Le printemps ergodique

Laurent MAZLIAK[1]
Notes de cours

ENS, 6 et 13 décembre 2006

1. Introduction

Les cinq textes que nous nous proposons de commenter lors de ces deux cours représentent un témoignage de la naissance à la fin des années 1920 de la théorie des chaînes de Markov. Mais en fait, au delà de cette théorie spécifique, c'est aussi d'une nouveauté plus radicale dans le paysage mathématique du début du 20ème siècle qu'ils rendent compte, à savoir l'émergence de la probabilité comme discipline mathématique à part entière.
Pour comprendre ce qui se joue dans ces années là, il va être nécessaire de brosser un tableau rapide de ce qu'étaient les probabilités au début du dernier siècle, et, ensuite, de s'intéresser à quelques uns des protagonistes de l'histoire que nous voulons essayer de retracer.
En 1900 donc, les probabilités existent essentiellement dans le champ mathématique comme un corpus assez limité qui n'est en fait jamais coupé de certaines situations particulières auxquelles il prétend s'appliquer. Essentiellement, si l'on exclut la statistique mathématique qui commence à prendre de l'importance, notamment autour de Pearson en Grande-Bretagne, ces situations sont au nombre de deux : d'abord les problèmes autour des jeux de hasard, fondement historique des questions de quantification de l'aléatoire depuis Pascal et Fermat, et ensuite, depuis Laplace et Gauss, les questions autour des erreurs dans les mesures physiques ou, par exemple, les mesures liées au tir d'artillerie. Essentiellement, les mathématiciens qui s'occupent de ces questions sont des originaux plutôt isolés. La seule exception ayant le caractère d'une petite école se trouve à Saint-Petersbourg, où Tchebitcheff a fédére dans les années 1870 un groupe dynamique, dont les membres emblématiques sont ses deux élèves Markov et Lyapunov, qui réalise une jonction originale entre théorie et applications. Mais enfin, pour les mathématiciens importants du temps, tout cela n'est pas très sérieux et les problèmes fondamentaux sont ailleurs. Peut-être peut on ici citer Joseph Bertrand disant plus ou moins ironiquement dans les années 1880 que bien des problèmes de probabilités ressemblent au problème de l'âge du capitaine.
Nous verrons dans ces deux séances apparaître des noms qui comptent parmi les plus grands mathématiciens français du 20ème siècle (Poincaré, Hadamard, Borel...) qui tour à tour vont s'intéresser, de façon passagère ou prolongée, au calcul des probabilités. Que s'est-il donc passé dans cette période mouvementée qui va de 1900 à 1928 pour qu'une telle évolution ait lieu? C'est ce qu'il nous faut essayer de mettre au clair.
Essentiellement, on peut voir deux raisons à cet état de choses, l'une superficielle, l'autre profonde. Commençons par la première. Aussi étonnant que cela puisse paraître, après la Première Guerre Mondiale, beaucoup des gens dont nous allons parler se sont intéressés au calcul des probabilités au moment où ils ont dû les enseigner. C'est le cas par exemple de Fréchet, nouvellement arrivé à l'Université de Strasbourg récupérée par la France en 1918 et dont le gouvernement français décide de faire une vitrine. A Strasbourg vont se mettre en place d'originales initiatives d'enseignement, comme le cours commun fait par Fréchet et Halbwachs à l'Institut Commercial autour de la statistique appliquée aux sciences sociales qui témoigne de l'importance croissante en ces années accordée aux statistiques économiques. C'est aussi le cas de Lévy et Hadamard à l'Ecole Polytechnique, devant faire face à la demande instante de la direction de l'école pour remettre à jour les cours de probabilités, notamment ceux sur la théorie des erreurs dont la première

[1]Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires, et Institut de mathématiques, projet 'Histoire des Sciences Mathématiques', Université Paris VI, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France. mazliak@ccr.jussieu.fr

guerre mondiale a révélé l'importance cruciale dans les questions de ballistique. Aucun des trois mathématiciens cités, sur lesquels nous reviendrons longuement, ne semble avoir auparavant touché au calcul des probabilités. Jusqu'à ces années 1920, deux livres emblématiques s'étaient succédés dans l'enseignement supérieur français. D'abord, avait paru en 1888 le cours de Joseph Bertrand (numérisé sur Gallica). Ce traité célèbre est représentatif de la façon dont les probabilités étaient alors conçues : il se présente plus ou moins comme une succession assez décousue de recettes pour faire face à différentes situations. C'est dans ce livre que Bertrand introduit son fameux paradoxe sur le choix d'une corde d'un cercle plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit pour jeter un éclairage assez suspicieux sur le sens qu'on peut donner à ces calculs. Poincaré, qui succède à Bertrand à la chaire de la Sorbonne, va à son tour décider de rédiger un cours pour ses étudiants, dont la première édition paraît en 1896. Il est à noter que l'intitulé du cours est " Cours de Physique Mathématique" (la chaire de Poincaré à la Sorbonne est en effet la chaire créée sous la Monarchie de Juillet pour Poisson, intitulée "Chaire de Calcul des Probabilités et de Physique théorique" - chaire d'où découle en droite ligne le Laboratoire de Probabilités de Paris VI), titre qui nous amène à la raison profonde pour laquelle Poincaré, puis, surtout, Borel vont se tourner vers cette discipline peu estimée.
Dans la deuxième moitié du 19ème siècle, la physique connaît un renouveau spectaculaire, où il faut voir le noyau initial de la révolution probabiliste qui allait suivre. Et dans les théories physiques nouvelles, l'une d'elle va jouer un rôle de premier plan, dont il nous faut maintenant parler, la théorie cinétique des gaz.

