Sur la pulsation probabiliste

Laurent Mazliak
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires
Université Paris VI 75252 PARIS CEDEX 05

March 11, 2002

Introduction

L'objet de cet article est de proposer quelques réflexions concernant l'enseignement des probabilités. Celles-ci se fondent essentiellement sur mon expérience personnelle au contact d'étudiants des différents cycles universitaires. Je ne saurais donc prétendre à une quelconque exhaustivité, d'autant que c'est là un constat qui vient à la suite de multiples travaux des IREM et de l'APMEP sur le sujet (voir par exemple [3]). Il m'a cependant semblé utile, en raison de la multiplication des filières où un enseignement dit de probabilités est présent, de mener de nouveau une réflexion sur ce qui est à mon sens la particularité de cette discipline quant à sa didactique. On parle en effet de plus en plus d'introduire des notions plus consistantes concernant les phénomènes du hasard dans l'Enseignement Secondaire ou dans les Classes Préparatoires aux Grandes Écoles. Les programmes du CAPES et de l'Agrégation de Mathématiques ont par ailleurs depuis quelques années été renforcés dans cette discipline ce qui amène de plus en plus de nos étudiants à suivre une formation de second cycle en probabilités. Et ce ne sont là que des exemples parmi d'autres, au milieu d'un mouvement d'intérêt pour les mathématiques du hasard. Sans doute le phénomène est-il en partie spécifiquement français, peut être en raison d'un certain retard accumulé dans la prise en compte de ces questions. Jusqu'à une époque pas si lointaine, le calcul des probabilités en France n'avait pas très bonne presse. La communauté mathématique française des années 50-70 s'est souvent rangée au jugement négatif porté par les ténors de l'École Bourbakiste, tenants d'une mathématique pure et dure (voir les commentaires sur ce sujet de [1],p.76). En conséquence, les probabilités et, par suite, leur enseignement ne furent au mieux vues que comme une partie de l'analyse, occultant ainsi tout ce qui fait à mon sens la richesse très particulière d'un domaine dont l'intérêt réside justement dans le fait de ne pas se limiter à un traitement purement analytique. Je crois qu'il est important que les non spécialistes qui ont à enseigner ces notions prennent toute la mesure de ce fait: le hasard occupe une telle place dans nos questionnements sur l'existence que tout ce qui aide à le concevoir force l'attention.

1 La pulsation probabiliste

Dans son livre[2], Guitart met en avant le rôle moteur d'une force spécifique, qu'il nomme la "pulsation mathématique". Elle féconde chez l'élève le terreau qui l'amène à une *compréhension*, au sens littéral du terme, des objets et concepts que l'enseignant a pour but de lui faire s'approprier. Cette force créatrice de sens dans la perception du discours mathématique auquel il est confronté permet à l'élève de recréer, même si c'est souvent en tâtonnant toute l'armature sous-jacente à ce discours ce qui est bien plus consistant que d'ingurgiter une suite de résultats ou théorèmes plus ou moins puissants dont on serait amené à se servir comme on utilise un lave-vaisselle après en avoir lu le mode d'emploi . Car l'idée forte de Guitart c'est qu'un enseignement de mathématiques ne prend son sens qu'à travers le fait que l'élève *fait* des mathématiques, au sens où il construit une pensée.

Les probabilités ayant la prétention de faire partie de la sphère mathématique, et de ce fait ceux qui les enseignent d'enseigner des mathématiques, il est légitime, en admettant l'hypothèse de Guitart de se demander comment se présente la pulsation mentionnée ci-dessus dans un cours de calcul des probabilités. Il y a lieu à ce stade de signaler d'ailleurs que le vocable consacré par l'usage est en lui-même assez malheureux: le mot "calcul" fait trop référence à un contenu technique et utilitaire pour ne pas être la source d'un malentendu. Avant d'illustrer dans les paragraphes suivants par quelques exemples comment je conçois cette pulsation propre, je voudrais faire quelques remarques générales sur l'enseignement de la discipline et ses difficultés spécifiques.

