}} \geqq \frac{\mu L_1 + L_2}{\mu + 1},$$

the $s+1$ *inequalities included in the formula*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{s+1}} \leqq L_1 + \frac{1}{a_i},$$

because no point of the system P_s *can be between* L_1 *and* L_2*. These inequalities give*

$$a_i \leqq \frac{\mu + 1}{L_2 - L_1}, \quad i = 1, 2, 3, ..., s+1,$$

whence we may infer, precisely as in the case in which $s = 2$*, that the points* P_{s+1} *are in loose order over the whole of interval from* 0 *to* 1*.* [43]

Cependant Smith ne sera que peu lu, et il faudra attendre Vito Volterra (1860-1940) en 1881 et Cantor en 1883 pour rendre ces exemples connus [44].

Ainsi Hermann Hankel (1839-1873), en 1870 [Hankel, 1870], confondait les ensembles rares et les ensembles inclus dans des intervalles de longueur arbitrairement petite (c'est-à-dire de mesure nulle). En fait, Hankel confondait les ensembles "topologiquement négligeables" (appelés aujourd'hui ensembles rares) avec les ensembles négligeables du point de vue de la mesure.

En 1880, Axel Harnack (1851-1888) confondait également deux notions. Il appelait [Harnack, 1880] ensembles de première espèce les ensembles pouvant être inclus dans un nombre fini d'intervalles de longueur arbitrairement petite, considérant que cette définition était une reformulation de celle de Cantor (cf. **2.1**), et confondant ainsi les ensembles de première espèce (ceux de Cantor) avec les ensembles de mesure nulle.

43. *On the integration of discontinuous functions*, [Smith, 1875] p.145-146
44. On parlera des ensembles de Smith-Volterra-Cantor, ou SVC

Quant à Lipschitz, il prouvait [Lipschitz, 1864] le résultat de Cantor à propos de la validité de l'intégration terme-à-terme pour $P^{(n)}$ fini [45] (il le prouvait pour P', mais son résultat peut s'étendre aux ensembles de première espèce), mais il en concluait à tort que le résultat était vrai pour P rare. Il confondait donc les ensembles rares et de première espèce.

Seul Dini, dans un papier de 1878 pourtant [Dini, 1878], ne confondait pas P de première espèce et P rare. Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que la plupart des preuves dans l'article de Dini impliquant des ensembles P de première espèce peuvent s'étendre aux ensembles P de mesure nulle.

C'est avec Cantor que les trois notions commencent réellement à se distinguer.

On a déjà vu le travail de Cantor de 1872 sur les ensembles infinis, où ce dernier introduisait les ensembles dérivés [46]. En 1873, il introduisit le concept d'ensembles dénombrables. Et en 1879, il utilisait le vocable d'ensembles "de première espèce" et d'ensembles "rares" pour la première fois.

> *Hier kann es nun vorkommen, dass der Progress der Ableitungen* $P', P'', ...$ *zu einer Ableitung* $P^{(n)}$ *führt, welche aus Punkten besteht, die in jedem endlichen Bereiche nur in endlicher Anzabl vorkommen, so dass* $P^{(n)}$ keine *Grenzpunkte und folglich auch keine Ableitung hat; in diesem Falle sagen wir von der Punktmenge* P*, dass sie von der* ersten Gattung *und von der* n^{ten} *Art sei. Bricht aber die Reihe der Ableitungen von* P*, die Reihe* $P', P'', P''', ...P^{(\nu)}, ...$ nicht *ab, so sagen wir, dass die Punktmenge* P *von der* zweiten Gattung *sei.* [47]

L'intérêt que portait Cantor à la théorie des ensembles lui viendrait de sa corrélation avec la théorie des fonctions de la variable réelle, et notamment avec la théorie de l'intégration. On l'a vu avec Heine [48], et cet intérêt a certainement grandi suite au papier de Dini utilisant les ensembles de première espèce qu'il avait introduits en 1872.

En 1880, il introduisit [49] les concepts d'union et d'intersection, ce qui l'amèna à introduire les ensembles parfaits, tels que $P' = P$, puis les ensembles fermés [50], tels que $P' \subset P$.

---

45. cf. **2.1**
46. cf. **2.1**
47. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, [Cantor, 1879]
48. cf. **2.1**
49. cf. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, [Cantor, 1880]
50. cf. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, [Cantor, 1884]

Emile Borel (1871-1956), dont nous parlerons plus tard, s'inspirera beaucoup des notions topologiques de Cantor pour introduire sa notion de mesure.

2.3 Les intégrales par excès et par défaut

Comme nous l'avons évoqué en première partie, Riemann considérait comme équivalents la convergence des séries de Cauchy

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

et la convergence de la série $\sum_{i=1}^{n} D_i \delta_i$ vers 0 (critère (R_1)).

Ce n'est qu'en 1875 que cette équivalence sera prouvée. Carl Johannes Thomae (1840-1921), mathématicien allemand, introduisit [51] pour cela les sommes partielles

$$\sum M_i \delta_i \quad \text{et} \quad \sum m_i \delta_i$$

où les M_i et m_i sont les extrema de la fonction. Puis il prouva que ces deux sommes convergent toujours lorsque la fonction est bornée, qu'elle soit Riemann-intégrable ou non. Il montra ensuite que l'égalité des deux limites équivaut à la fois au critère (R_1) et à la convergence des séries de Cauchy, ce qui achève la démonstration.

Les termes "intégrale par excès" et "intégrale par défaut", correspondants aux limites des deux séries introduites par Thomae, seront introduits plus tard par Volterra [52], ainsi que les notations $\overline{\int}$ et $\underline{\int}$.

On peut remarquer que l'Italien Ascoli, le Français Darboux et l'Américain Smith ont démontré cette même équivalence la même année, ce qui nous fait constater l'importance qu'avait prise la théorie de Riemann à cette époque, surtout en Europe (Smith était certes Américain, mais il étudiait à Paris, et a passé une grande partie de sa vie en Europe) [53].

51. *Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale*, [Thomae, 1875]
52. *Sui principii del calcolo integrale*, [Volterra, 1881]
53. pour Smith, cf. *On the Integration of Discontinuous Fonctions*, [Smith, 1875] p.141-143 ; pour Ascoli, cf. *Sul concetto del integrale definito*, [Ascoli, 1875]

“Nous formerons ainsi n intervalles, et nous désignerons par M_i, m_i, Δ_i la limite maximum, la limite minimum et l'oscillation dans le $i^{\text{ème}}$ intervalle. Formons les trois sommes

$$M = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + ... + M_n\delta_n,$$
$$m = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + ... + m_n\delta_n,$$
$$\Delta = \Delta_1\delta_1 + \Delta_2\delta_2 + ... + \Delta_n\delta_n,$$

entre lesquelles existe la relation identique

$$\Delta = M - m$$

Je dis que, lorsqu'on prendra n suffisamment grand, et que tous les intervalles δ tendront vers zéro, les trois sommes précédentes, quelle que soit la fonction considérée, continue ou discontinue, tendront chacune vers une limite finie et déterminée, ne dépendant que de la nature de la fonction et des valeurs extrêmes a, b qui limitent l'intervalle considéré. ”[54]

Du Bois-Reymond s'intéressait également à ces intégrales par excès et par défaut. Il se demandait notamment s'il existait g et k telles que :

$$\underline{\int_a^x} f = \int_a^x g \quad \text{et} \quad \overline{\int_a^x} f = \int_a^x k$$

Cependant, Du Bois-Reymond n'a publié aucun résultat à ce sujet, probablement parce que l'existence de tels g et k n'est généralement pas assurée.

Néanmoins, un article de Du Bois-Reymond de la même année[55] nous montre un raisonnement que Lebesgue reprendra beaucoup. Afin de prouver la formule de l'intégration par parties (dans le cas de l'intégrale de Riemann), Du Bois-Reymond utilisa la démarche suivante : il commença par prouver la formule pour des fonctions de la forme

$$\sum m_j \chi_{I_j}(x)$$

54. *Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues*, [Darboux, 1875] p.65

55. *Beweis, dass die Coeffizienten der trigonometrischen Reihe $f(x) = \sum_{p=0}^{\infty}(a_p \cos px + b_p \sin px)$ die Werthe $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha f(\alpha)$, $a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha f(\alpha)\cos p\alpha$, $b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha f(\alpha)\sin p\alpha$ haben, jedesmal wenn diese Integrale endlich und bestimmt sind*, [Du Bois-Reymond, 1875a]

appelées aujourd'hui "fonctions en escaliers" ; puis il étendit la formule aux fonctions f Riemann-intégrables, en utilisant le fait que les intégrales des fonctions en escalier convergent vers $\int_a^b f$ pour des m_j bien choisis.

2.4 L'intégration et la dérivabilité

Si l'ambiguïté entre P rare et P de type fini a freiné l'évolution de la théorie de l'intégration, il en fut de même pour la dérivabilité. En effet, lorsque la théorie de l'intégration de Riemann s'est mise en place, les mathématiciens n'avaient pas encore idée de tous les cas atypiques qui pouvaient se présenter, et ce n'est qu'au fil de leurs recherches que certains d'entre eux vont commencer à trouver des fonctions spéciales, qui comme nous allons le voir contrediront les théorèmes fondamentaux de l'intégration.

À l'époque où Fourier introduisait ses séries, André Marie Ampère (1775-1836) pensait que la continuité entrainait la dérivabilité, sauf en certains points. En 1806, il pensait avoir prouvé qu'une fonction continue possédait une dérivée non nulle et non infinie "à l'exception de certaines valeurs particulières et isolées de x"[56]. En réalité, sa conclusion ne correspondait pas aux résultats qu'il établissait, mais personne ne l'a mise en doute jusqu'à ce que Hankel trouve une fonction continue dont la dérivée n'existe pas sur un ensemble dense.

En fait, Weierstrass et Riemann considéraient déjà le résultat faux, mais Hankel, inspiré par la fonction de Riemann (cf. figure 1.4), publia le premier contre-exemple avec la fonction

$$F(x) = \int_0^x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

où (x) est la distance entre x et l'entier le plus proche ($(x) = 0$ si $x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, ...$).

On a vu que la fonction sous l'intégrale était discontinue sur un dense, mais Riemann-intégrable. Ce résultat permit à Hankel de montrer en 1871[57] que la fonction F est continue partout, mais non dérivable sur un dense.

56. *Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor*, [Ampère, 1806] p.149

57. cf. *Grenze*, *Allgemeine Encyklopädie der Wissenschaften und Künste*, [Hankel, 1871] p.199-200

Ainsi le premier théorème fondamental ne peut s'appliquer sur F, et le raisonnement de Cauchy, selon lequel le premier théorème implique le second, ne peut pas non plus s'appliquer.

Weierstrass donna quant à lui, en 1872, un exemple de fonction continue dérivable nulle part [58].

> *"Es sei x eine reelle Veränderliche, a eine ungrade ganze Zahl, b eine positive Constante, kleiner als* 1*, und*
>
> $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi);$$
>
> *so ist $f(x)$ eine stetige Function, von der sich zeigen lässt, dass sie, sobald der Werth des Products ab eine gewisse Grenze übersteigt, an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten besitzt."* [59]

La première publication d'un tel résultat se fit en 1875 avec Du Bois-Reymond, et la même année Darboux donna aussi son propre exemple :

> *"Nous terminerons en donnant un exemple d'une fonction* qui n'a de dérivée pour aucune valeur de la variable*. Soit*
>
> $$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin[1.2.3...(n+1)x]}{1.2.3...n}$$
>
> *[...]"* [60]

Dans son *Mémoire* [Darboux, 1875], Darboux voulut en outre prouver le deuxième théorème fondamental indépendamment du premier, afin de contourner la raisonnement de Cauchy. Il y parvint en utilisant le théorème des accroissements finis, avec pour simple hypothèse le fait que f' soit intégrable.

58. Apparemment Bolzano avait déjà trouvé une telle fonction en 1861, mais cet exemple n'a pas été publié avant 1930
59. *Mathematische Werke*, [Weierstrass, 1894-1927] p.72
60. *Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues*, [Darboux, 1875] p.107

"Il semble difficile d'indiquer un caractère général qui permette de reconnaître si une fonction $f(x)$ a une fonction primitive, c'est-à-dire si elle est la dérivée d'une autre fonction.
Dans le cas, toutefois, où $f(x)$ est susceptible d'intégration, la solution peut être donnée. En effet, s'il existe une fonction $F(x)$ telle que

$$F'(x) = f(x),$$

on aura

$$F(x)-F(a) = F(x)-F(x_{n-1})+F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+...+F(x_1)-F(a),$$

ou, en appliquant le théorème des accroissements finis,

$$F(x) - F(a) = f(a + \theta_1\delta_1)\delta_1 + f(x_1 + \theta_2\delta_2)\delta_2 + ... + f(x_{n-1} + \theta_n\delta_n)\delta_n,$$

les δ ayant la même signification que dans l'article III, et par conséquent $F(x)$ ne pourra être que l'intégrale définie

$$C + \int_a^x f(x)dx.$$

On effectuera cette intégration et il restera à voir si l'intégrale a pour dérivée $f(x)$.
Il faut pour cela que l'on ait

$$\int_x^{x+h} f(x)dx = [f(x) + \varepsilon]h,$$

ε tendant vers zéro avec h. Or l'intégrale est la limite de

$$\frac{h}{n}\left\{f(x) + f\left(x + \frac{h}{n}\right) + ... + f\left[x + \frac{(n-1)h}{n}\right]\right\},$$

lorsque n croît indéfiniment. Donc, pour qu'une fonction susceptible d'intégration soit la dérivée d'une autre fonction, il faut et il suffit que sa valeur moyenne dans l'intervalle $(x, x+h)$

$$\lim \frac{1}{n}\left\{f(x) + f\left(x + \frac{h}{n}\right) + ... + f\left[x + \frac{(n-1)h}{n}\right]\right\}$$

devienne égale à $f(x)$ quand h tend vers zéro. h doit être pris successivement positif et négatif."[61]

61. *Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues*, [Darboux, 1875] p.111-112

Dini, suite à ces découvertes sur la dérivabilité, souleva en 1877 le problème suivant : étant donné les nombreux théorèmes qui se basent sur le fait que la continuité entraine la dérivabilité, les mathématiciens se doivent soit d'étendre ces théorèmes, soit d'étendre le concept de la dérivabilité.