2. Naissance de la théorie ergodique

Il n'est évidemment question ici que de donner quelques repères sur la mise en place de cette théorie. Nous nous contenterons de mentionner quelques étapes qui ont amené à la naissance d'un questionnement mathématique autour de l'ergodicité, d'où découle directement l'intérêt pour les processus markoviens dont nous racontons l'histoire.
En 1858, Clausius avait utilisé le principe de conservation de l'énergie qu'il avait postulé pour énoncer le résultat suivant : dans un gaz en équilibre, les molécules obéissent à une loi de répartition des vitesses déterminée, bien qu'inconnue, et cette loi est telle que les vitesses algébriques ont une dispersion relativement faible. Deux ans plus tard, en 1860, Maxwell énonce la forme nécessaire de la loi de répartition des vitesses, la loi de Maxwell-Boltzmann, sous la forme d'une loi normale : si N est le nombre total de particules, le nombre de particules dont la vitesse est comprise entre x et $x + dx$ est donné par $N.\frac{1}{a\sqrt{\pi}}e^{-x^2/a^2}dx$. Pour trouver cette forme, Maxwell fait des hypothèses assez drastiques d'indépendance des vitesses axiales qui lui permettent d'obtenir une équation fonctionnelle satisfaite par la fonction de proportion (en termes modernes, la densité de probabilités).
Naturellement, il reste encore à justifier l'existence de cet état d'équilibre, c'est à dire de cette loi stationnaire qui aura nécessairement la forme précédente. C'est ici qu'intervient l'hypothèse ergodique formulée par Boltzmann en 1868. Etymologiquement, le mot est composé de $\epsilon\rho\gamma o\nu$ (travail, énergie) et $o\delta o\varsigma$ (route), dévoilant l'idée intuitive que Boltzmann avait en tête : les particules occupent toutes les positions de la surface d'énergie constante de l'espace des phases. L'hypothèse ergodique postule l'existence de la moyenne temporelle le long des trajectoires des particules dans l'espace des phases, et que cette moyenne définit la probabilité d'occupation

$$P(A) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_A(T_s x)dt$$

pour tout A, et pour tout état initial x (où $(T_s x)_{s\geq 0}$ représente la trajectoire de la molécule dans l'espace des phases).
Boltzmann est connu pour être difficilement lisible, et l'hypothèse ergodique va être l'objet de débats passionnés à la fin du 19ème siècle. On peut dire que la mécanique statistique n'en

tirait pas une réputation très positive. Il fallut en fait attendre les travaux d'Einstein sur le mouvement brownien dans les première années du 20ème siècle, où celui-ci faisait usage des méthodes de Boltzmann, pour que l'attention du monde scientifique soit définitivement attirée. L'article écrit par Paul et Tanya Ehrenfest en 1911 pour la version allemande de l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques joua un rôle important dans cette diffusion des principes de la mécanique statistique, article qui sera traduit et complété par Borel en 1914 pour la version française. Le but que s'étaient fixés les auteurs étaient de clarifier autant que possible les obscurités de Boltzmann. Pour ce qui est de l'hypothèse ergodique, mauvaise interprétation ou volonté radicale de simplification, les Ehrenfest ont transformé l'idée originale de Boltzmann en énonçant un principe beaucoup plus exigeant : pour tout x, la trajectoire $(T_t x)_{t\geq 0}$ est la même (à un décalage initial près) et passe par tous les points de l'espace des phases. Naturellement, dans ce cas, $\lim \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_A(T_s x)ds$ si elle existe est clairement indépendante de x et donc on peut écrire $\lim \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_A(T_s x)ds$ indépendante de x et donc :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_A(T_s x)ds = \int_S dxp(x) \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_A(T_s x)ds$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_S dxp(x)\int_0^t \mathbb{1}_A(T_s x)ds = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t ds\int_S dxp(x)\mathbb{1}_A(T_s x)$$

et $\int_S dxp(x)\mathbb{1}_A(T_s x) = P(A)$ puisque $p(x)dx$ étant stationnaire, c'est aussi la loi de répartition à chaque instant s. De ce fait,

$$\lim \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_A(T_s x)ds = P(A)$$

et donc sous l'hypothèse ergodique "forte" des Ehrenfest, la probabilité stationnaire est nécessairement la limite des moyennes temporelles. C'est sous cette forme qu'un des acteurs dont nous parlerons plus loin, Bohuslav Hostinsky, va prendre connaissance du problème ergodique.
Il nous faut maintenant revenir en arrière de quelques années, et parler du premier mathématicien à avoir mis le doigt dans l'engrenage.