Une particularité d'un enseignement de probabilités réside dans un jeu permanent entre un discours mathématique à visée auto-contenue, au sens anglais de l'expression *"self-contained"*, et une interprétation phénoménologique de ce discours. Les deux composantes sont absolument nécessaires pour donner un sens à l'activité de l'enseignant. Passer à côté de l'interprétation - descriptive et explicative au mieux, questionnante au moins- en terme de comportement du phénomène au hasard, et le discours mathématique apparaît creux, en se réduisant dans les meilleurs cas à un joli exercice où on met en relief la fonctionnalité des outils analytiques utilisés. De même, négliger la précision et le "réglage" des concepts mathématiques utilisés entache la validité démonstrative du discours scientifique qui est remise immédiatement en question.

Une bonne illustration de cette observation préliminaire est justement donnée par le traitement peu amène qui a été réservé pendant longtemps aux mathématiques du hasard. Dans son livre de mémoires [4], L.Schwartz raconte comment le public du séminaire Bourbaki a accueilli un séminaire de Doob dans les années 50 en le conspuant sur des problèmes de fondements de la théorie des probabilités au lieu de chercher à s'intéresser aux résultats qu'il voulait présenter. Il ne s'agissait pas à mon sens seulement d'une réaction de snobisme de "mathématiciens purs" envers des mathématiques moins pures (?). Une telle réaction venait surtout d'une incapacité à prendre en compte toute l'interprétation du phénomène aléatoire qui donnait son intérêt aux notions étudiées. Je ne discute pas ici le fait de savoir si une telle interprétation fait ou non partie légitimement d'un travail mathématique. Je pense simplement qu'elle est indissociable d'un discours probabiliste

pertinent. Pour être plus précis sur l'exemple précédent, Bourbaki définit la mesure abstraite par dualité sur des ensembles localement compacts, une définition qui ne peut convenir à un modèle général pour les probabilités où l'ensemble Ω des hasards élémentaires se doit d'être *a priori* absolument quelconque. On voit par là qu'il ne suffit pas de dire qu'on "plonge" la théorie des probabilités dans la théorie de la mesure pour que toute question de probabilités se résume en une question d'Analyse: les choix mathématiques sont aussi dictés par des impératifs liés au phénomène, illustration d'une symbiose constante entre les deux points de vue. A mon sens, c'est autour de cette symbiose qui est en devenir permanent que se love le germe pulsatif.

2 Un exemple: la loi d'une variables aléatoire

Dans la suite de cet article, je voudrais illustrer ce fait à travers une notion de base des probabilités, la notion de loi d'une variable aléatoire. On peut en effet considérer que quand les données d'un problème ont été exposées en termes de variable aléatoire, l'instant où est introduite la loi est le véritable commencement du traitement mathématique.

Sans doute faut-il avant tout dire quelque chose des variables aléatoires. Une appelation malheureuse n'est pas pour rien dans la difficulté des étudiants pour faire face à ce concept. En effet, le mot *variable*, dans l'esprit d'un élève de terminale ou d'un étudiant de début d'université, se réfère inévitablement à la lettre x dans une expression fonctionnelle $f(x)$, lettre dont on lui ressasse en permanence qu'elle est *muette*, au sens où elle est susceptible d'être remplacée par n'importe quoi (en général, n'importe quel nombre réel ou complexe suivant le contexte). De ce fait, l'introduction de l'adjectif *aléatoire* à côté de variable en laisse perplexe plus d'un, surtout quand ceci se fait à travers une définition qui donne un statut fonctionnel à cette *variable*, puisque ce dernier nom ne s'appliquait dans son esprit qu'à l'*argument* d'une fonction. Définir une variable aléatoire comme une fonction sur Ω cache en soi une réelle difficulté conceptuelle que peu d'étudiants surmontent avant de nombreux mois. Nous passons souvent à côté de ce trouble. Pour essayer de les aider à surmonter leur perplexité, je pense indispensable d'affirmer ouvertement qu'il ne s'agit que d'un vocabulaire consacré par l'usage. Sans doute l'appellation *élément aléatoire* ou même *élément dépendant du hasard* aurait-elle été plus appropriée (P-L.Hennequin me signalait qu'il y a trente ans déjà la proposition "aléa numérique" n'avait rencontré aucune succès): puisque les éléments de l'espace Ω représentent les hasards qui peuvent se produire, il est raisonnable d'admettre que ce qui dépend du hasard va s'exprimer par une relation fonctionnelle sur Ω. Une série d'exemples élémentaires, issus d'exemples très concret, doit alors permettre d'accepter l'abus de langage. Qu'ils s'écrivent exhaustivement (la somme des points amenés par le lancer de deux dés) ou non (la température sur un thermomètre comme résultat de l'action du hasard météorologique). On voit déjà là se profiler une prise de sens qui ne se fait qu'à travers une mise en relation avec une interprétation de type phénoménologique.