C'est cette dernière solution que Dini envisagea, en introduisant les dérivées à droite :

$$D_+f(x) = \liminf_{h\searrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$D^+f(x) = \limsup_{h\searrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

et les dérivées à gauche :

$$D_-f(x) = \liminf_{h\searrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

$$D^-f(x) = \limsup_{h\searrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

Ces notions avaient déjà été introduites par Ernest Lamarle (1806-1875) en 1855, et par Louis-Philippe Gilbert (1832-1892) en 1873 [62].

> *"Pour chacun des intervalles, dont il vient d'être fait mention, l'on a généralement :*
>
> $$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = f'(x)$$
>
> *et la limite $f'(x)$ est une fonction continue de la variable x. Néanmoins, il est possible que, pour certaines valeurs particulières, x_a, x_b, x_c, etc., comprises dans l'un quelconque de ces intervalles, les limites des deux rapports $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ cessent tout à coup d'être égales."* [63]

Mais c'est Dini qui montra un théorème des plus intéressants : quelque soit l'intervalle sur lequel on se place, ces quatre fonctions ont la même borne supérieure.

62. cf. *Mémoire sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues*, [Gilbert, 1873]

63. *Étude approfondie sur les fonctions* $\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ *et* $dy = f'(x).\Delta x$, [Lamarle, 1885] p.52

Ce qui permit à Dini de montrer ensuite que si l'une des quatre dérivées est Riemann-intégrable sur un intervalle, alors les trois autres aussi, et les quatre ont la même intégrale.

C'est ainsi qu'en 1878 [64], Dini généralise le deuxième théorème fondamental de la façon suivante : si F est continue et si l'une des dérivées DF (à gauche ou à droite) est Riemann-intégrable, alors

$$\int_a^b DF = F(b) - F(a)$$

et ce pour les quatre dérivées DF.

Par ailleurs, Dini montra que la condition "DF est intégrable" est nécessaire, même si sa preuve n'était pas constructive : il considérait une fonction F telle que $\int_\alpha^\beta DF = 0$ et telle que $F(\beta) - F(\alpha) \neq 0$, mais il n'explicitait pas de telle fonction. (en fait, pour prouver l'existence d'une telle fonction, Dini aurait eu besoin de connaître des ensembles rares de mesure positive)

De plus, Dini fit la remarque suivante : si f est une primitive de F, c'est-à-dire $F(x) = \int_a^x f$, alors les quatres dérivées de Dini différent de f d'une fonction "d'intégrale nulle", c'est-à-dire que

$$DF(x) = f(x) + n(x)$$

où $n(x)$ est une fonction d'intégrale nulle quelque soit l'intervalle considéré. On voit qu'ici Dini se rapproche de la théorie de la mesure, puisque ce résultat équivaut au résultat que nous connaissons aujourd'hui sous la forme

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f = f(x) \text{ presque partout}$$

ou

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f = f(x) \text{ sauf sur un ensemble de mesure nulle.}$$

2.5 Étendre la théorie de Riemann

Même si le théorème de Dini renforce la validité de la théorie de l'intégration de Riemann, les trop nombreux cas où les théorèmes fondamentaux ne s'appliquent pas vont encourager les mathématiciens à vouloir étendre cette théorie.

64. *Fondamenti per la teorica della funzioni di variabili reali*, [Dini, 1878]

Jusque là, les principaux problèmes de la théorie de Riemann étaient :

- L'intégrale de Riemann n'est définie que pour les fonctions bornées. Et bien qu'on ait essayé de l'étendre aux fonctions non bornées il s'agit simplement d'une extension *a posteriori*.
- L'exemple de Hankel de 1871 (cf. **2.4**) fournit un contre-exemple au premier théorème fondamental.
- Les ensembles de Smith-Volterra-Cantor vont fournir un contre-exemple au deuxième théorème fondamental.
- Une suite bornée de fonctions intégrables ne converge pas forcément vers une fonction intégrable.
- La validité de l'intégration terme-à-terme n'a été prouvée qu'avec des conditions suffisantes, mais il s'avère difficile de trouver des conditions équivalentes.

Le premier point a été étudié par Du Bois-Reymond en 1875. On savait étendre la définition de Riemann aux fonctions discontinues sur un ensemble D fini (cf. méthode de Cauchy, **1.2**), et Du Bois-Reymond montra[65] que cette extension pouvait aussi s'appliquer aux ensembles de première espèce.

En 1882, Harnack introduisit[66] une nouvelle définition de l'intégrale pour le cas où cet ensemble D est fini.

Il introduisit dans un premier temps la notion d'égalité "en général" : f et g sont égales "en général" si l'ensemble des x tels que $|f(x) - g(x)| > \delta$ est discret, et ce pour tout δ. Il définit alors $\displaystyle\int_a^b f$ comme $F(b) - F(a)$, où F est telle que $F'(x) = f(x)$ "en général" et $F(a) = 0$.

Cependant, cette fonction F n'est pas unique, puisque lorsque l'on se donne g non constante telle que $g' = 0$ sauf sur un ensemble discret, alors la fonction $G = F + g - g(a)$ vérifie les mêmes hypothèses que F. Il n'y a donc pas unicité de ce que Harnack appelle $\displaystyle\int_a^b f$.

En outre, Harnack pensait pouvoir prouver que si f^2 est intégrable, alors f est somme de sa série de Fourier "en général". Cette remarque est intéressante car elle se rapproche des idées de Lebesgue : il suffit de remplacer "en général" par presque partout, et de voir les intégrales comme des intégrales de Lebesgue.

Si l'intégrale de Harnack possèdait des problèmes de définition, Otto Ludwig Hölder (1859-1937) s'en inspira néanmoins pour donner à son tour sa propre

65. *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argument nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen*, [Du Bois-Reymond, 1875b]
66. cf. *Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe*, [Harnack, 1882]

définition de l'intégrale en 1884[67], qui cette fois englobe les fonctions où D est dénombrable, et supprime le problème de l'unicité.

Cependant, si ces définitions paraissent intéressantes pour pallier le problème des valeurs infinies, l'intégrale de Harnack ne se popularisera jamais, notamment parce que l'on peut trouver des fonctions telles que

$$\int_a^x DF \neq F(x) - F(a) \text{ (intégrale de Harnack)}$$

Il suffit pour cela de considérer l'escalier de Cantor, fonction croissante de 0 à 1, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, et dont la dérivée s'annule presque partout. On a alors $f(1) - f(0) = 1$ et $\displaystyle\int_0^1 DF = 0$.

Le troisième point fait intervenir les ensembles de Smith (cf. **2.2**), mais c'est Volterra qui se rendit compte en 1881 que ces ensembles fournissaient un contre-exemple au deuxième théorème fondamental.

L'ensemble que construisit Volterra, rare de mesure strictement positive, ressemble à celui construit par Smith. Il servit d'une part à valider quelques conjectures faites par Dini, et surtout à trouver une fonction g telle que g' existe partout mais n'est pas Riemann-intégrable, le deuxième théorème fondamental étant alors inutilisable.

Volterra utilisait ces termes : *"dans certains cas, il peut arriver que la définition habituelle de l'intégrale ne soit pas incluse dans la définition de Riemann"*[68].

En outre, toujours dans cette optique d'étendre la définition de Riemann, Weierstrass tenta de remplacer le critère (R_1) par :

$$\sum_{i=1}^{n} D_i^* \delta_i \to 0$$

où les D_i^* sont toujours les oscillations de f, mais prises sans tenir compte des discontinuités.

Il semblerait que Weierstrass ait toujours eu conscience des limites de la définition de Riemann. En 1885, il en faisait part à Du Bois-Reymond [Weierstrass, 1923], probablement après avoir vu que ce dernier avait publié des ouvrages confirmant ces limites. Du Bois-Reymond fit remarquer à Weierstrass que son extension ne suffisait toujours pas, puisqu'elle ne prenait toujours pas en compte les fonctions telles que celles de Volterra.

67. cf. *Zur Theorie der trigonometrischen Reihen*, [Hölder, 1884]
68. *Sui principii del calcolo integrale*, [Volterra, 1881] p.334

C'est pourquoi Weierstrass s'attela ensuite à donner sa propre définition de l'intégrale (il écrivait alors à Du Bois-Reymond : *"la définition de Riemann doit être modifiée plus drastiquement que je ne l'ai fait"*, *Briefe von K. Weierstrass an Paul Du Bois-Reymond*, [Weierstrass, 1923]). En 1886, Weierstrass informa son ancien étudiant Kowalewsky qu'il avait trouvé un moyen de définir correctement l'intégrale pour toute fonction définie et bornée sur un ensemble dense. Lors d'une correspondance avec Koenigsberger, il en parlait dans les termes suivants :

> *"Soit un intervalle $(a...b)$ donné, tel que dans chaque partie de $(a...b)$ arbitrairement petite il existe des points où la fonction est définie. Alors à chaque point où la fonction est définie, je regarde l'ordonnée. [...] Nous prenons maintenant la définition suivante : imaginons chacune des ordonnées entourées par un petit rectangle de base égale à δ. Alors ces rectangles se recoupent. Si nous regardons maintenant l'ensemble de points constitué par ces points qui sont à l'intérieur de tels rectangles, on remarque facilement que cela forme un continuum. Ce continuum possède une étendue S_δ qui est une fonction de δ. [...] On peut maintenant montrer que S_δ décroît avec δ, et ainsi s'approche d'une limite pour $\delta = 0$. On définit alors $\int_a^b d(x)dx = \lim_{\delta=0} S_\delta$. Cette définition est justifiée puisqu'elle coïncide avec celle connue pour les fonctions continues, et puisque les propriétés essentielles de l'intégrale sont conservées."*[69]

Malheureusement, la définition de Weierstrass ne conservait pas l'additivité de l'intégrale, c'est pourquoi elle non plus ne sera pas adoptée.

2.6 La notion d'aire : débuts de la théorie de la mesure

Bien que Weierstrass n'y fît pas allusion, sa nouvelle définition de l'intégrale s'appuyait sur la notion de mesure extérieure, introduite par Cantor en 1884. Notion dont s'inspirèrent Giuseppe Peano (1858-1932), Camille Jordan et Émile Borel pour leurs théories de la mesure, comme nous le verrons plus tard.

C'est l'Allemand Otto Stolz (1842-1905) qui donna en 1884 [70] la première définition de la mesure extérieure (sans la nommer). Motivé par ses travaux sur la

69. *Briefe von K. Weierstrass an L. Koenigsberger*, [Weierstrass, 1923] p.225
70. *Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth*, [Stolz, 1884]

longueur d'une courbe, Stolz s'était aperçu du lien entre l'aire et l'intégration. Sa définition était énoncée en dimension 1 et 2 uniquement.

En dimension 1, il définissait un nombre L associé à un ensemble $E \subset [a;b]$ comme suit : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que pour toute partition P de $[a;b]$ de norme inférieure à δ, on ait $|L(P) - L| < \varepsilon$. Où $L(P)$ désigne l'ensemble des intervalles de la partition qui *contiennent* des points de E (c'est en cela que l'on qualifiera le nombre L de mesure "extérieure").

En dimension 2, il utilisa un procédé analogue pour les ensembles du plan contenus dans un ensemble borné.

La même année, Cantor introduisit des définitions équivalentes, mais cette fois en toute dimension.

> *"*Jeder *Punktmenge P innerhalb G_n, sie mag* continuirlich *oder* discontinuirlich *sein, kommt eine bestimmte* nicht negative Zahlgrösse *zu, welche wir ihren* Inhalt *oder ihr* Volumen mit Bezug auf ihre Theilnehmerschaft an dem ebenen n-dimensionalen Raum G_n*, oder, wie wir uns kürzer ausdrücken wollen,* mit Bezug auf G_n *nennen wollen."*[71]

> *"Sind P und Q zwei Punktmengen von solcher Lagenbeziehung,* dass völlig getrennte n-dimensionale Raumtheile H und H' angeben werden können, so dass P ganz in H, Q ganz in H' enthalten ist*, so gilt, wie leicht zu zeigen der Satz, dass :*
>
> $$I(P+Q) = I(P) + I(Q).$$
>
> *Lässt man aber die gemachte Voraussetzung über P und Q fallen, so gilt dieser Satz im Allgemeinen* nicht.[72]

Apparemment Cantor admettait deux propriétés pour introduire ses définitions, propriétés que les mathématiciens n'établissèrent que plus tard[73]. Néanmoins ces définitions nous montraient les prémices d'une théorie de la mesure. On y retrouve par exemple l'additivité pour deux ensembles disjoints, et le lien entre

71. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, [Cantor, 1884] p.473
72. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, [Cantor, 1884] p.475
73. *Lebesgue's Theory of Integration*, [Hawkins] p.62

la définition et la dimension (un disque sera de mesure positive en dimension 2, mais de mesure nulle en dimension 3).