3. POINCARÉ

Henri Poincaré (1855-1912)

Poincaré, avant Einstein, s'était en effet lui aussi penché sur cette nouvelle physique. Il l'avait fait avec beaucoup de suspicion, tant il avait renâclé à admettre que les sains principes de la physique

déterministe héritée du 18ème siècle puissent être remis en cause. Il assista néanmoins impuissant à l'irruption de l'aléatoire à la fin du 19ème siècle et décida de s'en saisir puisqu'il ne pouvait pas faire autrement. Mais du moins, il se fixa un objectif : rendre ces théories acceptables du point de vue du mathématicien, et notamment arriver à une conception statisfaisante du hasard. De cette obsession de Poincaré de rendre propres les mathématiques du hasard et leur utilisation dans la physique nouvelle, on peut sans conteste dire qu'elle va conditionner toutes les probabilités françaises (et plus ou moins mondiales) pendant une grande partie du 20ème siècle et que d'elle vont sortir deux branches capitales de la théorie : les études sur le mouvement brownien et tout ce qui tourne autour de la théorie ergodique, théories markoviennes en tête.
Au moment où il rédige son cours de la Sorbonne, Poincaré cherche donc à se faire une conception du hasard qui lui semble convaincante. De nombreux articles, dans des revues scientifiques ou philosophiques écrits dans cette période (et republiés depuis dans différents ouvrages) témoignent de cette recherche acharnée.
Pour Poincaré, il y a deux sources possibles de hasard.
Il y a d'abord l'évolution de systèmes dynamiques où de petites différences dans les causes suffisent à amener de grandes différences dans les effets. L'ignorance où nous sommes des conditions initiales peut alors sembler rendre vaine toute description de l'évolution du système. Or, Poincaré montre qu'il est possible dans certains cas de surmonter cette difficulté. L'exemple, célèbre, qu'il prend concerne la répartition des petites planètes sur le zodiaque, qu'il traite en introduisant sa *méthode de la fonction arbitraire*, pour montrer qu'il y a nécessairement évolution vers la loi uniforme, *quelle qu'ait pu être la répartition initiale*. Asymptotiquement, l'arbitraire du hasard initial a donc tendance à disparaître. Présentons rapidement la méthode de Poincaré. $\varphi(a,b)dadb$ désigne la probabilité pour que le moyen mouvement d'une petite planète soit compris entre a et $a+da$, et que sa longitude initiale soit comprise entre b et $b+db$. En moyenne, la valeur de $\sin(at+b)$ est

$$\int \varphi(a,b)\sin(at+b)dadb$$

et si φ est continue, cette intégrale tend vers 0 quand t tend vers l'infini.
Pour t grand, $\int \varphi(a,b)\sin(at+b)dadb$ est très proche de 0, et donc a fortiori $\int \varphi(a,b)\sin n(at+b)dadb$ aussi pour $n \geq 1$. De ce fait, si $\psi(\alpha)$ désigne la répartition de probabilité de l'angle $at+b$ sur le zodiaque, on a pour tout $n \geq 1$, $\int_{[0,2\pi]} \psi(u)\sin nudu$ proche de 0 et de même $\int_{[0,2\pi]} \psi(u)\cos nudu$. On en déduit donc que ψ est constante. La loi uniforme apparaît donc asymptotiquement comme une "loi naturelle" et non seulement comme la marque de notre ignorance à laquelle la cantonnait le déterminisme laplacien.
L'autre source de hasard pour Poincaré provient de la complexité des causes. L'exemple fondamental pour lui est la théorie cinétique des gaz. Le nombre de molécules est si grand, et elles entrent en collision de façon si multiple qu'il est impossible de considérer le système qu'elles forment comme relevant de la mécanique déterministe classique. En 1902 avait paru le premier traité exposant les principes de la mécanique statistique, dû à Gibbs, qui développe deux grands exemples d'applications pour la nouvelle théorie : outre la théorie cinétique des gaz, il introduit une célèbre situation de mélange de liquides (*une goutte d'encre lâchée dans un verre d'eau*) pour illustrer l'évolution vers une loi d'équilibre. Hadamard avait fait en 1906 un compte-rendu du livre de Gibbs pour le Bulletin des sciences mathématiques, dans lequel il invente la métaphore ingénieuse du battage d'un jeu de cartes par un joueur qui évolue vers une équirépartition des permutations possibles des cartes pour illustrer cette situation de mélange en équilibre. Mais Hadamard ne propose aucun traitement mathématique de la question. C'est Poincaré, dans l'article *Le Hasard* qu'il publie en 1907 dans le journal *La revue du mois* fondé par Borel et sa femme (et repris en Introduction de la deuxième édition de son cours de calcul des probabilités en 1912 [disponible sur Gallica]), qui va le premier en faire une analyse en se limitant à un cas particulièrement simple, celui de deux cartes. Supposons, dit Poincaré, qu'on ait une probabilité p

pour qu'après un battement les cartes se retrouvent dans le même ordre qu'avant ce battement et $q = 1 - p$ pour que leur ordre soit changé. Considérons qu'il y ait n battements et que le joueur gagne $S = 1$ franc si l'ordre après ces n battements est inchangé, et -1 franc sinon. Un calcul direct d'espérance (c'était une des méthodes que Poincaré a trouvées chez Bertrand, de ne pas toujours devoir déterminer la loi pour déterminer l'espérance) montre que $E(S) = (p - q)^n$ puisque S s'écrit (en termes modernes, mais c'est ce que dit Poincaré) comme $\prod_{i=1}^n X_i$ avec les $X_i = \pm 1$ indépendantes de loi (p, q). De ce fait, sauf si $p = 0$ ou 1, $E(S) \to 0$ quand n tend vers l'infini ce qui revient à dire que les deux états +1 et -1 , et donc les deux ordres possibles ont tendance à devenir équiprobables. On a là la première version explicitée du principe ergodique. Comme le dit Poincaré, cela reste vrai quel que soit le nombre de cartes *mais la démonstration serait compliquée*. C'est cette situation générale de battage de cartes que Poincaré inclut à l'occasion de la deuxième édition de son cours en 1912, dans un nouveau chapitre intitulé *Questions diverses*, et qui constitue notre premier document (**Cours de Poincaré, Chapitre 16 "Questions diverses"**).

