

LU3MA266 – ANALYSE COMPLEXE

S6, 6 ECTS, 24h CM + 36h TD

Objectifs : La théorie des fonctions holomorphes à une variable a été introduite et développée par Cauchy dans les années 1830 afin d'expliquer certains phénomènes de mécanique. Depuis, l'analyse complexe s'est avérée être une théorie fondamentale des mathématiques. Elle est aussi utile dans beaucoup de domaines de la physique. Le but de ce cours est de poser les fondements de ce très bel édifice conceptuel qu'est l'analyse complexe. Le programme contient celui de l'agrégation de mathématique mais s'étend peu au-delà. Il laisse de côté le théorème de Montel et celui de Riemann sur les représentations conformes. Les résultats et les outils de l'analyse complexe sont de natures très différentes de celles des résultats et des outils de l'analyse réelle. Il n'en demeure pas moins que ce cours s'appuie sur les théorèmes classiques d'intégration (inversion somme et intégrale, convergence dominée, régularité d'une intégrale à paramètre) ainsi que sur les bases du calcul différentiel réel. La théorie et la pratique des séries entières font aussi parties des fondements de l'analyse complexe. Beaucoup de théorèmes d'analyse complexe sont assortis d'hypothèses topologiques. C'est pourquoi il faut avoir assimilé les notions de compacité, connexité et de distance à un ensemble. Le mélange de toutes ces notions fait à la fois la richesse et la difficulté de l'analyse complexe.

Contenu : Plan complexe, fonctions holomorphes, équations de Cauchy–Riemann, conservation des angles. Exponentielle et fonctions trigonométriques. Argument, logarithmes et puissances. Intégrales curvilignes et primitives holomorphes, théorie de Cauchy sur un ouvert étoilé, formule de Cauchy, théorème fondamental. Théorème de l'indice. Théorie de Cauchy homotopique. Propriétés fondamentales des fonctions holomorphes, principe d'unicité, théorèmes de Liouville, Morera et Riemann. Suites, séries et intégrales de fonctions holomorphes. Principe du maximum. Séries de Laurent, classification des singularités, théorème des résidus, théorème des résidus logarithmiques. Applications au calcul d'intégrales.

Responsable : Vincent MICHEL, vincent.michel@imj-prg.fr