Ceci est encore beaucoup plus évident quand on en vient à la notion de loi d'une

variable aléatoire. Il est assez étonnant de voir que les étudiants savent souvent si bien réciter la définition ("*la loi d'une variable aléatoire est la mesure-image de la probabilité par cette variable*") sans attribuer le moindre sens au concept sous-jacent. Se cachent là deux problèmes. D'abord, et c'est le moins grave, le fait qu'une définition qui utilise une notion mathématique difficile (la mesure-image) demande à être considérablement étayée si l'on attend d'elle la construction d'un concept un tant soit peu actif. Mais surtout, le réflexe normal d'un étudiant qui vient suivre un cours de probabilités, donc dans son imaginaire naïf un cours qui va porter sur les phénomènes liés au hasard - ce qui lui est en général confirmé lors du premier cours de la série à travers une introduction vaguement philosophique qui veut justifier la pertinence d'une approche mathématique de ces phénomènes- est de se demander ce que *ça* vient faire là.

Il est donc illusoire de penser qu'on peut s'emparer d'un tel concept en dehors d'un contexte spécifiquement probabiliste. Quelqu'un qui prendrait la définition précédente au pied de la lettre, même en n'ayant à surmonter aucun des problèmes techniques provenant de la théorie de la mesure, passerait complètement à côté de sa profondeur. Elle est en effet en soi un bel exemple de démarche mathématique, qui illustre le commentaire en forme de boutade: "*Faire des mathématiques, c'est chercher à se simplifier la vie en se la compliquant*". La notion de loi d'une variable aléatoire ne prend son sens actif qu'en rapport avec le recensement effectif des interventions de l'aléatoire dans le problème qu'on étudie. Se dégage ainsi l'idée centrale du calcul des probabilités (en partie en opposition avec la problématique des statistiques): le hasard est trop intrinsèquement inaccessible pour être étudié en tant que tel, aussi ce n'est pas à lui qu'on s'intéresse mais à un effet qu'il produit. On peut noter au passage qu'une telle affirmation peut aussi bien cadrer avec une vision déterministe comme celle de Laplace qu'avec un hasard objectif illustré par la mécanique quantique. Là encore, des exemples très simples viennent appuyer cette déclaration: la température d'aujourd'hui- simple graduation sur un thermomètre- conséquence du temps qu'il fait avec l'ensemble mouvant des composantes que cela représente. C'est dans cet effort de résumé radical des effets du hasard dans le problème étudié, dans ce véritable *transport du hasard* sur l'ensemble restreint des phénomènes en observation que je vois la pulsation probabiliste dans la notion active de loi d'une variable aléatoire. Le fait qu'un étudiant s'approprie cette dynamique du transport est la condition *sine qua non* que la partie soit gagnée pour lui et qu'il puisse passer à la construction d'objets plus complexes. Je pense en particulier à tous les modèles de la statistique paramétrique élémentaire où l'on travaille classiquement sur une famille paramétrée de probabilités P_θ sur $\mathbf{R}$ avec une unique variable aléatoire définie par la fonction identité, ou plus loin à tout ce qui va concerner les objets *un étage au dessus* que sont les processus stochastiques, pour l'étude desquels la notion d'espace canonique va jouer un rôle essentiel tout spécialement en temps continu, situation dont le paradigme est fourni par la mesure de Wiener sur l'espace des trajectoires continues comme représentation du mouvement brownien [1] Il est très difficile de comprendre pourquoi une étude en loi d'un processus suffit pour décrire