4. Borel et Hadamard

Nous avons déjà mentionné plusieurs fois Borel. Il faudrait en fait parler longuement de celui qui est sans aucun doute le mathématicien dont les concepts révolutionnaires sur la mesure des ensembles ont engendré la théorie moderne des probabilités. Chez Poincaré, il y avait eu quelques idées dans cette direction, comme celle mentionnant les conditions initiales exceptionnelles (en termes boréliens, quelques années plus tard, de mesure nulle) sous lesquelles les trajectoires dans le problème des trois corps ne sont pas périodiques (au sens qu'elles ne repassent pas une infinité de fois dans la même zone).

Emile Borel (1871-1965)

Mais c'est à Borel qu'on doit la première formulation d'une théorie de la mesure, dont il conçoit dès 1905 qu'elle devrait naturellement s'appliquer à des questions probabilistes. En 1906, Borel publie un article retentissant sur la cinétique des gaz : dans la lignée de l'attitude de Poincaré, il explique que son but est de fournir aux théories de Maxwell-Boltzmann un cadre mathématique satisfaisant pour convaincre de leur bien-fondé des esprits chez qui elles *excitent beaucoup de défiance*. Cet article sur la cinétique des gaz sera repris intégralement en annexe d'un livre fascinant que Borel écrit en 1914 à la veille de la Première Guerre Mondiale, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, où il fait le point sur ces questions : ce livre sera la source à laquelle Hostinskỳ, dont nous parlerons plus tard, viendra puiser son intérêt pour les probabilités.

Pour rester sur notre sujet, contentons nous de remarquer que Borel, en 1912, reprend dans une note aux CRAS, le problème du battage des cartes que Poincaré (qui vient de mourir) a eu le temps de publier dans son cours, et en propose une solution beaucoup plus simple à l'aide de la remarque élémentaire suivante, qui deviendra par la suite la méthode fondamentale dans le traitement des phénomènes markoviens : l'espérance à la $n+1$-ième étape s'obtient comme moyenne de celle à la n-ième étape. Si on reprend l'exemple de deux cartes, appelant p_n la probabilité pour qu'après n battements l'ordre soit conservé, et q_n qu'il soit inversé, on a

$$p_{n+1} = p.p_n + q.q_n, q_{n+1} = p.q_n + q.p_n$$

d'où résulte $p_{n+1} - q_{n+1} = (p-q)(p_n - q_n)$. Personne ne semble avoir fait attention à cette note de Borel.
En particulier Hadamard. La présence de ce nom dans l'histoire dont nous parlons est plutôt surprenante, et en fait, Hadamard ne va s'intéresser aux probabilités que le temps d'un *printemps ergodique* soit en gros l'année scolaire 1927-1928.


Jacques Hadamard (1865-1963)

Il n'en a jamais fait avant (et a même marqué une certaine irritation envers Lévy, un de ses disciples sur lequel il fondait le plus d'espérances, quand celui-ci, dilapidant l'héritage, avait abandonné la voie royale de l'analyse fonctionnelle pour le calcul des probabilités), et n'en fera jamais après. Hadamard est un héritier des grandes traditions de l'analyse française mise en place par Laplace et Cauchy: les problèmes dignes de l'attention du mathématicien tournent autour des questions centrales des équations différentielles (notamment aux dérivées partielles) et de l'analyse complexe. C'est d'ailleurs en utilisant ces techniques qu'Hadamard s'est brusquement hissé au firmament des mathématiques en démontrant en 1896 le théorème des nombres premiers (prouvé indépendamment la même année également par le mathématicien belge la Vallée-Poussin). Mais à l'instar de Poincaré, Hadamard n'a jamais perdu de vue les théories physiques de son temps à la source desquels il compte puiser de nouveaux problèmes mathématiques : c'est dans cette optique qu'il fait comme nous l'avons vu le compte-rendu du livre de Gibbs en 1906. Quand dans les années 1920 il entreprend la rédaction de son cours d'analyse de l'X (publié chez Hermann en deux volumes en 1926 et 1930), il en arrive en 1927 aux leçons sur la théorie des probabilités et reprend le battage des cartes de Poincaré. A cette occasion, il retrouve la méthode des moyennes successives de Borel et publie en 1927 une note aux CRAS qui constitue notre document suivant (**Hadamard: Sur le battage des cartes,** *CRAS Paris*, **185, 5-9, 1927**).

5. HOSTINSKÝ

Autre surprise de notre histoire, l'apparition d'un outsider, dont la présence peut étonner au milieu de la liste des noms que nous avons cités : Poincaré, Hadamard, Borel, bientôt Lévy et Fréchet, tout un *who's who* de l'analyse du début du 20ème siècle en France. Il arrive qu'on ait besoin d'un plus petit que soi…

Bohuslav Hostinsky (1884-1951)