Harnack donna aussi sa définition de la mesure extérieure en 1885. Mais quelque soit la définition, on ne pouvait pas considérer cette “aire” comme l’“aire sous la courbe” de la théorie de l’intégration, puisqu’une fonction bornée possède toujours une aire sous la courbe au sens de Cantor, quand bien même elle ne serait pas intégrable.

Ainsi l’émergence de la théorie de la mesure, favorisée par la difficulté que représentaient les problèmes de discontinuité dans la définition de Riemann, fit apparaître un réel changement dans la théorie de l’intégration.
En effet, Peano ne va plus s’intéresser à l’ensemble de discontinuité de la fonction intégrée, mais au domaine d’intégration de la fonction.

3 Mesures et intégration

3.1 Définir précisément la notion d'aire

La notion d'aire est présente dans la théorie de l'intégration depuis le début. Par exemple, les calculs d'aire d'Archimède au $III^{ème}$ siècle av. J.-C. faisaient déjà partie de cette théorie. Mais si les mathématiciens que nous avons évoqués s'intéressaient à changer ou à étendre la définition de $\int_a^b f$, la définition précise de l'aire n'était pas entrée en considération.

C'est pourquoi Peano était critique à propos de la définition de l'intégrale comme l'"aire sous la courbe", puisque la notion même d'aire n'était pas précisément définie.

Aussi en 1883, dans son ouvrage *Sur l'intégrabilité des fonctions* (*Sull' integrabilita delle funzioni* [Peano, 1883]), Peano donna sa propre définition de l'aire.

Dans un premier temps, Peano définit les aires des polygones. Puis, considérant un ensemble "de forme simple" inclus dans le plan, il appela *aire* de cet ensemble la valeur commune de :

– La borne supérieure des polygones inclus dans l'ensemble
– La borne inférieure des polygones qui contiennent l'ensemble

Si ces deux valeurs diffèrent, alors l'aire ne peut pas être définie :

> *"...le concept d'aire ne s'appliquerait pas dans ce cas. C'est pourquoi, lorsque l'on veut parler de l'aire d'une figure, il est d'abord nécessaire de vérifier que ces deux limites sont égales..."*[74]

Il semblerait que cette définition de l'aire ait été inspirée par le critère (R_1) de Riemann, ou tout du moins par la méthode qu'utilisait Thomae (cf. **2.3**) pour montrer l'équivalence entre le critère (R_1) et l'intégrabilité d'une fonction, c'est-à-dire l'introduction des sommes

$$\sum M_i \delta_i \quad \text{et} \quad \sum m_i \delta_i$$

On peut remarquer l'analogie entre le fait d'enfermer l'intégrale entre ces deux sommes, et enfermer l'aire entre deux nombres réels.

74. *Sull' integrabilita delle funzioni*, [Peano, 1883] p.446

Peano faisait ses études à Turin, où Genocchi enseignait depuis 1859. Ce dernier travaillait sur le calcul infinitésimal depuis 1863, et en tant qu'assistant de Genocchi (l'année 1882-1883), Peano a lui-même beaucoup travaillé dans ce secteur. L'intérêt que portait Peano à l'intégration lui serait donc venu de ses relations avec Genocchi, et ses travaux sur le calcul infinitésimal lui firent publier en 1887 *Applications géométriques du calcul infinitésimal* (*Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, [Peano, 1887]), qui poursuivait les notions mises en place en 1883.

Dans le souci de définir la notion d'aire pour des ensembles quelconques, Peano fut amené à travailler sur la théorie des ensembles. Dans ce cadre, Peano fut fortement influencé par les définitions de Cantor. En effet, Peano utilisait les mêmes termes et la même définition d'un ensemble fermé que Cantor ; il reprit également les notions de point extérieur, point intérieur, point frontière [75].

On peut en revanche remarquer que Peano définira ces notions en dimension 1, 2 et 3 séparément, à l'inverse de Cantor.

En outre, Peano remarque que la frontière d'un ensemble peut être assez peu intuitive. Pour étayer ses propos, il prit l'exemple des rationnels inclus dans $[0;1]$, dont la frontière est $[0;1]$ tout entier.

En dimension 2, Peano rebaptisa les "aires" définies en 1883 *aire extérieure* et *aire intérieure*, que nous noterons $c_e(.)$ et $c_i(.)$.

Peano remarqua ensuite que pour un ensemble A de frontière ∂A, on a la relation [76]

$$c_e(A) = c_i(A) + c_e(\partial A)$$

Ce qui implique directement que l'aire de A est bien définie si et seulement si $c_e(\partial A) = 0$.

Dans son *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* [Peano, 1887], Peano considérait sa mesure comme une fonction additive sur les ensembles, fonctions qu'il appella *fonctions distributives*. Ce fut la première fois que la mesure était détachée de sa vision "géométrique" ; on se rapprochait alors des méthodes axiomatiques, qu'utilisèrent plus tard Jules Drach (1871-1949) en 1895 et Borel en 1898.

75. cf.*Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, [Peano, 1887], p.152-155

76. Une preuve en dimension 2 peut être donnée de la façon suivante : on découpe le plan en carrés de taille 2^{-m}, on regarde les carrés $A_{e,m}$ qui rencontrent A, et parmi eux les $A_{\delta,m}$ qui contiennent un point frontière de A et les $A_{i,m}$ qui n'en contiennent pas. On a bien sûr la relation $\cup A_{e,m} = \cup A_{\delta,m} \bigcup \cup A_{i,m}$. La somme des aires des $A_{e,m}$ donne à la limite $c_e(A)$, celle des $A_{i,m}$ donne $c_i(A)$, et celle des $A_{\delta,m}$ donne $c_e(\partial A)$.

> *"Una grandezza dicesi* funzione distributiva *d'un campo, se il valore di quella grandezza corrispondente ad un campo è la somma dei valori di essa correspondenti alle parti in cui si può decomporre il campo dato."*[77]

Peano fit par ailleurs un bref lien entre sa mesure et la théorie de l'intégration, en remarquant que pour une fonction f positive sur $[a;b]$, on a :

$$\underline{\int_a^b} f = c_i(E) \quad \text{et} \quad \overline{\int_a^b} f = c_e(E)$$

où E est l'ensemble sous la courbe que délimite la fonction f, et où $\overline{\int}$ et $\underline{\int}$ sont les intégrales par excès et par défaut de Volterra. (On a donc f Riemann-intégrable $\Leftrightarrow c_e(E) = c_i(E)$)

Cependant Peano ne poussera pas davantage sa théorie, ni le lien qui la relie avec l'intégrale.

3.2 Intégrales doubles et étendues

Les intérêts de Jordan pour la théorie de l'intégration et pour la théorie de la mesure furent motivés par ses travaux sur l'intégrale double, liée de près aux calculs d'aire en dimension 2, comme nous allons le voir.

Au début du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, le calcul d'une intégrale double $\int_E f(x,y)dE$ s'-effectuait comme une intégrale simple : on découpe le plan en un quadrillage de rectangles $R_{i,j}$ au lieu d'une subdivision d'intervalles $[x_i;x_{i+1}]$, quadrillage qui va découper l'ensemble E en $E_{i,j}$. Puis on choisit des points (x_i,y_j) de $E_{i,j}$ et on somme

$$\sum_{i,j} f(x_i,y_j)a(E_{i,j})$$

où $a(.)$ désigne l'aire de l'ensemble.

L'intégrale est alors la limite de ces sommes lorsque l'aire des rectangles $R_{i,j}$ tend vers 0.

77. *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, [Peano, 1887]

Le premier problème rencontré fut le calcul de l'aire des $E_{i,j}$, qui la plupart du temps ne sont pas des rectangles. Problème que contournèrent les mathématiciens en sommant sur les $R_{i,j}$ soit intérieurs, soit extérieurs à l'ensemble E (cf. figure 3.2).

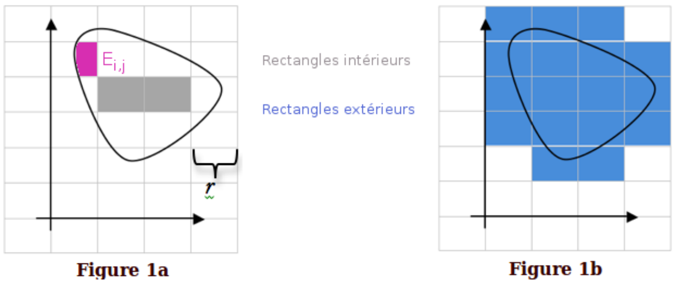


FIGURE 3 – (Découpages de E)

Le second problème fut l'interversion $\sum_i$ et $\sum_j$, qui devient possible lorsque l'on remplace les $E_{i,j}$ par les $R_{i,j}$.

Or, en 1827, Cauchy montrait qu'une telle interversion pouvait ne pas être valable dans certains cas, en donnant un exemple de fonction non bornée qui ne vérifiait pas l'égalité de

$$\int_0^1 dy \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) \quad \text{et} \quad \int_0^1 dx \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right)$$

"Soit $K = \varphi(x,z) = \frac{z}{x^2+z^2}$, et concevons que l'intégrale

$$\int\int \frac{\partial K}{\partial z} dxdz$$

doive être prise entre les limites $z = 0, z = 1, x = 0, x = 1$. Si l'on suppose les valeurs de z substituées avant celles de x, on aura

$$\int_0^1 \frac{\partial K}{\partial z} dz = \frac{1}{1+x^2}, \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial K}{\partial z} dxdz = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Mais, si l'on veut renverser l'ordre des substitutions, l'intégrale changera de valeur ; car la fonction $\frac{z}{x^2+z^2}$ devient indéterminée, lorsqu'on suppose à la fois $x = 0, z = 0$. On a donc, dans le cas présent,

$$X = a' = 0, \quad Z = b' = 0.$$

Par suite, la quantité qu'il faut ajouter à la première valeur de l'intégrale double pour obtenir la seconde sera

$$A = -\int_0^{\varepsilon} \varphi(\xi, \zeta) d\xi = -\int_0^{\varepsilon} \frac{\zeta}{\xi^2 + \zeta^2} d\xi,$$

ζ devant être supposé nul après l'intégration relative à ξ. On a d'ailleurs, en général,

$$\int \frac{\zeta}{\xi^2 + \zeta^2} d\xi = arctang \frac{\xi}{\zeta} + \text{const.},$$

$arctang \frac{\xi}{\zeta}$ désignant le plus petit des arcs qui ont $\frac{\xi}{\zeta}$ pour tangente. On aura donc

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\zeta}{\xi^2 + \zeta^2} d\xi = arctang \frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

Si, dans cette première expression, on fait $\zeta = 0$, elle deviendra égale à $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$A = -\int_0^{\varepsilon} \frac{\zeta}{\xi^2 + \zeta^2} d\xi = -\frac{\pi}{2};$$

et, par suite,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial K}{\partial z} dx dz = \frac{\pi}{4} + A = -\frac{\pi}{4},$$

lorsqu'on substitue les valeurs de x avant celles de z. Ce dernier résultat peut être aisément vérifié de la manière suivante.

K étant égal à $\frac{z}{x^2+z^2}$, on a $\frac{\partial K}{\partial z} = \frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2}$; et, par suite,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial K}{\partial z} dz dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2} dz dx$$

On a d'ailleurs, en général,

$$\int \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2} dx = -\frac{x}{x^2 + z^2} + \text{const.}$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{x^2 - z^2}{(x^2+z^2)^2} dx = -\frac{1}{1+z^2};$$

et, par suite,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial K}{\partial z} dz dx = -\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{\pi}{4},$$

comme ci-dessus. ”[78]

En 1878, Thomae montrait un résultat similaire pour une fonction bornée [79] : il trouvait une fonction f bornée telle que

$$\int_0^1 dx \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right)$$

existe, mais telle que $x \longmapsto f(x,y)$ n'est pas Riemann-intégrable, excepté pour une valeur de y,

$$\int_0^1 dy \left(\int_0^1 f(x,y) dx \right)$$

n'aurait donc pas de sens.

En 1883, Du Bois-Reymond montrait même que l'intégrale double peut exister sans que $f(.,y)$ et $f(x,.)$ ne soient intégrables pour tout x et pour tout y [80]. Il regardait pour cela la fonction valant $\frac{1}{2^p}$ lorsque (x,y) est de la forme $(\frac{2n+1}{2^p}, \frac{2m+1}{2^q})$, où n, m, p, q sont des entiers positifs, et valant 0 ailleurs. La fonction $y \longmapsto f(x,y)$ est totalement discontinue pour les $x = \frac{2n+1}{2^p}$, qui forment un ensemble dense sur $[0;1]$. Ainsi l'intégrale $\int_0^1 f(x,y)dy$ n'existe pas au sens de Riemann. Pourtant, Du Bois-Reymond montra que cette fonction est intégrable sur le carré $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Par la suite, les cas où l'interversion est valable vont faire l'objet d'études plus approfondies.

