Université Pierre et Marie Curie
Module LP212 "Le Son Musical"
L.Mazliak

Contrôle du 6 avril 2011

Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique impaire définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}$$

et étudier la convergence.
Calculer

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{16k^2 + 16r + 3}$$

SOLUTION : Comme la fonction est impaire, on a $a_n = 0$ pour tout n.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x + \sin(n-1)x] dx.$$

Pour $n = 1$, $b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2x) dx = \frac{1}{\pi} [-\frac{\cos(2x)}{2}]_0^{\pi} = 0$.
Pour $n \geq 2$,

$$b_n = -\frac{1}{\pi} [\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}]_0^{\pi} =$$

$$-\frac{1}{\pi} ((-1)^{n+1} - 1)(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}) =$$

$$\frac{1}{\pi} ((-1)^n + 1) \frac{2n}{n^2 - 1}.$$

On a donc

$$f(x) \approx \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\pi} ((-1)^n + 1) \frac{2n}{n^2 - 1} \sin(nx) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 1} \sin(2kx)$$

Il est clair que théorème de Dirichlet va s'appliquer en tout point de $\mathbf{R}$ (justifier!). Si on choisit $x = \frac{\pi}{4}$, on a

$$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2r+1}{4(2r+1)^2 - 1} (-1)^r =$$

$$\frac{8}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{2r+1}{16r^2 + 16r + 3}$$

d'où

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{2r+1}{16r^2 + 16r + 3} = \frac{\sqrt{2}}{16} \pi.$$

Université Pierre et Marie Curie
Module LP212 “Le Son Musical”
L.Mazliak

Contrôle du 6 avril 2011

Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique paire définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}$$

et étudier la convergence.
Calculer

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{16k^2 - 1}$$

SOLUTION : Comme la fonction est paire, on a $b_n = 0$ pour tout n.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx.$$

Pour $n = 0$, $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}[-\cos x]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$.
Pour $n = 1$, $b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2x) dx = \frac{1}{\pi}[-\frac{\cos(2x)}{2}]_0^{\pi} = 0$.
Pour $n \geq 2$,

$$b_n = -\frac{1}{\pi}[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}]_0^{\pi} =$$

$$-\frac{1}{\pi}((-1)^{n+1} - 1)(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}) =$$

$$\frac{1}{\pi}((-1)^n + 1)\frac{-2}{n^2 - 1} =$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1}.$$

On a donc

$$f(x) \approx \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(2kx)$$

Il est clair que théorème de Dirichlet va s'appliquer en tout point de $\mathbf{R}$ (justifier!). Si on choisit $x = \frac{\pi}{4}$, on a

$$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(k\frac{\pi}{2}) =$$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{r \geq 0} \frac{1}{4(2r)^2 - 1} (-1)^r = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{r \geq 0} \frac{(-1)^r}{16r^2 - 1}.$$

d'où

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{16r^2 - 1} = -\frac{\pi}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\pi}) = (\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}).$$