Bohuslav Hostinsky, né à Prague en 1884, fils d'un très célèbre musicologue appartenant à la fine-fleur de l'intelligenstia tchèque qui luttait autour de Masaryk pour accéder à l'indépendance, eut ainsi dans sa vie une chance et une malchance : être tchèque et être tchèque! Ce fut sa chance, car il put après la Première Guerre Mondiale obtenir rapidement une importante situation académique (la chaire de Physique mathématique) à la nouvelle université Masaryk de Brno créée à l'occasion de la création de la Tchécoslovaquie en 1919, puis surfer sur la vague tchécophile pour consolider rapidement sa position sur la scène internationale comme représentant officiel des mathématiques tchèques. Sa malchance, car la dynamique petite école qu'il réussira à fédérer à Brno dans les années 1930 autour de l'étude des chaînes de Markov ne résistera ni à la concurrence de Moscou, nouvel épicentre incontesté de la recherche en probabilités à partir de la fin des années 1920, ni surtout aux coups de boutoir de l'histoire politique. Avec l'invasion de la Tchécoslovaquie en 1939 à la suite des accords de Munich et tout se qui s'ensuivit, Hostinský assistera au spectacle désolant de l'anéantissement de ce qu'il avait construit depuis plus de vingt ans, et rentrera dans l'oubli. Il est aussi juste de mentionner que c'est un autre mathématicien de Brno qui sera le représentant le plus prestigieux des mathématiques tchèques de cette époque, Edvard Cech, un des maîtres de la topologie du 20ème siècle.
Dans sa formation, Hostinsky avait été autant physicien que mathématicien, et c'est l'année post doctorale qu'il avait pu passer à Paris en 1907 qui avait décidé de son orientation plus mathématique. Il s'était spécialisé dans des problèmes de géométrie différentielle et d'analyse fonctionnelle hérités de questions posées par la physique. C'est dans cette optique qu'il avait été particulièrement intéressé par les travaux de Volterra et Hadamard sur les fonctions de ligne dont l'utilisation était prometteuse pour traiter certains problèmes d'évolution, comme les questions faisant intervenir la présence de mémoire. Il fut aussi un lecteur passionné de Poincaré, mais

aussi du livre de Borel de 1914 qui arriva jusqu'à lui avant le déclenchement des hostilités en 1914.

Nous avons la chance de posséder un fonds d'archive impressionnant d'Hostinsky, et notamment de disposer de ses carnets mathématiques où il notait jour après jour des idées et des réflexions. Brusquement, au cours de l'année 1917 apparaissent des questions de probabilités autour du battage des cartes et de la méthode des fonctions arbitraires. Cette même année Hostinsky publie dans les comptes-rendus de l'académie des sciences de Prague son premier travail probabiliste consacré à l'application de la méthode des fonctions arbitraires à la résolution du problème de l'aiguille de Buffon. En 1920, quelques mois avant le Congrès International de Strasbourg, il réalise un joli coup publicitaire en envoyant la traduction de cet article à Picard pour lui proposer de la publier dans le Bulletin des sciences mathématiques : la vague tchecophile bat son plein en France où le parallèle entre l'Alsace-Lorraine et les terres tchèques arrachées à l'hydre allemande est complaisamment mis en avant et Picard, qui voue désormais une haine inextinguible à tout ce qui est allemand, y adhère de tout cœur, et accède volontiers au souhait d'Hostinsky.

Entre temps, autre étape capitale dans la carrière du savant tchèque, Hostinsky a commencé une correspondance assidue avec Fréchet, passionnante correspondance de plus de 200 lettres qui va durer 32 ans jusqu'à la mort d'Hostinsky en 1951 et dont nous possédons aujourd'hui l'essentiel.

C'est dans cet esprit de curiosité qu'Hostinsky va découvrir la note d'Hadamard en 1927, et en envoyer à Hadamard un prolongement sous forme de note aux CRAS qu'il lui demande de publier, ce qu'Hadamard fait dans les premiers jours de 1928. Cette note est notre document suivant (**Hostinsky: Sur les probabilités relatives aux transformations répétées,** *CRAS Paris*, **186, 59-61, 1928**).

La curiosité d'Hadamard semble avoir été piquée au vif puisque dans les neuf mois qui vont suivre les notes d'Hadamard et d'Hostinsky aux CRAS vont s'alterner pour corriger, étendre et améliorer les résultats précédents. On a aussi gardé les lettres d'Hadamard à Hostinsky : une vingtaine dont quinze pour la période en question, dont une où Hadamard attire l'attention d'Hostinsky sur l'hypothèse de réversibilité dont il n'avait pas tenu compte et dont nous venons de parler. Il est aussi remarquable qu'Hadamard se soit précipité à Brno quelques semaines après pour parler de sa nouvelle marotte avec Hostinsky.

Ici se situe l'amusant épisode qui nous amène aux deux derniers textes de notre sélection. Lévy semble avoir découvert avec stupéfaction qu'Hadamard s'est intéressé à ces questions... qu'il a lui même traitées trois ans auparavant dans son cours de Calcul des probabilités publié en 1925 chez Gauthier-Villars que personne n'a lu.


Paul Lévy (1886-1971)

Lévy est un mathématicien étonnant, dont von Neumann dira vingt ans plus tard : *quand on lit Lévy, on se rend compte qu'il ne pense pas les mathématiques comme les autres.* Lévy, qui a écrit à la fin de sa vie en 1970 une intéressante autobiographie s'explique sur cette question, et insiste notamment sur le fait qu'il a toujours eu énormément de mal à lire les travaux des autres. Beaucoup de gens posent quelque peu en disant ce genre de chose, mais pour Lévy ce fait semble bien avéré, tant vont se répéter au cours de sa carrière les occasions où il va assister à des redécouvertes de résultats qu'il avait publiés des années auparavant et que personne n'avait lus, notamment à cause de la réputation d'original dont on l'avait affublé. Itô a dit il y a une vingtaine d'années que son propre travail avait essentiellement consisté à comprendre et traduire les œuvres de Lévy. Autre souce d'information sur Lévy, nous avons la chance d'avoir encore une autre grande correspondance qui contient les lettres qu'il a envoyées à Fréchet (celles dans l'autre sens semblent malheureusement perdues) entre 1918 et 1965. Lévy est entré en relation avec Fréchet en 1918 sur les conseils d'Hadamard pour discuter avec lui de l'intégration abstraite que Fréchet a introduite en 1915 et que Lévy pense pouvoir appliquer dans ses recherches sur le potentiel en dimension infinie. Dans cette correspondance, aujourd'hui publiée, Lévy revient souvent sur ces questions de priorité et de conception qu'il a de son travail mathématique. C'est d'elle que sont extraites les deux lettres qui constituent nos derniers documents. (**Lettres 18 et 19 de Lévy à Fréchet** *in* **50 ans de correspondance mathématique, Hermann, 2004**)