Harnack, en 1884, regardait la fonction $\eta \longmapsto \int f(x,\eta)dx$, et se posait la question de l'intégrabilité sur $G_\eta = \{y = \eta\} \cap E$. Il commençait par imposer que la ligne $\{y = \eta\}$ ne coupe E qu'en deux points, de sorte que G_η soit un intervalle [81].

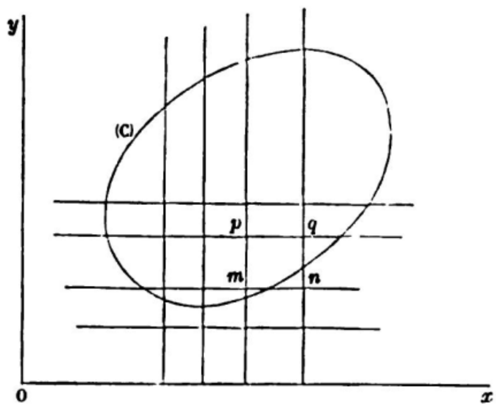
78. *Mémoire sur les intégrales définies*, [Cauchy, 1827] p.394-6
79. *Ueber bestimmte Integrale*, [Thomae, 1878]
80. *Ueber das Doppelintegral*, [Du Bois-Reymond, 1883]
81. *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung*, [Harnack, 1884]

Puis en 1886 il étendait ses hypothèses à un nombre fini de points, de sorte que G_η soit une union finie d'intervalles [82].

Cesare Arzelà (1847-1912), quant à lui, mettait des hypothèses sur l'ensemble E. En 1891, il s'intéressait aux ensembles E bornés, délimités par une courbe fermée continue rectifiable [83]. Cependant l'interversion n'est pas vérifiée dans tous les cas sous ces hypothèses. En fait, Arzelà considérait également les G_η comme union d'intervalles, ce qui n'est pas forcément le cas.

Émile Picard (1856-1941), la même année [84], considérait apparemment un ensemble E quelconque, mais on peut se rendre compte qu'il suppose à tort que chaque ligne du "quadrillage" rencontre le bord de E en un nombre fini de points :

Fig. 9.



"Prenons en effet, au lieu de l'aire d'un rectangle, une aire plane quelconque limitée par une courbe C (fig. 9), et traçons dans le plan une succession de parallèles à Ox et à Oy. Nous rangeons encore, par ordre croissant de grandeurs, la succession des abscisses des parallèles à Oy, et des ordonnées des parallèles à Ox. Nous aurons ainsi un réseau de rectangles : le rectangle (i, k) sera, comme plus haut, celui qui correspond au point (x_i, y_k) et qui aura pour côtés $x_{i+1} - x_i$ et $y_{k+1} - y_k$. Formons la somme

$$(3) \qquad \sum\sum f(x_i, y_k)(x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k),$$

82. *Bemerkung zur Theorie des Doppelintegrals*, [Harnack, 1886]
83. *Sugli integrali doppi*, [Arzelà, 1891]
84. *Traité d'analyse*, [Picard, 1891]

en l'étendant à tous les points (x_i, y_k) contenus à l'intérieur ou sur le périmètre de l'aire. Certains de ces rectangles, tels que mnpq*, pourront sortir en partie de l'aire limitée par C ; ces rectangles* irréguliers *figureront néanmoins dans notre somme. Nous allons montrer que la somme précédente tend vers une limite quand tous les rectangles tendent vers zéro suivant une loi quelconque."*[85]

Jordan, conscient des avancées de la théorie de l'intégration, et notamment au courant des travaux de Darboux, notait que si la fonction intégrée avait été le sujet de profondes études, ce n'était pas le cas du domaine d'intégration.

"Enfin, M. Darboux a fait voir que, quelle que soit la fonction bornée f, les deux sommes $\sum M d\sigma$, $\sum m d\sigma$, où M et m représentent le maximum et le minimum de f dans l'élément $d\sigma$, ont toujours une limite parfaitement déterminée.
Ces résultats sont très nets et éclaircissent complètement le rôle que joue la fonction dans l'intégrale.
L'influence de la nature du champ ne paraît pas avoir été étudiée avec le même soin. Toutes les démonstrations reposent sur ce double postulatum, que chaque champ E a une étendue déterminée ; et que, si on le décompose en plusieurs parties $E_1, E_2, ...$, la somme des étendues de ces parties est égale à l'étendue totale de E. Or ces propositions sont loin d'être évidentes si on laisse à la conception du champ toute sa généralité.
Nous nous proposons de montrer dans les pages suivantes qu'à un champ E quelconque correspondent deux nombres déterminés E' et E'' qu'on peut appeler son étendue intérieure *et son* étendue extérieure*.*
Si ces deux nombres coïncident, nous dirons que E est mesurable..."[86]

Jordan ne s'intéressait donc plus à l'ensemble de discontinuité des fonctions intégrées, mais à l'aspect géométrique du domaine d'intégration.

Dans ses *Remarques sur les intégrales définies* [Jordan, 1892], il donna sa définition d'un ensemble mesurable.

À l'instar de Cantor et Peano, les travaux de Jordan sur les aires lui firent introduire diverses notions topologiques.

85. *Traité d'analyse*, [Picard, 1891] p.93-94
86. *Remarques sur les intégrales définies*, [Jordan, 1892] p.69-70

Tout comme Peano, il définit ce que sont les points intérieurs à, extérieurs à, et au bord d'un ensemble E donné.

Et tout comme Cantor, il définit ce qu'est un point limite et ce qu'est un ensemble fermé :

> *"Nous appelerons avec M. Cantor :*
>
> 1^o Ensemble *toute collection de points ;*
>
> 2^o Point limite *d'un ensemble E tout point π tel, qu'on puisse, quel que soit ε, déterminer dans E un point p différent de π, et dont l'écart à π soit $< \varepsilon$;*
>
> 3^o Dérivé *de E l'ensemble E' formé par les points limites de E ;*
>
> 4^o Ensemble parfait *tout ensemble qui contient son dérivé.*
>
> *Si l'ensemble E ne contient pas tous les points possibles, les points qui ne lui appartiennent pas forment un ensemble* complémentaire E_1.
>
> *Soient respectivement E', E'_1 les ensembles dérivés de E, E_1. Les points du plan pourront être répartis en trois classes :*
>
> 1^o *Les points* intérieurs *à E. Ce sont ceux qui appartiennent à E sans appartenir à E'_1. Pour chacun d'eux p pourra assigner une quantité ε telle que tout point dont l'écart à p est $< \varepsilon$ appartient à E et non à E_1.*
>
> 2^o *Les points* extérieurs, *qui appartiennent à E_1 sans appartenir à E'.*
>
> 3^o *Les points* frontières, *qui appartiennent à la fois à l'un des ensembles E, E_1, et au dérivé de l'autre."*[87]

Nous pouvons noter que ces notions sont données en dimension n quelconque, contrairement à Peano qui distinguait les cas (cf. **3.1**).

Jordan définit ensuite les "étendues extérieures" et "étendues intérieures" d'une façon similaire à celle de Peano :

> *"Cherchons, d'autre part, à préciser la notion de l'*étendue *de cet ensemble.*
>
> *Cette étendue sera une longueur, une aire, un volume, etc., suivant que le nombre de dimensions de l'ensemble sera $1, 2, 3, \ldots$. Nous supposerons, pour fixer les idées, que ce nombre soit égal à 2. Chaque point*

87. *Remarques sur les intégrales définies*, [Jordan, 1892] p.71-72

(u, v) de E pourra être représenté géométriquement sur un plan par le point dont u, v sont les coordonnées rectangles.

Décomposons ce plan par des parallèles aux axes en carrés de côté r. L'ensemble de ceux de ces carrés dont tous les points sont intérieurs à E forme un domaine S intérieur à E ; l'ensemble de ceux qui sont intérieurs à E ou qui contiennent un point de sa frontière forment un nouveau domaine $S + S'$, auquel E est intérieur. Ces domaines, étant formés par la réunion de carrés, ont des aires déterminées, qu'on peut également représenter par S et $S + S'$.

Faisons varier la décomposition en carrés, de telle sorte que r tende vers zéro : les aires S et $S + S'$ tendront vers des limites fixes. *"*[88]

Jordan dit alors qu'un ensemble est *mesurable* si les deux étendues sont égales (il utilise le terme *quarrable* en dimension 2). La valeur commune étant l'*étendue* de l'ensemble (ou *aire* en dimension 2), que nous noterons $c(E)$.

Il s'attarda ensuite sur les propriétés d'additivité de sa mesure : lorsque E est union disjointe des E_p, les définitions d'étendues intérieure et extérieure donnent :

$$\sum c_i(E_p) \leqslant c_i(E) \leqslant c_e(E) \leqslant \sum c_e(E_p)$$

(la seconde inégalité provenant de $c_e(E) = c_i(E) + c_e(\partial E)$).

Ainsi la mesurabilité des E_p entraine celle de E, et l'égalité $\sum c(E_p) = c(E)$.

Faisant le lien avec l'intégration, Jordan reprit les concepts d'*intégrale par défaut* et *intégrale par excès* d'une fonction f.

"Soit $f(x, y, ...)$ une fonction qui conserve une valeur bornée dans l'intérieur d'un domaine E, supposé mesurable.

Décomposons E en domaines élémentaires mesurables $e_1, e_2, ...$

Désignons par M, m le maximum et le minimum de la fonction f dans E ; par M_k, m_k son maximum et son minimum dans e_k, et formons les sommes

$$S = \sum M_k e_k, \qquad s = \sum m_k e_k.$$

Comme on a évidemment

88. *Remarques sur les intégrales définies*, [Jordan, 1892] p.76-77

$$m \overset{=}{<} m_k \overset{=}{<} M_k \overset{=}{<} M,$$

S et s seront comprises entre

$$M \sum e_k = ME \quad \text{et} \quad m \sum e_k = mE,$$

et leurs modules seront, au plus, égaux à LE, L désignant le plus grand des deux modules $|M|$ et $|m|$ (ou le maximum de $|f|$ dans le domaine E).

M. Darboux a montré que, si l'on fait varier la décomposition de telle sorte que les diamètres des éléments tendent vers zéro, S et s tendront vers des limites fixes.

*Ce nombre fixe $T = \lim S$ se nomme l'*intégrale par excès *de la fonction $f(x, y, ...)$ dans l'intérieur de E.*

*On démontre de même que les sommes s tendent vers leur maximum t, qui sera l'*intégrale par défaut *de $f(x, y, ...)$.*

On a évidemment $T \overset{=}{>} t$. Si $T = t$, la fonction sera dite intégrable*, et $T = t$ sera son intégrale, laquelle pourra être représentée par la notation $S_E f(x, y, ...)de$."*[89]

Les deux limites T et t constituent donc une nouvelle définition de l'intégrale, que Jordan étendit aux ensembles E non mesurables en considérant des ensembles $E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E$, où $\cup E_n = E$, les E_n étant mesurables. L'intégrale de f sur E se définissait alors par la limite des $\int_{E_n} f(x, y)dE_n$, dont il montra la convergence.

"Nous avons admis, jusqu'à présent, que le domaine E est mesurable. Nous pouvons maintenant supprimer cette restriction. On peut, en effet, le considérer comme une suite de domaines mesurables $E_1, ..., E_n, ...$ dont les étendues convergent vers une limite qui, par définition, est l'étendue intérieure de E. L'intégrale (par excès ou par défaut) prise dans E_n tend vers une limite ; car la différence entre les intégrales prises dans E_n et E_{n+p} a son module au plus égal à

$$L(E_{n+p} - E_n) < L(E - E_n),$$

89. *Remarques sur les intégrales définies*, [Jordan, 1892] p.81-84

et tend vers zéro pour $n = \infty$. Nous considérerons cette limite de l'intégrale prise dans E_n comme représentant la valeur de l'intégrale dans E."[90]

La théorie de la mesure de Jordan a influencé les mathématiciens comme Borel et Lebesgue, et a permis le développement de l'intégration à travers son lien avec la théorie de la mesure.

> *"En osant incorporer certaines parties de la théorie des ensembles dans son cours de l'École Polytechnique, Jordan réhabilitait en quelque sorte cette théorie ; il affirmait qu'elle est une branche utile des mathématiques. Il faisait plus que l'affirmer, il le prouvait par ses recherches sur la mesure des aires et des ensembles, sur l'intégration qui, comme ses études sur la rectification des courbes, sur les séries trigonométriques, sur l'*analysis situs*, ont si bien préparé certains travaux, les miens en particulier."*[91]

3.3 Fonctions analytiques et mesure

La notion de mesure introduite par Borel s'effectua lors de ses travaux sur les fonctions à variable complexe, qui dès Riemann faisaient l'objet de controverses.

En 1851, Riemann se demandait [92] si les notions de fonction analytique et de "fonction définie par une expression analytique" étaient équivalentes.

En 1880, Weierstrass se penchait [93] sur la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n + z^{-n}}$$

à l'expression analytique, mais qui représente deux fonctions analytiques distinctes : l'une pour $|z| < 1$ et l'autre pour $|z| > 1$. Constatant cela, Weierstrass

90. *Remarques sur les intégrales définies*, [Jordan, 1892] p.84
91. *Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue*, [Lebesgue, 1922] p.16
92. cf. *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, [Riemann, 1851]
93. cf. *Zur Functionenlehre*, [Weierstrass, 1880]

montra que la fonction f ne peut pas être prolongée de façon continue sur l'ensemble $\{|z| = 1\}$, la fonction f lui fournissait donc un contre-exemple à l'hypothèse de Riemann, et les deux notions ne pouvaient être équivalentes.