[1] Un processus stochastique est défini comme une fonction aléatoire: à chaque ω est associée une fonction (continue quand il s'agit du mouvement brownien) $B(.,\omega)$ de $[0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$. De la même façon que dans le cas élémentaire précédent, le transport du hasard va permettre de définir une mesure

ses propriétés les plus importantes sans avoir auparavant intégré activement la notion de transport permettant de ne voir le hasard qu'à travers le prisme des objets qu'on s'est limité à regarder. En particulier, la pulsation, le *s'y mettre* de Guitart se niche dans cette mise en correspondance entre le phénomène lié au hasard comme une description de l'action du ω sur l'expérience observée et sa lecture quantifiée dans les espaces beaucoup plus simples où ses effets se font sentir. Cela s'écrit laborieusement (par exemple quand on fait dresser un tableau de la loi de la variable aléatoire *somme des deux dés* dans le lancer de deux dés) dans des cas progressivement complexes, puis finit par devenir une force motrice dans le traitement des problèmes. C'est sous cette pulsation, et sous elle uniquement, que ces derniers prennent sens et intérêt.

Prenons un exemple. Quand la variable aléatoire X représente les points obtenus par le lancer de deux dés, on peut modéliser Ω par $\{1,2,3,4,5,6\}^2$, qu'on munit de la probabilité uniforme qui satisfait $P(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$ pour chaque ω, et $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$ si $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. La loi de X est alors présentée comme le tableau ci-dessous où sont inscrites les différentes valeurs des probabilités des événements $(X = i), i = 2, 3, \ldots, 12$:

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(x=i)	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

A la suite de ceci, il est possible de déterminer avec ce tableau toute une série de résultats numériques concernant des événements exprimés avec X: la probabilité que $X \geq 6$, que $X^2 \leq 17$ etc. En fait, on peut pour ce faire oublier complètement l'espace Ω. Dans un sens, c'est même le but recherché. Mais il est nécessaire de comprendre qu'en faisant cet oubli, on perd une certaine information: on *accepte* de la perdre parce que ça nous arrange, mais il s'agit bien d'un acte volontaire, pulsatif pour reprendre le terme de Guitart. De ce fait, il est dommageable que l'élève abandonne complètement l'idée qu'il y a un espace sous-jacent comme cela devient facilement le cas si on omet de revenir sans cesse sur ce point, surtout quand on se met à aborder des situations plus sophistiquées comme les variables à densité. Regardons en effet un autre exemple *ad hoc*: si $\Omega = \{0,1\}$ est muni de la probabilité uniforme, les deux variables X et Y définies par $X(\omega) = \omega$ et $Y(\omega) = 1 - \omega$ ont même loi. Seule la prise de conscience de l'acte pulsatif précédent, le morphisme qui transporte le hasard sur l'espace des valeurs prises par X et Y, à savoir $\{0,1\}$, permet de formuler le commun à X et Y, alors que ces deux objets, en tant que fonctions, ne prennent jamais la même valeur.

Conclusion

De toutes ces considérations, je tire la conclusion qu'un enseignement de probabilités ne peut pas être tout à fait un enseignement comme les autres à l'intérieur du champ mathématique. Il est plus facile du point de vue didactique de trouver des points communs entre, par exemple, la théorie des groupes et l'analyse fonctionnelle (ou la théorie de

de probabilités sur l'ensemble des fonctions continues de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, dite mesure de Wiener, qui représente la loi du mouvement brownien.

la mesure d'ailleurs) qu'on peut dans les grandes lignes introduire d'une façon similaire: "Voilà des objets mathématiques, voilà leurs propriétés, voilà ce qu'on peut en faire." qu'avec la théorie des probabilités où interviennent des types de raisonnement et de considérations qui vont faire appel à une sphère complètement différente de la connaissance. En particulier, il est nécessaire de laisser un certain temps pour que cet état d'esprit s'installe chez un étudiant, même très brillant. Ce temps est incompressible et il faut en tenir compte, par exemple dans l'établissement des programmes et des horaires.

References

[1] Numéro spécial "Pour la Science" sur Bourbaki

[2] René GUITART: La Pulsation Mathématique, Editions L'Harmattan

[3] IREM: Enseigner les probabilités au lycée, Réseau des IREM, 1997

[4] Laurent SCHWARTZ: Un mathématicien aux prises avec le siècle, Editions Odile Jacob