6. BOLOGNE

Tout ce petit monde va se retrouver au Congrès international de Bologne dont le grand ordonnateur Salvatore Picherle a réussi à placer sous l'aile protectrice du *génie* qui gouverne l'Italie depuis 1922, Son Excellence Benito Mussolini. Hadamard, qui en est une des stars, y présente une conférence plénière consacrée justement au battage des cartes.

Nous sommes donc en septembre1928, an VI de l'Ere Fasciste. Ce congrès est mythique car il est le premier et le dernier des congrès de l'entre-deux-guerres qui puisse prétendre à une certaine universalité géographique. Les Allemands sont de retour : Pincherle s'est battu comme un diable pour faire accepter cela à certains représentants des anciens Alliés qui avaient mis la science allemande au ban des nations. Et d'ailleurs, certains ne l'acceptent guère: Picard, notamment, reste en boudant à Paris pour montrer son refus catégorique de toute concession envers les barbares. Les soviétiques eux, sont encore là, avant que les frontières ne se ferment à

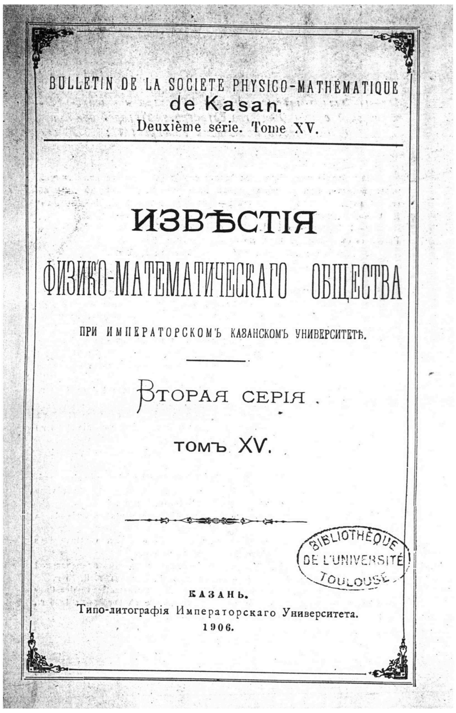
partir du début des années 1930 au moment de la montée en puissance du pouvoir stalinien. Ils ne seront véritablement de retour à cette échelle qu'à la fin des années 1950.
A Bologne a eu lieu une rencontre inattendue. Nous avons depuis le début de ces séances prononcé plusieurs fois le nom de Markov, et à partir de 1929, sous un vocable proposé par Hostinsky et Romanovsky, les événements en chaîne étudiés par Poincaré, Borel, Hadamard . . . vont prendre leur nom définitif de chaîne de Markov. Il est fort possible que ce soit à Bologne qu'a été décidé plus ou moins officiellement cette appelation.
Car, les chaînes avaient un autre passé , fort différent de celui que nous avons raconté jusqus là qui n'était plus connu que des mathématiciens soviétiques, Bernstein en tête . En 1906 (c'est donc encore un autre centenaire que nous fêtons ces jours-ci en plus de celui de l'article de Borel!), Markov publie dans le Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kazan un article (en russe) intitulé *extension de la loi des grands nombres à des quantités dépendant l'une de l'autre* (numérisé et mis en ligne dans le numéro 2/1b du Journal Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique à l'adresse www.jehps.net) . Andrei Andreevitch Markov, en plus d'être un grand mathématicien, est un personnage haut en couleurs dont il nous faut dire quelques mots.

Andrei Andreevitch Markov (1856-1922)

Né en 1856, il se fit tôt remarquer pour son caractère fortement trempé, entier et incapable de compromis. Entré en 1874 à l'Université de Saint-Petersbourg, il y suivit les cours de Chebyshev (1821-1894), dont l'influence fut décisive. Ce dernier était en effet un des rares grands mathématiciens à s'occuper de probabilités au milieu du XIXème siècle. Il s'intéressa spécialement à la loi des Grands Nombres énoncée par Bernoulli, précisée par de Moivre, Laplace et Gauss mais dont la démonstration dans un cadre assez général laissait à désirer. Chebyshev obtint cette démonstration à l'aide d'une très fameuse inégalité qui porte son nom et celui d'un mathématicien français, Bienaymé, qui l'avait également prouvée. Le soutien très fort de Chebyshev (qui réussit à le faire rentrer à l'Académie des Sciences à l'âge record de 30 ans), évita probablement à Markov une montagne d'ennuis liée à ses prises de position virulentes envers le régime russe. On le surnomma *Andrei neistovy* c'est à dire André l'enragé tant il tint à faire du bruit autour de celles-ci. Il protesta contre des nominations académiques faites par le tsar, contre la politique de l'Académie qu'il accusait d'être aux ordres du gouvernement, contre des mesures discriminatoires visant des juifs. En 1910, quand le Saint-Synode de l'Eglise Orthodoxe Russe excommunia Tolstoïen raison des théories dualistes défendues par ce dernier, Markov fit des pieds et des mains pour subir le même sort. . . et y parvint ! A cette époque très mouvementée de l'histoire