Des fonctions similaires - c'est-à-dire représentant une certaine fonction sur un ensemble T, une autre sur un ensemble S, sans prolongement continu possible - ont été découvertes par la suite : Paul Appell (1855-1930) en 1882, par exemple, trouvait de telles fonctions avec pour ensemble T une réunion de cercles.

> *"... nous aurons, pour $f(x)$, le développement en série suivant :*
>
> $$(4) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} A_\nu^{(k)} \frac{1}{(x - x_k)^\nu}, \quad A_\nu^{(k)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} (z - \alpha_k)^{\nu-1} f(z) dz,$$
>
> *développement valable pour tous les points de l'aire S.*
> *» Mais il se présente, au sujet de la série (4), une remarque intéressante. Imaginons que l'on décrive en entier les cercles auxquels appartiennent les arcs $C_1, C_2, ..., C_n$; désignons par T l'aire indéfinie située à l'extérieur de tous les cercles. La série qui forme le second membre de l'équation (4) est encore convergente si x est un point de l'aire T ; mais alors la somme de cette série est égale à zéro. En effet, si x est un point de l'aire T, l'intégrale (1) $[\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - x} dz]$, étendue au contour de l'aire S, est nulle ; d'ailleurs les développements (3) et (4) sont encore convergents, car l'égalité (2) a toujours lieu.*
> *» On a ainsi une série de fractions rationnelles qui est égale à $f(x)$ dans l'aire S et à zéro dans l'aire T. On pourrait de même former une série de fractions rationnelles égale à une fonction holomorphe $\varphi(x)$ dans l'aire T et à zéro dans l'aire S. La somme de ces deux séries représente $f(x)$ dans S et $\varphi(x)$ dans T. M. Weierstrass a déjà obtenu par d'autres considérations des séries de fractions rationnelles possédant des propriétés analogues."*[94]

Henri Poincaré (1854-1912), en 1883[95], donna même une méthode générale pour construire de telles fonctions : il considère un contour convexe C, et S et T les régions bornées et non bornées délimitées par C ; puis il introduit la série

94. note de M. Appell présentée par M. Bouquet, *Comptes rendus hebdomadaires des scéances de l'Académie des sciences*, [Appell, 1882] p.1239
95. cf. *Sur les fonctions à espaces lacunaires*, [Poincaré, 1883]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{z - b_n}$$

où $\sum |A_n|$ converge et où les b_n sont denses sur $S \cup C$. Il montre alors que cette série est analytique sur T, mais ne peut se prolonger analytiquement sur S.

Borel s'inspire de l'exemple de Poincaré et introduisit la série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{z - a_n}$$

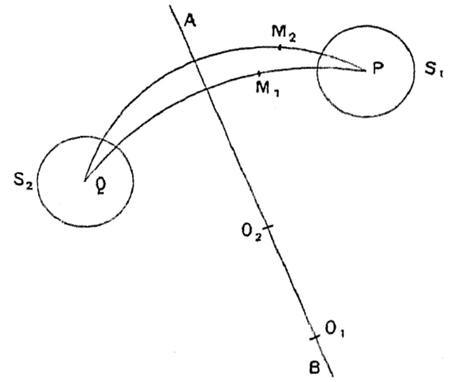
où les a_n sont tels que l'adhérence de l'ensemble $\{a_n\}$ forme une courbe fermée C, et où les A_n sont tels que la série $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^{1/2}$ converge.

Cette série f définit deux fonctions analytiques distinctes : l'une à l'intérieur de C, l'autre à l'extérieur.

En 1895, Borel montra néanmoins que tout point à l'extérieur de C peut être "connecté" à un point de l'intérieur de C par un arc de cercle, sur lequel la série f va converger absolument :

> *"Cela posé, nous allons montrer qu'étant donnés deux points P et Q ne coïncidant ni avec un point a, ni avec un point a', on peut toujours les réunir par une ligne continue PMQ, telle que sur cette ligne la série considérée soit absolument et* uniformément *convergente.*
>
> *Remarquons d'abord que l'hypothèse faite sur les points P et Q revient à celle-ci : il est possible de tracer deux cercles S_1 et S_2 ayant respectivement pour centres P et Q et ne renfermant à leur intérieur aucun point a.*
>
> *Considérons maintenant les cercles C passant par P et Q et dont les centres O sont situés sur un segment déterminé AB, d'ailleurs quelconque, de la perpendiculaire au milieu de PQ. Il est clair que C_1 et C_2 étant deux de ces cercles, ayant pour centres les points O_1 et O_2, si M_1 et M_2 sont deux points pris respectivement sur C_1 et C_2, et dont l'un au moins est extérieur à S_1 et à S_2, on a*
>
> $$\overline{M_1M_2} > k\overline{O_1O_2},$$

Fig. 4.



k étant un nombre fixe dépendant uniquement de la distance PQ, du segment AB et des rayons des deux cercles S_1 et S_2.
Désignons par l la longueur de AB ; la série $\sum u_n$ étant convergente, nous pouvons choisir n de manière que l'on ait

$$2\sum_{n+1}^{\infty} u_i < l.$$

Soient maintenant M_i l'affixe du point a_i $(i > n)$ et O_i le centre du cercle C_i passant par les points P, Q, M_i. Prenons sur la droite AB, de part et d'autre du point O_i, deux longueurs O_iA_i, O_iB_i égales à u_i, de telle sorte que le segment A_iB_i soit égal à $2u_i$; la somme de tous les segments (en nombre infini), tels que A_iB_i, tous situés sur le segment AB ou sur son prolongement, est inférieure à la longueur l de AB ; donc il existe sur AB une infinité non dénombrable de points n'appartenant à aucun de ces segments ; soient ω un de ces points qui ne coïncident avec aucun des points O_i d'indice inférieur à n, et Γ le cercle de centre ω passant par les points P et Q ; je dis que ce cercle Γ a les propriétés requises, c'est-à-dire que la série $\sum \frac{A_n}{(z-a_n)^{m_n}}$ est uniformément convergente sur ce cercle."[96]

Borel considère le pire des cas : les a_n sur C rencontrent tous un des cercles joignant P dans S à Q dans T. On peut donc considérer les O_n, centres de cercles passant par P, a_n, Q, situés sur la médiatrice (AB) de $[PQ]$; on peut ensuite considérer des intervalles I_n contenant O_n et de longueur plus petite que $2u_n$, où

96. *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, [Borel, 1895] p.24-26

u_n est une suite telle que $\sum u_n$ et $\sum \frac{|A_n|}{u_n}$ convergent (cette suite existe sous les hypothèses de Borel).

Prenons alors l'indice N tel que $\sum_{N+1}^{\infty} u_n < \dfrac{AB}{2}$, la réunion des intervalles I_n considérés à partir de cet indice N sera de longueur strictement plus petite que AB, et il existera alors un nombre non dénombrable de points de AB à l'extérieur de cette union. En enlevant ensuite les O_n d'indice plus petit que N, il reste tout de même un ensemble non dénombrable de points de AB, et donc un ensemble non dénombrable de points de C pour lesquels on peut prolonger la série entre S et T.

La preuve de Borel repose sur le fait qu'un ensemble dénombrable, bien que dense, peut être enfermé dans un intervalle de longueur arbitrairement petite. C'est ici, pour la première fois, que l'on voit apparaître les prémisces de la σ-additivité : une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle reste de mesure nulle ; fait qui montre que la densité et la mesure sont deux notions bien distinctes.

Borel n'employa pas tout de suite les termes “ensembles de mesure nulle”, mais ses travaux l'ont encouragé à développer sa théorie de la mesure (selon Borel lui-même, cf. *Jubilé scientifique de M. Emile Borel*, [Borel, 1940] p.391-394).

En 1898, Borel exposait cette théorie dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions* [Borel, 1898], sous une forme axiomatique.

Borel commença par un axiome intuitif concernant la mesure des intervalles ; puis il introduisit un axiome concernant l'additivité de sa mesure, et finit par un axiome à propos de la mesure d'un ensemble inclus dans un autre :

> *“Lorsqu'un ensemble est formé de tous les points compris dans une infinité dénombrable d'intervalles qui ne se rencontrent pas et dont la longueur totale est s, nous dirons que l'ensemble a pour mesure s.”*
>
> *“Lorsque deux ensembles n'ont pas de point en commun et que leurs mesures sont s et s', l'ensemble obtenu en les réunissant, c'est-à-dire leur somme, a pour mesure $s + s'$. Plus généralement, si l'on a une infinité dénombrable d'ensembles qui n'ont deux à deux aucun point commun et dont les mesures sont $s_1, s_2, ..., s_n, ...$, leur somme [...] a pour mesure*
>
> $$s_1 + s_2 + ... + s_n + ...”$$
>
> *“Si un ensemble E a pour mesure s et contient tous les points d'un ensemble E' dont la mesure est s', l'ensemble $E - E'$, formé par tous*

les points de E qui n'appartiennent pas à E', sera dit de mesure $s - s'$. [...] Les ensembles pour lesquels la mesure peut être définie à partir des précédentes définitions seront pour nous appelés mesurables."[97]

Cette axiomatisation lui avait apparemment été inspirée par Drach, un de ses étudiants à l'École Normale Supérieure, qui en 1895 avait publié un livre avec Borel où il employait des approches similaires :

> *"I.* Nous définirons tous les éléments sur lesquels nous raisonnerons dans la suite*, c'est-à-dire les nombres et les fonctions algébriques, les différentielles et les dérivées de ces fonctions, et , d'une manière générale, les fonctions d'une ou plusieurs variables qui vérifient des relations différentielles algébriques,* par leurs liaisons avec les éléments d'un premier système*, dont nous allons d'abord préciser les propriétés.*
> *Nous supposerons que ce système satisfait aux conditions suivantes :*
>
> *I.* Il existe un mode de composition qui permet de passer de deux éléments quelconques du système à un troisième élément, bien déterminé, du même système*.*
>
> *II.* Ce mode de composition est associatif*.*
>
> *Si l'on représente par (u, v) le résultat de la compostion de l'élément u avec l'élément v, on aura par conséquent, entre trois éléments quelconques du système, l'identité*
>
> $$(a, (b, c)) = ((a, b), c)$$
>
> *III.* Un même élément composé avec des éléments qui diffèrent entre eux donne encore des éléments qui diffèrent entre eux*.*
>
> *On peut donc conclure des identités*
>
> $$(a, u) = b, \quad (a, v) = b$$
>
> *l'identité*
>
> $$u = v.$$

97. *Leçons sur la théorie des fonctions*, [Borel, 1898] p.46-48

IV. Tous les éléments du système sont obtenus, et chacun d'eux est obtenu une seule fois, par une composition *répétée* de l'un d'eux, convenablement choisi, avec lui-même, c'est-à-dire en composant cet élément a avec lui-même, ce qui donne (a, a), puis avec l'élément (a, a), ce qui donne $(a, (a, a))$ et ainsi de suite."[98]

Cette méthode reflétait l'esprit d'axiomatisation que possédaient les mathématiques allemandes en fin de $XIX^{ème}$ siècle. Les origines alsaciennes de Drach lui permirent de cotoyer ces méthodes, qui parvinrent ensuite jusqu'à Borel grâce à leurs travaux communs :

"Cette façon de procéder présente de grandes analogies avec les méthodes introduites par M. J. Drach, en Algèbre et dans la théorie des équations différentielles. [...] Dans chaque cas, cela relève de la même idée fondamentale : définir les nouveaux éléments qui sont introduits à l'aide de leurs propriétés essentielles, c'est-à-dire celles qui sont indispensables pour le raisonnement qui suit."[99]

Dans son axiomatisation, Borel mettait en exergue une propriété fondamentale de sa mesure : les ensembles dénombrables sont de mesure nulle. Si en 1895 Borel ne faisait qu'utiliser la σ-additivité, on constate qu'il la met maintenant clairement en avant.

Néanmoins Borel n'était pas satisfait puisqu'avec cette définition de la mesure, il ne pouvait pas connaître celle de l'ensemble des points où la série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{z - a_n}$$

diverge (la même série qu'il introduisait en 1895).

Borel souhaiterait cet ensemble de mesure nulle. Aussi introduisit-il une remarque supplémentaire :

98. *Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendentes*, [Drach, 1898], p.255-256

99. *Leçons sur la théorie des fonctions*, [Borel, 1898] p.48

"Si un ensemble E contient tous les éléments d'un ensemble E_1, de mesure α, nous pouvons dire que la mesure de E est plus grande que α, sans se soucier de la mesurabilité de E. Inversement, si E_1 contient tous les éléments de E, nous dirons que la mesure de E est plus petite que α."[100]

Cet axiome supplémentaire permet à l'ensemble de divergence d'être de mesure plus petite que 0, donc égale à 0 puisque la mesure de Borel n'est jamais négative (il le souligna plus loin).

On peut remarquer que Borel ne fit pas de lien entre sa notion de mesure et la théorie de l'intégration. Il fit toutefois allusion aux travaux de Jordan dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions* [Borel, 1898] :

"Il serait intéressant de comparer les définitions que nous avons données avec les définitions plus générales que M. Jordan donne dans son Cours d'Analyse*."*[101]

La perception de la théorie de Borel chez Schoenflies

À la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, Arthur Schoenflies (1853-1928) fut chargé par le *Deutsche Mathematiker-Vereininung* de préparer un rapport sur les courbes et la théorie des ensembles. En 1900, il présentait son rapport, *Die entwickelung der lehre von den punktmannigfaltigkeiten*, incluant la théorie de l'intégration, et notamment les diverses notions de mesure des ensembles.

