LU3MA250 – FORMULE DE STOKES ET EDP

S6, 6 ECTS, 24h CM + 36h TD

Contenu : Le théorème fondamental de l'analyse s'écrit

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Une façon plus sophistiquée de l'interpréter est la suivante : $]a, b[= \Omega$ est un ouvert de bord $\partial = \{a, b\}$, le vecteur pointant vers l'extérieur de l'intervalle en b (resp. a) est 1 (resp. -1), $f' = Df$ est la différentielle de f , dS est la mesure de comptage sur $\{a, b\}$, alors

$$\int_\Omega Df dx = \int_{\partial\Omega} fndS.$$

Le but de ce cours est de montrer que cette formule est vraie dans le cadre général où Ω est un ouvert de R^d, $\partial\Omega$ une hypersurface régulière et n le vecteur perpendiculaire $\partial\Omega$ pointant vers l'extérieur, elle s'appelle alors formule de Green. C'est une conséquence de la formule de Stokes dont la formulation la plus générale dépasse le cadre de ce cours, on en verra cependant un autre avatar avec la formule de Kelvin–Stokes. Pour cela il faudra manifestement définir la notion de surface, de perpendiculaire à une surface, d'ouvert régulier, et, bien sûr, définir ce qu'est une intégrale sur une surface. C'est l'objet des deux premiers chapitres. Cette formule joue un rôle fondamental en physique, on verra donc au troisième chapitre plusieurs applications, notamment pour la gravitation, l'électrostatique et la mécanique des fluides. Les prérequis sont le cours de calcul différentiel du précédent semestre (LU3MA260) et de bons souvenirs d'algèbre de première année, en particulier le déterminant. On n'utilise pas de résultat avancé d'intégration, hormis la formule de changement de variable en dimension quelconque.

Responsable : Corentin AUDIARD, corentin.audiard@upmc.fr