de la Russie, l'intelligentsia était partagée en deux factions rivales irréconciliables, slavophiles et occidentalistes. La première, souvent nationaliste et cléricale, était davantage représentée à l'Université de Moscou, la seconde, libérale et anti-cléricale, à celle de Saint-Petersbourg. Il faut d'ailleurs mentionner ici que les séquelles de cette rivalité eurent de lointaine échos dramatiques dans les années 1930 quand Staline décida la liquidation de l'ancien esprit de l'école mathématique de Moscou en s'attaquant aux deux mathématiciens qui la dominaient au moment de la révolution bolchevique, Egorov et son élève Luzin. Si ce dernier réussit de justesse à se tirer à peu près d'affaire de l'épouvantable campagne de presse qui s'abattit sur lui en 1936, grâce notamment à son immense notoriété dans la communauté scientifique internationale dont l'appui fut décisif, le premier fut traité en pestiféré et mourut de misère en résidence forcée en 1931.
Mais revenons à Markov. C'est en effet sur un arrière plan d'hostilité religieuse que va se développer une polémique entre lui et un mathématicien moscovite, aujourd'hui passablement oublié, Pavel Alekseevitch Nekrasov (1854-1924). Nekrasov, qui s'occupait comme Markov des théorèmes limites de la théorie des probabilités, affirmait volontiers ses positions monarchistes et religieuses et multipliait les interprétations 'philosophiques' de ses études. Au milieu du XIXème siècle, le mathématicien Quételet avait soutenu que l'existence de comportements moyens qu'on constate dans les phénomènes sociaux était due à l'action régulatrice de la société. Dans un livre publié en 1902, Nekrasov s'inscrit en faux. S'appuyant sur le fait que l'indépendance des variables est nécessaire pour que la Loi des Grands Nombres soit applicable, et donc qu'apparaisse une moyennisation des comportements, il y trouvait au contraire une confirmation de l'indépendance des comportements mutuels des hommes et donc une preuve de l'existence du libre-arbitre. Il n'est pas sans intérêt de comparer ce genre de réflexion avec ce que Borel écrivait quasiment simultanément dans un article de la *Revue du mois*)[2] : *L'étude de ces faits ne peut que contribuer à développer la notion de la solidarité, à rappeler à chacun qu'il ne doit pas se considérer comme indépendant du milieu où il vit et qu'il doit participer à la réparation des dommages fortuits qui atteignent son voisin et auraient pu l'atteindre lui-même. Aussi l'étude du calcul des probabilités a-t-elle une très grande valeur éducative ; on devrait souhaiter qu'elle pût être mise à la portée de tous ceux qui prétendent à une part dans la direction des hommes et des choses. Ainsi serait fort heureusement combattu un certain individualisme qui n'est autre chose qu'un égoïsme inintelligent. Mais le calcul des probabilités ne menace nullement le véritable individualisme, c'est-à-dire la conscience nette de l'indépendance de pensée et d'action d'une personnalité qui se sent libre*. On a quelque peu perdu aujourd'hui la trace de l'agitation des esprits de ce temps autour des justifications de la quantification du hasard dans la vie ordinaire.
En tout cas, un personnage aussi survolté et hostile à la religion que l'était Markov, qui menait régulièrement campagne contre les réactionnaires mystico-monarchistes de Moscou, Nekrasov en tête, ne pouvait pas rester sans réagir et il semble bien s'être mis à cette occasion à la recherche frénétique d'un exemple de variables non indépendantes satisfaisant la Loi des Grands Nombres pour contredire Nekrasov. C'est ainsi qu'en 1906, dans le Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kazan, paraît son article (en russe) *Extension de la loi des grands nombres à des grandeurs dépendant les unes des autres* .
Même si Nekrasov n'est jamais cité explicitement ni comme référence mathématique (seul Chebyshev est mentionné) ni du point de vue de l'interprétation philosophique, il est à peu près transparent que la phrase conclusive de l'article (*Ainsi l'indépendance des quantités ne constitue pas une condition nécessaire pour l'existence de la loi des grands nombres*) lui est jetée comme un défi.

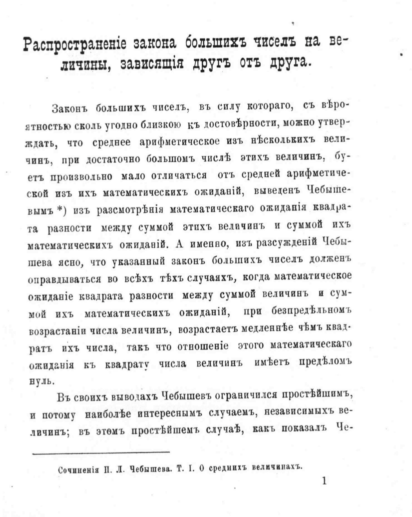
[2]*Le calcul des probabilités et la mentalité individuelle* (décembre 1908).


BULLETIN DE LA SOCIETE PHYSICO-MATHEMATIQUE
de Kasan.
Deuxième série. Tome XV.

ИЗВѢСТІЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА
ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.
ТОМЪ XV.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1906.