Concernant la mesure de Borel, Schoenflies considérait d'une part qu'il n'y avait aucune application autre que celle à laquelle Borel faisait allusion (c'est-à-dire l'étude de $\sum \frac{A_n}{z-a_n}$), et d'autre part que les propriétés sur les unions dénombrables ne devaient pas être supposées, mais établies.

"Sie hat zunächst nur den Charakter eines Postulats, da ja die Frage, ob eine Eigenschaft endlicher Summen auf unendlich viele Summanden ausdehnbar ist, nicht durch Festsetzung erledigt werden kann, sondern vielmehr der Untersuchung bedarf."[102]

100. *Leçons sur la théorie des fonctions*, [Borel, 1898] p.48-49
101. *Leçons sur la théorie des fonctions*, [Borel, 1898] p.46
102. *Die entwickelung der lehre von den punktmannigfaltigkeiten*, [Schoenflies, 1900] p.93

Aux yeux de Schoenflies, la notion de mesure dépendait donc principalement des objectifs et des applications que pouvaient avoir l'introduction de cette notion, aussi la théorie de la mesure de Borel ne paraissait pas importante aux yeux de Schoenflies.

Apparemment, face aux théories de Cantor, Peano, Jordan et Borel, Schoenflies attribuait un certain caractère subjectif à la notion de mesure, et considérait que Borel définissait la sienne uniquement dans le but de faire ce qu'il voulait en faire. Point de vue que partagea Lebesgue un peu plus tard, comme nous allons le constater.

En revanche, dans les années 1900, Lebesgue s'intéressait aux travaux de Borel sur la théorie de la mesure. En tant qu'étudiant de Borel, il s'en inspira pour construire sa propre théorie.

4 La théorie de la mesure de Lebesgue

Lebesgue étudia les travaux d'analyse de Jordan à l'École Supérieure [103], où il eut Borel comme enseignant. Avec ce dernier, Lebesgue se lia d'une profonde amitié. En effet, Borel et Lebesgue correspondèrent maintes fois entre 1901 et 1918, en particulier à propos de leurs théories respectives de la mesure [104].

De 1899 à 1901, Lebesgue publiait cinq articles dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

Sa deuxième note, *Sur la définition de l'aire d'une surface* [Lebesgue, 1899], mit en commun les idées de Borel, de Peano et de Jordan.

Tout comme Borel, Lebesgue prenait un point de vue axiomatique sur les propriétés de l'aire. Par exemple, à l'inverse de Schoenflies, il partageait le même point de vue que Borel concernant l'additivité d'une union infinie dénombrable d'ensembles. En effet, il considérait le problème de la mesure des surfaces comme suit :

> *"Faire correspondre à chaque surface un nombre appelé* aire*, de façon que deux surfaces égales aient des aires égales et que la surface donnée par la réunion d'un nombre fini ou infini de surfaces, ayant des portions de frontière communes et n'empiétant pas les unes sur les autres, ait pour aire la somme des aires des surfaces composantes."* [105]

Ensuite, lorsque Lebesgue définit l'aire d'un ensemble, il reprit les idées de Peano en considérant l'ensemble comme la réunion de polygones deux à deux disjoints :

> *"M. Peano a indiqué une définition de l'aire d'une surface dans laquelle intervient une division de la surface en morceaux, par des courbes. Sa définition est donc analogue à celle que je viens de donner. Mais, pour l'appliquer avec certitude, au moins sans nouvelles études, il faut faire certaines hypothèses dont la méthode que j'ai indiquée permet de s'affranchir."* [106]

103. Lebesgue y étudia de 1894 à 1897
104. cf. *La génèse de l'intégrale : lettres d'Henri Lebesgue à Émile Borel 1901-1918* [Lebesgue, 1901-1918]
105. *Sur la définition de l'aire d'une surface*, [Lebesgue, 1899] p.870
106. *Sur la définition de l'aire d'une surface*, [Lebesgue, 1899] p.872

Lebesgue reprend ensuite la notion de surface quarrable introduite par Jordan : une surface est quarrable lorsque ses étendues intérieure et extérieure, que Lebesgue appelle *aires intérieure* et *extérieure*, sont égales. L'étendue intérieure étant la borne supérieure des aires obtenues après découpage de l'ensemble en carrés, en ne prenant que les carrés intérieurs ; et l'étendue extérieure étant la borne inférieure des aires obtenues en prenant les carrés intérieurs et rencontrant la frontière (cf. figure 3.2).

Lebesgue nota que le problème qu'il posait ne pouvait être résolu que pour des surfaces quarrables, en considérant un argument similaire à celui de Peano : si deux surfaces quarrables D_1 et D_2 ont une portion de frontière C en commun alors

$$c_i(D_1 \cup D_2) = c_i(D_1) + c_i(D_2) + c_e(C)$$

donc l'additivité n'est possible que si $c_e(C) = 0$, ce qui correspond à la Jordan-mesurabilité de $D_1 \cup D_2$.

> *"Mais avec cette définition l'aire de la somme de deux surfaces pourrait être plus grande que la somme des aires de ces deux surfaces. Cela n'arrive pas pour les surfaces telles que $S = s$* [107] *; on les appelle* surfaces quarrables. *Le problème de la mesure des surfaces planes n'est donc possible que pour les surfaces quarrables."* [108]

Le concept de mesure de Borel n'était pas encore intégré dans la définition de Lebesgue. Il y parvint dans le premier chapitre de sa thèse, *Intégrale, longueur, aire* [Lebesgue, 1902], qu'il présenta en 1902.

Dans cette première partie, il exposait le problème de la mesure de façon axiomatique. Dans un premier temps, il imposa sa mesure non nulle, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble E tel que $m(E) \neq 0$. Le deuxième axiome était la conservation de la mesure par translation, c'est-à-dire que pour tout ensemble E et pour tout réel a, on a $m(E + a) = m(E)$. Enfin, Lebesgue mit en axiome la σ-additivité : pour des ensembles E_n deux à deux disjoints, on a $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$.

Ainsi, si par convention on prend $m([0; 1]) = 1$, on retrouve le premier axiome de Borel : pour une union dénombrable d'intervalles I_n deux à deux disjoints,

107. aires extérieure et intérieure
108. *Sur la définition de l'aire d'une surface*, [Lebesgue, 1899]

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} L(I_n)$$

où L désigne la longueur de l'intervalle.

Le second axiome de Borel, la σ-additivité, est équivalent au troisième de Lebesgue.

Ces axiomes imposent $E \subset F \Rightarrow m(E) \leqslant m(F)$, ainsi Lebesgue remarquait que : si $m(E)$ peut être défini et si E peut être recouvert par une union dénombrable d'intervalles I_n, alors

$$m(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} L(I_n)$$

Lebesgue définit alors la *mesure extérieure* comme la borne inférieure de ces sommes, qu'il nota $m_e(E)$. Cette définition généralisait celles de Peano et Jordan (cf. l'*aire extérieure* de Peano, **3.1**, et l'*étendue extérieure* de Jordan, **3.2**).

Plutôt que de définir un contenu intérieur similaire à celui de Peano ou Jordan, Lebesgue le définit axiomatiquement, en tant que contenu extérieur du complémentaire : la mesure intérieure d'un ensemble $E \subset [a; b]$ est alors définie par :

$$m_i(E) = b - a - m_e([a; b] \diagdown E)$$

Lebesgue ayant certainement en tête la relation

$$m(E) + m([a; b] \diagdown E) = b - a$$

qui était valable pour les étendues extérieures de Jordan.

Si $m(.)$ satisfait les 3 axiomes et si on impose $m([0; 1]) = 1$, on a vu que $m(E) \leqslant m_e(E)$, mais la mesure intérieure donne d'un autre côté :

$$m_i(E) = b - a - m_e([a; b] \diagdown E) \leqslant b - a - m([a; b] \diagdown E) = m(E)$$

Ainsi, si E est mesurable (c'est-à-dire $m_i(E) = m_e(E)$), sa mesure est unique et vaut $m(E)$. La mesure que recherche Lebesgue était donc bien définie pour les ensembles mesurables.

Lebesgue montra ensuite qu'une union dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable, et que le troisième axiome, la σ-additivité, est satisfait. Ainsi cette mesure, définie par $m_i = m_e$, répond aux trois axiomes mis en place par Lebesgue, et est valable pour tout ensemble mesurable.

Il déduit ensuite des axiomes quelques propriétés sur les ensembles mesurables, notamment ce qui pour Borel était un axiome :

$$m(E_1 \diagdown E_2) = m(E_1) - m(E_2) \quad \text{lorsque} \quad E_2 \subset E_1$$

Lebesgue nota en outre que

$$c_i(E) \leqslant m_i(E) \leqslant m_e(E) \leqslant c_e(E)$$

Les ensembles Jordan-mesurables sont donc également Lebesgue-mesurables, de mesure identique. La définition de Lebesgue prolonge donc celle de Jordan.

En ce qui concerne les notions de Borel, Lebesgue prouve le théorème suivant :

Si E est un ensemble mesurable au sens de Lebesgue, alors il existe des ensembles mesurables au sens de Borel E_1 et E_2 tels que $E_1 \subset E \subset E_2$ et $m(E_1) = m(E) = m(E_2)$.

La mesure de Lebesgue peut donc aussi être vue comme un prolongement des idées de Borel.

La seconde partie de la thèse de Lebesgue consistait en l'application de sa théorie de la mesure à l'intégration. Il commença par rappeler les relations [109]

$$\overline{\int_a^b} f = c_e(E^+) - c_i(E^-) \quad \text{et} \quad \underline{\int_a^b} f = c_i(E^+) - c_e(E^-)$$

où E^+ et E^- désignent les régions délimitées par f et l'axe des abscisses, lorsque la courbe se trouve au-dessus et en-dessous de l'axe. Ces relations "suggèrent la généralisation suivante" [110] :

$$\int_a^b f = m(E^+) - m(E^-)$$

qui fut la définition géométrique de l'intégrale de Lebesgue. Ce dernier s'attela ensuite à en donner une définition analytique.

Si Riemann définissait l'intégrale à partir des sommes de Cauchy pour des subdivisions de $[a; b]$, Lebesgue choisit de partitionner l'image de f : si m et M sont les bornes inférieure et supérieure de f, Lebesgue considéra une partition

109. Ces relations n'ont jamais été énoncées aussi précisément, mais elles étaient déjà utilisées par certains mathématiciens comme Harnack ou Peano

110. *Intégrale, longueur, aire*, [Lebesgue, 1902] p.250

$$P \, : \, m = a_0 < a_1 < ... < a_i < ... < a_n = M$$

puis les ensembles

$$e_i = \{x, \, a_i \leqslant f(x) < a_{i+1}\}$$

qui forment une partition de $[a; b]$.

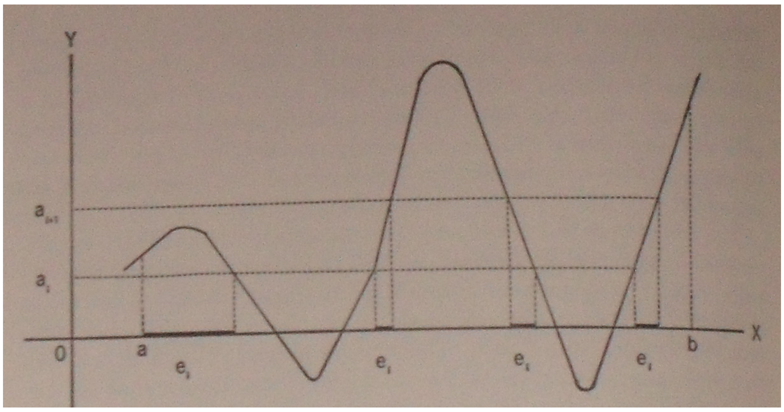


FIGURE 4 – (un ensemble e_i)

Pour justifier l'introduction de sa définition analytique, Lebesgue prit pour simplifier une fonction positive, afin de ne considérer que $E^+ = E$. Tout comme avec l'"aire sous la courbe" de Riemann (cf. **1.4**), Lebesgue nota que la mesure de E se situe entre

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i m(e_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(e_i)$$

qui sont les aires des rectangles entre lesquels la fonction f se situe. Or la différence entre ces deux sommes est

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) m(e_i) \leqslant \|P\|(b-a)$$

et tend donc vers 0 quand la norme de la partition tend vers 0. Ainsi $m(E)$ est la limite des deux sommes :

$$m(E) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_i m(e_i) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(e_i)$$

Cependant, ce raisonnement n'est possible que si les e_i sont mesurables, c'est pourquoi Lebesgue introduisit la notion de *fonction sommable*, qu'il renomma *fonction mesurable* par la suite : une fonction f est dite *mesurable* si $\{x,\, c < f(x) < d\}$ est mesurable pour toutes valeurs de c et d. Cette définition rend les e_i mesurables, et Lebesgue définit alors l'intégrale comme

$$\int_a^b f = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_i m(e_i) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(e_i)$$

Un des intérêts de la classe des fonctions mesurables est la stabilité par passage à la limite simple, ce qui n'était pas le cas des fonctions Riemann-intégrables :

Si f_n est une suite de fonctions mesurables définies sur $[a;b]$ et si $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe pour tout x, alors f est aussi mesurable.