Распространеніе закона большихъ чиселъ на величины, зависящія другъ отъ друга.

Законъ большихъ чиселъ, въ силу котораго, съ вѣроятностью сколь угодно близкою къ достовѣрности, можно утверждать, что среднее арифметическое изъ нѣсколькихъ величинъ, при достаточно большомъ числѣ этихъ величинъ, будетъ произвольно мало отличаться отъ средней арифметической изъ ихъ математическихъ ожиданій, выведенъ Чебышевымъ *) изъ разсмотрѣнія математическаго ожиданія квадрата разности между суммой этихъ величинъ и суммой ихъ математическихъ ожиданій. А именно, изъ разсужденій Чебышева ясно, что указанный законъ большихъ чиселъ долженъ оправдываться во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда математическое ожиданіе квадрата разности между суммой величинъ и суммой ихъ математическихъ ожиданій, при безпредѣльномъ возрастаніи числа величинъ, возрастаетъ медленнѣе чѣмъ квадратъ ихъ числа, такъ что отношеніе этого математическаго ожиданія къ квадрату числа величинъ имѣетъ предѣломъ нуль.

Въ своихъ выводахъ Чебышевъ ограничился простѣйшимъ, и потому наиболѣе интереснымъ случаемъ, независимыхъ величинъ; въ этомъ простѣйшемъ случаѣ, какъ показалъ Че-

Сочиненія П. Л. Чебышева. Т. I. О среднихъ величинахъ.

1

L'article de Markov est rédigé dans un cadre entièrement abstrait, assez proche d'une rédaction contemporaine, et se centre sur les propriétés formelles que vérifient les variables aléatoires. Il contient plusieurs exemples (ou contre exemples) à l'assertion de Nekrasov. C'est dans le deuxième de ces contre-exemples que Markov formule explicitement comme condition suffisante de validité de la convergence vers l'espérance sur une suite de variables aléatoires prenant deux états, le fait que la dépendance entre un instant et son passé ne se fasse qu'à travers l'instant immédiatement précédent, premier énoncé de ce qui s'appelle depuis les années 1940 la *propriété de Markov*.
A Bologne, mais de façon beaucoup plus discrète, va refaire surface encore un autre passé des phénomènes markoviens, conservé lui dans les cartons d'une catégorie très originale de mathématiciens dont l'importance dans l'entre-deux-guerre allait en augmentant, les actuaires. En 1900, **Louis Bachelier** avait soutenu à la Sorbonne une thèse très originale, intitulée *Théorie de la spéculation*, qui présente pour la première fois une modélisation d'un phénomène aléatoire (en l'occurrence les cours de la bourse) par un processus en temps continu correspondant au mouvement brownien mathématique, qui sera introduit quelques vingt années plus tard par Norbert Wiener. Bachelier pose aussi des jalons pour l'étude de processus de type markovien en temps continu, et en 1931, c'est à lui que Kolmogorov se réfèrera dans son grand article sur les méthodes analytiques en théorie des processus de Markov. Le malheur de Bachelier fut d'être trop original (originalité soulignée positivement d'ailleurs par Poincaré auteur du rapport de thèse, qui, contrairement à ce qu'on a souvent prétendu depuis, est laudatif), et surtout de ne sortir de "nulle part". N'étant ni normalien, ni polytechnicien - autant dire rien du tout - il se heurta à une indifférence un peu méprisante, notamment de la part de Lévy qui ne voulut jamais l'écouter, avant de se rattrapper *in extremis* à la fin de la Deuxième Guerre Mondiale pendant laquelle il avait enfin pris connaissance des travaux de Bachelier , un an avant la mort de celui-ci (1946), dans un acte de repentance assez impressionnant où il demande de lui pardonner l'injustice de son premier jugement.
A partir de 1929, la confluence de ces différentes influences va en tout cas créer une dynamique d'où sortiraient par la suite les études des processus de Markov qui occupent une bonne partie des recherches probabilistes entre 1930 et 1980. Il est temps de s'arrêter sur cette ouverture.

REFERENCES

[1] A.Barberousse : La mécanique statistique. De Clausius à Gibbs, Belin, 2002
[2] P.Billingsley : Probability and Measure (3rd Ed) Wiley and sons, 1995
[3] B.Bru : Souvenirs de Bologne, Journal de la Société Française de Statistique, 144, 1-2, 2003, 135-226
[4] V.Havlova, L.Mazliak et P.Šišma: Le début des relations mathématiques franco-tchécoslovaques vu à travers la correspondance Hostinský-Fréchet, *Electronic Journal for History of Probability and Statistics*, Vol.1, 1, 2005
[5] C.Heyde and E.Seneta (dir.): *Statisticians of the Centuries*, Springer, New-York, 1991
[6] А.А.Марков: Распространение закона больших чисел на величины зависящия друг от друга (A.A.Markov: Extension de la loi des grands nombres à des quantités qui dépendent l'une de l'autre), Bulletin de la Société Mathématique de Kazan, Série 2, Tome XV, 1906
[7] H.Poincaré : l'Analyse et la Recherche (collection d'articles introduite par G.Ramunni), Hermann, 1991
[8] E.Seneta: *Non-negative Matrices and Markov Chains*, 2nd Edition, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New-York, 1981
[9] E.Seneta : Statistical Regularity and Free Will: Quetelet and Nekrasov, *Int.Stat.Review*, 71, 319-334, 2003
[10] J.von Plato: *Creating modern probability*, Cambridge Studies, 1994