Rappelons (cf. **1.3**) que Dirichlet ne savait pas calculer l'intégrale des fonctions telles que l'indicatrice des rationnels. Or, Lebesgue remarque que cette fonction, c'est-à-dire la fonction prenant la valeur 1 sur les rationnels et 0 ailleurs, est mesurable ; ce qui constituait un deuxième intérêt : certaines fonctions non intégrables au sens de Riemann pouvaient être mesurables au sens de Lebesgue.

Lebesgue donna ensuite une méthode générale pour construire de telles fonctions. Il suffit de prendre deux fonctions f et g continues, avec g ne s'annulant pas. Alors la fonction F, définie par $F = f$ sur $[a;b] \setminus E$ et $F = f + g$ sur E avec E dense sur $[a;b]$ mais de mesure nulle[111], ne sera pas intégrable au sens de Riemann, car discontinue partout, mais sera mesurable au sens de Lebesgue, car un ensemble de mesure nulle n'influence pas la mesurabilité.

On peut d'ailleurs remarquer une caractéristique fondamentale de l'intégrale définie par Lebesgue. En effet, l'intégrale que définissait Riemann (cf. **1.4**) ne pouvait s'appliquer qu'à l'intégration sur des segments ; et jusqu'à présent, les mathématiciens qui s'intéressaient au problème se focalisaient sur les propriétés que possédait la fonction intégrée sur ce segment. Or, avec la définition de Lebesgue, on peut définir $\int_E f$ pour tout ensemble E mesurable borné, sans se soucier de l'ensemble des points de discontinuité de f.

De plus, les fonctions construites par Volterra (telles que leurs dérivées existent partout mais ne sont pas Riemann-intégrables, cf. **2.5**) empêchaient l'application du deuxième théorème fondamental.

111. par exemple $E = [a;b] \cap Q$

Lebesgue était au courant de l'existence de telles fonctions, il en parlait à Borel dès sa première correspondance :

> *"J'ai dit dans ma note qu'il existait des fonctions dérivées non intégrables au sens de Riemann. J'en étais certain, je le suis un peu moins maintenant. Je sais qu'il existe un article de Volterra,* Giornale di Matematiche*, tome 19, page 337, traitant du sujet."*

Lebesgue remarquait alors que la définition qu'il donnait de l'intégrale permettait de "restaurer" le second théorème pour les fonctions de Volterra, au moins lorsque la dérivée est bornée. Il montra en effet le théorème suivant :

Si f' existe et est bornée sur $[a;b]$, alors f' est mesurable et

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

Lebesgue montre également un théorème sur les fonctions non bornées :

Si f est intégrable sur $[a;b]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble mesurable E inclus dans $[a;b]$ tel que f soit bornée sur E et $\int_{[a;b]\setminus E} |f| < \varepsilon$.

Ce théorème lui permit d'étendre quelques propriétés de l'intégrale aux fonctions non bornées, notamment la continuité de $x \longmapsto \int_a^x f$.

En 1903, l'année qui suivit la publication de sa thèse, Lebesgue fut choisi pour présenter le Cours Peccot au Collège de France. Ce Cours avait été créé par Borel en 1899, il y avait enseigné jusqu'en 1902 avant de laisser sa place à Lebesgue.
La préparation de ce cours lui permit d'aller plus loin dans sa théorie de l'intégration. Il publiait notamment une note *Sur les séries trigonométriques* [Lebesgue, 1903], qui reprenait les études de convergence en considérant les intégrales en son sens.

En 1904, il publia l'ensemble de ses lectures au Cours Peccot dans ses *Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives* [Lebesgue, 1904], qui contiennent les nouveaux résultats établis depuis sa thèse. On y trouve notamment une extension du second théorème fondamental aux dérivées de Dini.

5 Les premières applications

Si la théorie de l'intégration de Riemann a traversé deux siècles d'adaptations, de vérifications et de corrections, il n'a fallu que dix années pour voir la théorie de Lebesgue adoptée par tous les mathématiciens.

Lebesgue lui-même applique sa théorie à l'étude de la convergence des séries trigonométriques (cf. *Sur les séries trigonométriques*, [Lebesgue, 1903]), liées depuis Fourier à la théorie de l'intégration.

Pierre Fatou (1878-1929), connaisseur des travaux de Lebesgue, fut un des premiers à utiliser l'intégrale de Lebesgue dans ses travaux. On peut signaler l'étroite relation qui existait entre Fatou et Lebesgue, puisque dans le début de sa thèse Fatou écrivait :

> *"Qu'il me soit permis de remercier ici les personnes qui ont bien voulu m'encourager à entreprendre ce travail : MM. Painlevé et Borel et tout particulièrement mon ami H. Lebesgue qui n'a cessé de s'intéresser à mes recherches et dont les conseils m'ont été fort utiles."*[112]

En 1906, il utilisait la théorie de la mesure de Lebesgue dans son étude sur les *Séries trigonométriques et séries de Taylor* [Fatou, 1906]. Par exemple, dans le but de montrer l'inégalité de Bessel

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 \leqslant \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

pour les fonctions f positives de carré sommable, il prouva le théorème suivant :

> *Si des fonctions positives, bornées sommables : $f_1(x), f_2(x), \ldots$ tendent vers une fonction bornée ou non $f(x)$ et si*
>
> $$\int_a^b f_n(x)dx$$
>
> *reste, quel que soit n, inférieur à un nombre fixe, la fonction $f(x)$ est intégrable, et l'on a :*
>
> $$\int_a^b f(x)dx \leqq \lim.\inf.\int_a^b f_n(x)dx$$ [113]

112. *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, [Fatou, 1906] p.338

théorème portant aujourd'hui le nom de *lemme de Fatou*. On peut remarquer qu'il s'agissait du premier résultat concernant l'intégrale de Lebesgue qui ne suppose rien sur la fonction limite f.

La même année, Frygies Riesz (1880-1956) introduisait [Riesz, 1906] la classe de fonctions bornées et sommables sur un ensemble E muni de la distance $\left[\int_E (f-g)^2\right]^{1/2}$. Il remarquait qu'en considérant les fonctions telles que $\int_E |f| = 0$ comme la fonction nulle, on pouvait obtenir un espace métrique. Cette remarque constituait les débuts de la notion d'espace L^p, que Riesz introduisit et étudia lui-même plus tard (*Untersuchungen über Systeme integrirbarer Funktionen*, [Riesz, 1910])

Les travaux sur l'intégrale double ont également évolué suite à la théorie de Lebesgue.

En 1902, Lebesgue prouvait que si l'interversion

$$\int dx \left[\int f(x,y)dy\right] = \int dy \left[\int f(x,y)dx\right]$$

est possible sur un rectangle, alors elle est possible sur tout ensemble mesurable borné. En effet, si l'on cherche à valider l'interversion pour une fonction f définie sur E mesurable, il suffit de considérer la fonction $\tilde{f}$ définie sur un rectangle R contenant E, égale à f sur E et à 0 sur $R \setminus E$.

Ainsi, le fait que f soit mesurable sur E équivaut au fait que $\tilde{f}$ le soit sur R.

En 1907, Guido Fubini (1879-1943) établit le résultat pour un rectangle en montrant [114] le théorème suivant :

Si f est mesurable sur le rectangle R défini par $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, alors les fonctions $x \longmapsto f(x,y)$ et $y \longmapsto f(x,y)$ sont mesurables pour presque toutes les valeurs de y et x respectivement. De plus, les fonctions $y \longmapsto \int_a^b f(x,y)dx$ et $x \longmapsto \int_c^d f(x,y)dy$ sont mesurables, et

$$\int_R f(x,y)dR = \int_c^d dy \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] = \int_a^b dx \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]$$

Concernant les probabilités, Borel remarquait en 1905 que l'intégrale de Lebesgue pouvait s'avérer plus judicieuse d'utilisation que sa propre intégrale. Il notait en effet :

114. cf. *Sugli intergrali multipli*, [Fubini, 1907]

"Une fonction $f(x)$ est définie pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1 ; elle est égale à 1 si x est commensurable et à 0 si x est incommensurable ; quelle est sa valeur moyenne ?

Cette question est évidemment équivalente à la suivante :

On sait que x est compris entre 0 et 1 ; quelle est la probabilité pour que x soit commensurable ?

La réponse évidente aux deux questions précédentes est zéro. *Cette réponse peut-elle se déduire des formules que nous avons rappelées ? Il ne le semble pas, si l'on se borne aux définitions classiques de l'intégrale. Considérons, en effet, une fonction $f(x)$ égale à* 0 *pour x incommensurable et à* 1 *pour x commensurable et une fonction $F(x)$ égale à* 1 *pour x incommensurable et à* 0 *pour x commensurable ; les intégrales*

$$\int_0^1 f(x)dx, \quad \int_0^1 F(x)dx$$

sont toutes deux dépourvues de sens ; pour chacune d'elles l'intégrale inférieure, au sens de M. Darboux, est égale à zéro *et l'intégrale supérieure égale à* un. *Donc, quelle que soit la convention que l'on adopte, si cette convention ne fait dépendre la valeur moyenne que des intégrales précédentes, calculées au sens classique, on devra attribuer la même valeur moyenne à $f(x)$ et $F(x)$. Or, cette conclusion est absurde, car la valeur moyenne de $f(x)$ est* 0 *et la valeur moyenne de $F(x)$ est* 1.

Mais, si l'on utilise la nouvelle définition de l'intégrale qui est due à M. Lebesgue, on reconnaît que chacune des fonctions $f(x)$ et $F(x)$ est intégrable au sens de M. Lebesgue ou, plus brièvement, intégrable (L) et que leur intégrale (L) fournit la valeur correcte de la valeur moyenne ou de la probabilité recherchée. Les méthodes de M. Lebesgue permettent donc d'étudier des questions de probabilité qui paraissent inaccessibles par les procédés d'intégration classiques. D'ailleurs, dans les cas particuliers les plus simples, il suffira de se servir de la théorie des ensembles que j'avais appelés mesurables *et auxquels M. Lebesgue a donné le nom de* mesurable *(B)..."*[115]

Par la suite, Borel continua ses travaux dans la théorie des probabilités, jugeant que cette branche des mathématiques possédait plus d'applications pratiques. Peut-être avait-il pris à cœur la remarque de Schienflies à propos du manque

115. *Remarques sur certaines questions de probabilité*, [Borel, 1905] p.125-126

d'applications de sa théorie, à moins qu'il n'y songeât que suite à la remarque que lui fit Lebesgue en 1918 :

> *"Jusqu'ici la définition de M. Borel n'a d'ailleurs été utilisée par personne et, à cause de son caractère tout à fait artificiel, je crois qu'elle ne le sera jamais"*
>
> *"Il semble que M. Borel définisse pour le plaisir de définir, et parce qu'il peut définir sans contradiction, mais que ces définitions n'ont aucun but"*[116]

Nous pouvons noter qu'en 1918, Lebesgue et Borel s'étaient disputés suite à un profond désaccord concernant les positions politiques qu'ils avaient prises lors de la première guerre mondiale.

Il reste néanmoins que les probabilités furent une des plus importantes applications de la théorie de Lebesgue. Le lecteur pourra s'en convaincre en lisant *Le hasard*, [Borel, 1914], que publiait Borel en 1914, ou les ouvrages retraçant les travaux de Borel en probabilité, tels que *Émile Borel as a probabilist* [Knobloch], *The emergence of French Statistics : How mathematics entered the world of statistics in France during the 1920s* [Mazliak a] et *Borel's apprenticeship of randomness* [Mazliak b].

116. *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration*, [Lebesgue, 1918] p.194 et 196

Conclusion

Comme on l'a vu, les années qui suivirent la thèse de Lebesgue virent un développement sans précédent des études autour de l'intégration moderne et de ses applications dans de multiples directions de l'analyse. En une vingtaine d'années, elle avait remporté un succès spectaculaire en s'imposant au monde mathématique. *"Une généralisation faite non pour le vain plaisir de généraliser, mais pour résoudre des problèmes antérieurement posés, est toujours une généralisation féconde"*, disait Lebesgue en 1926.

Depuis la définition qu'en avait donnée Cauchy, et depuis les problèmes relatifs aux séries trigonométriques soulevés par Fourier, les mathématiciens - en particulier en France, en Allemagne ou en Italie, comme on l'a vu, bientôt rejoints par leurs collègues des USA, de Russie ou d'ailleurs - n'avaient eu de cesse d'améliorer ces définitions ou de s'intéresser à ces questions d'analyse. Que ce soit avec la définition de l'intégrale, de la continuité, de la dérivabilité, ou avec les problèmes de l'intégration terme-à-terme et de l'intégrale double, c'est dans ce but que Riemann introduisit ses deux critères, et ce fut dans le souci de généraliser ces critères que les mathématiciens travaillèrent à faire avancer la théorie.

Les études de Peano, Jordan et Borel, changèrent la façon d'aborder la question. Le problème topologique, associé à l'ensemble de discontinuité de la fonction intégrée, laissait place au problème de définition de l'aire que Lebesgue reprit comme question centrale de l'intégration.

Il fut ansi le mathématicien qui ouvrit la voie décisive vers la synthèse de deux siècles de raisonnements. Sa théorie généralisait à la fois les notions introduites par Riemann, Peano et Jordan, et exploitait la nouvelle approche proposée par Borel pour mesurer les ensembles. De nombreuses branches des mathématiques, les mathématiques du hasard tout particulièrement, purent alors prendre appui sur cette théorie et connaître au $XX^{\text{ème}}$ siècle la croissance que l'on sait.

Références

[Abel, 1826] Abel, Niels Henrik, "Recherches sur la série $1 + (m/1)x + (m(m-1)/1.2)x^2 + (m(m-1)(m-2)/1.2.3)x^3 + ...$", 1826, *Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1*, 221-224

[Ampère, 1806] Ampère, André Marie, "Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor", 1806, *Paris, Journal de l'École Polytechnique, 13*, 148-181

[Appell, 1882] Appell, Paul, "Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle", 1882, *Paris, Comptes rendus hebdomadaires des scéances de l'Académie des Sciences, 94*, 1238-1240

[Arzelà, 1891] Arzelà, Cesare, "Sugli integrali doppi", 1891, *Memorie della Accademia delle Scienze dell'Instituto di Bologna, (5) 2*, 133-147

[Ascoli, 1873] Ascoli, Giulio, "Ueber trigonometrische Reihen", 1873, *Mathematische Annalen, 6*, 231-240

[Ascoli, 1875] Ascoli, Giulio, "Sul concetto di integrale definito", 1875, *Roma, Atti della R. Accademia dei lincei, (2) 2*, 863-872

[Borel, 1895] Borel, Émile, "Sur quelques points de la théorie des fonctions", 1895, *Paris, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, (3) 12*, 9-55

[Borel, 1898] Borel, Émile, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898, Paris, Gauthier-Villars.

[Borel, 1905] Borel, Émile, "Remarques sur certaines questions de probabilité", 1905, *Bulletin de la S. M. F., 33*, 123-128

[Borel, 1914] Borel, Émile, *Le hasard*, 1914, Félix Alcan, Paris.

[Borel, 1940] Borel, Émile, *Selecta : Jubilé scientifique de M. Émile Borel*, 1940, Paris, Gauthier-Villars.

[Cantor, 1872] Cantor, Georg, "Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", 1872, *Mathematische Annalen, 5*, 92-101

[Cantor, 1879] Cantor, Georg, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten", 1879, *partie 1, Mathematische Annalen, 15*, 1-7

[Cantor, 1880] Cantor, Georg, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten", 1880, *partie 2, Mathematische Annalen, 17*, 355-358

[Cantor, 1883] Cantor, Georg, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten", 1883, *partie 5, Mathematische Annalen, 21*, 51-58, 545-591

[Cantor, 1884] Cantor, Georg, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten", 1884, *partie 6, Mathematische Annalen, 23*, 453-488

[Cauchy, 1821] Cauchy, Augustin, *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, 1821, Paris, deBure. Les références proviennent des *Œuvres complètes, (2) 3*, 1897

[Cauchy, 1823] Cauchy, Augustin, *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, 1823, Paris, deBure. Les références proviennent des *Œuvres complètes, (2) 4*, 1899

[Cauchy, 1827] Cauchy, Augustin, *Mémoire sur les intégrales définies*, 1827, Paris, deBure. Les références proviennent des *Œuvres complètes, (1) 1*, 1882, 319-506

[Cauchy, 1829] Cauchy, Augustin, *Leçons sur le calcul différentiel*, 1829, Paris, deBure. Les références proviennent des *Œuvres complètes, (2) 4*, 1899, 263-609

[Cauchy, 1849] Cauchy, Augustin, "Mémoire sur les fonctions discontinues", 1849, *Paris, Comptes Rendus hebdomadaires des Scéances de l'Académie des Sciences, 28*, Les références proviennent des *Œuvres complètes, (1) 11*, 1899, 120-126

[D'Alembert, 1747] D'Alembert, Jean Le Rond, "Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration", 1749, *Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 214-249

[Darboux, 1875] Darboux, Gaston, "Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues", 1875, *Paris, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, (2) 4*, 57-112

[Dini, 1874] Dini, Ulisse, "La serie di Fourier", 1874, *Pisa, Annali delle Università Toscane, 14*, 161-176

[Dini, 1878] Dini, Ulisse, *Fondamenti per la teorica della funzioni di variabili reali*, 1878, Pisa.

[Dirichlet, 1829] Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, "Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données", 1829, *Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 4*, 157-169

[Dirichlet, 1837] Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, "Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen", 1837, *Repertorium der Physik, 1*, 152-174

[Drach, 1898] Drach, Jules, "Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendentes", 1898, *Paris, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, (3) 15*, 243-384

[Du Bois-Reymond, 1875a] Du Bois-Reymond, Paul, "Beweis, dass die Coeffizienten der trigonometrischen Reihe $f(x) = \sum_{p=0}^{\infty}(a_p \cos px + b_p \sin px)$ die Werthe

$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha f(\alpha),\ a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha f(\alpha)\cos p\alpha,\ b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha f(\alpha)\sin p\alpha$ haben, jedesmal wenn diese Integrale endlich und bestimmt sind", 1875a, *München, Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften, 12*, 117-166

[Du Bois-Reymond, 1875b] Du Bois-Reymond, Paul, "Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argument nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen", 1875b, *Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 79*, 21-37

[Du Bois-Reymond, 1883] Du Bois-Reymond, Paul, "Ueber das Doppelintegral", 1883, *Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 94*, 273-290

[Fatou, 1906] Fatou, Pierre, "Séries trigonométriques et séries de Taylor", 1906, *Acta Mathematica, 30*, 335-400

[Fourier, 1822] Fourier, Joseph, *La théorie analytique de la chaleur*, 1822, Paris, Didot.

[Fubini, 1907] Fubini, Guido, "Sugli integrali multipli", 1907, *Roma, Atti della R. Accademia dei lincei. Rendiconti, (5) 16*, 608-614

[Gilbert, 1873] Gilbert, Louis-Philippe, "Mémoire sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues", 1873, *Bruxelles, Mémoires Couronnes et Mémoires des Savants Étranges publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, 23*, n°3

[Hankel, 1870] Hankel, Hermann, *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Functionen*, 1870. Les références proviennent de *Mathematische Annalen, 20*, 1882, 63-112

[Hankel, 1871] Hankel, Hermann, "Grenze", *Allgemeine Encyklopädie der Wissenschaften und Künste*, 1871, section 1, partie 90, 189-211. Leipzig, F. A. Brockhaus.

[Harnack, 1880] Harnack, Axel, "Über die trigonometrische Reihe und die Darstellung willkürlicher Functionen", 1880, *Mathematische Annalen, 17*, 122-132

[Harnack, 1882] Harnack, Axel, "Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe", 1882, *Mathematische Annalen, 19*, 235-279

[Harnack, 1884] Harnack, Axel, *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung*, 1884, Leipzig, B. G. Teubner.

[Harnack, 1885] Harnack, Axel, "Ueber den Inhalt von Punktmengen", 1885, *Mathematische Annalen, 25*, 241-250

[Harnack, 1886] Harnack, Axel, "Bemerkung zur Theorie des Doppelintegrals", 1886, *Mathematische Annalen, 26*, 566-568

[Heine, 1870] Heine, Heinrich, “Ueber trigonometrischen Reihen”, 1870, *Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 71*, 353-365

[Hölder, 1884] Hölder, Otto, “Zur Theorie der trigonometrischen Reihen”, 1884, *Mathematische Annalen, 24*, 181-216

[Jordan, 1882-1887] Jordan, Camille, *Cours d’Analyse de l’École Polytechnique*, 1882-1887, $1^{ère}$ édition, Paris, Gauthier-Villars.

[Jordan, 1892] Jordan, Camille, “Remarques sur les intégrales définies”, 1892, *Liouville, Journal de mathématiques pures et appliquées, (4) 8*, 69-99

[Klein, 1979] Klein, Felix, “Development of mathematics in the Nineteenth century”, 1979, *Math. Sci. Press*

[Lamarle, 1885] Lamarle, Anatole Henri Ernest, “Étude approfondie sur les deux équations fondamentales $\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ et $dy = f'(x).\Delta x$”, 1855, *Bruxelles, Mémoires de l’Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, 29*

[Lebesgue, 1901-1918] Lebesgue, Henri Léon, *La génèse de l’intégrale : lettres d’Henri Lebesgue à Émile Borel (1901-1918)*, 2004, Vuibert.

[Lebesgue, 1899] Lebesgue, Henri Léon, “Sur la définition de l’aire d’une surface”, 1899, *Paris, Comptes Rendus hebdomadaires des Scéances de l’Académie des Sciences, 129*, 870-873

[Lebesgue, 1902] Lebesgue, Henri Léon, “Intégrale, longueur, aire”, 1902, *Annals of Mathematics, (3) 7*, 231-359

[Lebesgue, 1903] Lebesgue, Henri Léon, “Sur les séries trigonométriques”, 1903, *Paris, Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure, (3) 20*, 453-485

[Lebesgue, 1904] Lebesgue, Henri Léon, *Leçons sur l’intégration et la recherche des fonctions primitives*, 1904, Paris, Gauthier-Villars.

[Lebesgue, 1918] Lebesgue, Henri Léon, “Remarques sur les théories de la mesure et de l’intégration”, 1918, *Paris, Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure, (3) 35*, 191-250

[Lebesgue, 1922] Lebesgue, Henri Léon, *Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue*, 1922, Toulouse.

[Lebesgue, 1926] Lebesgue, Henri Léon, “Sur le développement de la notion d’intégration”, 1926, *Matematisk Tidsskrift, 3-4 Hefte*, 149-167

[Lipschitz, 1864] Lipschitz, Rudolph, “De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrariarum, et praecipue earum, quae per variabilis spatium finitum valorum maximorum et minimorum numerum habent infinitum, disquisitio”, 1864, *Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 63*, 296-308

[Peano, 1883] Peano, Giuseppe, "Sulla integrabilità della funzioni", 1883, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 18*, 439-446

[Peano, 1887] Peano, Giuseppe, *Applicazione geometriche del calcolo infinitesimale*, 1887, Torino, Bocca.

[Picard, 1891] Picard, Émile, *Traité d'analyse*, 1891, Volume 1, Paris, Gauthier-Villars.

[Poincaré, 1883] Poincaré, Henri, "Sur les fonctions à espaces lacunaires", 1883, *Helsingfors, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, 12*, 343-350

[Riemann, 1851] Riemann, Bernhard, "Grundlagen für eine allgemeine Theory der Functionen einer veränderlichen complesen Grösse", 1851. Les références proviennent de *Werke*, 1-48

[Riemann, 1867] Riemann, Bernhard, "Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe", 1867, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, volume 13*

[Riemann, 1902] Riemann, Bernhard, *Gesammelte mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, 1902, 2ème édition, Leipzig, B. G. Teubner.

[Riesz, 1906] Riesz, Frygies, "Sur les ensembles de fonctions", 1906, *Paris, Comptes Rendus hebdomadaires des Scéances de l'Académie des Sciences, 143*, 738-741

[Riesz, 1910] Riesz, Frygies, "Untersuchungen über Systeme integrirbarer Funktionen", 1910, *Mathematische Annalen, 69*, 449-497

[Schoenflies, 1900] Schoenflies, Arthur, "Die entwickelung der lehre von den punktmannigfaltigkeiten", 1900, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 8*

[Smith, 1875] Smith, Henri John Stephen, "On the Integration of Discontinuous Functions", 1875, *Proceedings of the London Mathematical Society, 6*, 140-153

[Stolz, 1884] Stolz, Otto, "Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth", 1884, *Mathematische Annalen, 23*, 152-156

[Thomae, 1875] Thomae, Carl Johannes, *Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale*, 1875, Halle.

[Thomae, 1878] Thomae, Karl Johannes, "Ueber bestimmte Integrale", 1878, *Zeitschrift für Mathematik und Physik, 23*, 67-68

[Volterra, 1881] Volterra, Vito, "Sui principii del calcolo integrale", 1881, *Giornale di Matematiche, 19*, 333-372

[Weierstrass, 1880] Weierstrass, Karl, "Zur Functionenlehre", 1880, *Monatsberichte der Königlich Preusschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 719-743

[Weierstrass, 1894-1927] Weierstrass, Karl, *Mathematische Werke*, 1894-1927, 7 volumes, Berlin, Mayer et Müller.

[Weierstrass, 1923] Weierstrass, Karl, "Briefe von K. Weierstrass an Paul Du Bois-Reymond", 1923, *Acta Mathematica, 39*, 226-239

[Weierstrass, 1923] Weierstrass, Karl, "Briefe von K. Weierstrass an L. Koenigsberger", 1923, *Acta Mathematica, 39*, 226-239

SOURCES SECONDAIRES :

[Hawkins] Hawkins, Thomas, *Lebesgue's theory of integration : It's origins and development*, 1970, The University of Wisconsin Press.

[Bressoud] Bressoud, David, *A radical approach to Lebesgue's theory of integration*, 2008, Cambridge University Press.

[Michel] Michel, Alain, *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, 1992, Paris, Vrin.

[Knobloch] Knobloch, Eberhard, "Émile Borel as a probabilist", 1987, *Krüger Lorenz, Daston Lorraine, Heidelberger Michael et Morgan Mary S. : The Probabilistic Revolution - Vols. 1 and 2, MIT Press*

[Mazliak a] Catellier Rémi et Mazliak Laurent, "The emergence of French Statistics : How mathematics entered the world of statistics in France during the 1920s", à paraître dans *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 2011.

[Mazliak b] Durand Antonin et Mazliak Laurent, "Borel's apprenticeship of randomness", à paraître.