Master de Mathématiques – Sorbonne Université (M1)

UE 4M039 : Histoire des mathématiques

(Alexandre Guilbaud et Laurent Mazliak)

Semaine 3

Descartes, Fermat et la mise en fonction de la géométrie

I. Quelques problèmes non constructibles à la règle et au compas

- La trisection de l'angle

$$4X^3 - 3X - \cos\alpha = 0$$

$$X = \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$$

La conchoïde de droite, attribuée à Nicomède (III^{e} siècle av. JC)

- La duplication du cube

$$x^3 = 2a^3$$

Menechme, disciple d'Eudoxe de Cnide (IV^{e} siècle av. JC), deux solutions par intersection de coniques

La trissectrice d'Hippias d'Elis (V^{e} siècle av. JC)

Le mésolabe d'Eratosthène (III^{e} siècle av. JC)

- Le problème d'Archimède (partage d'une sphère par un plan en deux parties dont le rapport des volumes est donné)

$$x^3 + r = px^2$$

Commentaire par Eutocius de la solution d'Archimède par intersection de coniques (V^{e} siècle)

I. L'algèbre d'Al-Khayyam (~ 1070)

« Il se rencontre dans cette science des problèmes dépendant de certaines espèces très difficiles de théorèmes préliminaires, dans la solution desquels ont échoué la plupart de ceux qui s'en sont occupé. Quant aux Anciens, il ne nous est pas parvenu d'eux d'ouvrage qui en traite ; peut-être, après avoir cherché les solutions et après les avoir étudiées, n'en auraient-ils pas pénétré les difficultés. On peut-être leurs recherches n'en exigeaient pas l'examen ; ou enfin leurs ouvrages à ce sujet, s'il y en a, n'ont pas été traduits dans notre langue. Quant aux modernes, c'est al-Mahani qui, parmi eux, conçut l'idée de résoudre algébriquement le théorème auxiliaire employé par Archimède dans la quatrième proposition du second libre de son traité de la sphère et du cylindre ; or, il fut conduit à une équation renfermant des cubes, des carrés et des nombres qu'il ne réussit pas à résoudre après en avoir fait l'objet d'une longue méditation. On déclara donc que cette solution était impossible, jusqu'à ce qu'apparut Ja'far al-Khazin qui résolut l'équation à l'aide de sections coniques [...] ».

I. L'algèbre d'Al-Khayyam

- L'essence de l'algèbre selon Al-Khayyam : « L'art de l'algèbre et de l'al-muqabala est un art scientifique dont l'objet est le nombre entier et les grandeurs mesurables en tant qu'inconnus mais rapporté à une chose connue par laquelle on peut les déterminer [...]. Les solutions en algèbre s'effectuent par l'équation, je veux dire en égalant ces degrés les uns aux autres »
- Le principe d'homogénéité : « toutes les fois que nous disons : un nombre est égal à une surface, nous entendons par le nombre un quadrilatère à angles droits, dont l'un des deux côtés est un et l'autre une droite égale en mesure au nombre donné ».
- Classification des équations de degré ≤ 3 : 25 types d'équations engendrées par combinaison de quatre termes : le nombre, l'inconnue, son carré et son cube.
  - Équations résolues (sauf [3]) à l'aide du cercle :

Équations binômes

[1]	$bx = c$
[2]	$ax^2 = c$
[3]	$x^3 = c$
[4]	$ax^2 = bx$
[5]	$x^3 = bx$
[6]	$x^3 = ax^2$

Équations trinômes

[7]	$x^2 + bx = c$
[8]	$x^2 + c = bx$
[9]	$x^2 = bx + c$
[10]	$x^3 + ax^2 = bx$
[11]	$x^3 + bx = ax^2$
[12]	$x^3 = ax^2 + bx$

I. L'algèbre d'Al-Khayyam

- Équations trinômes résolues à l'aide des sections coniques :

[13]	$x^3 + bx = c$	cercle-parabole
[14]	$x^3 + c = bx$	parabole-hyperbole
[15]	$x^3 = bx + c$	parabole-hyperbole
[16]	$x^3 + ax^2 = c$	parabole-hyperbole
[17]	$x^3 + c = ax^2$	parabole-hyperbole
[18]	$x^3 = ax^2 + c$	parabole-hyperbole

- Equations quadrinômes :

[19]	$x^3 + ax^2 + bx = c$	cercle-hyperbole
[20]	$x^3 + ax^2 + c = bx$	hyperbole-hyperbole
[21]	$x^3 + bx + c = ax^2$	cercle-hyperbole
[22]	$x^3 = ax^2 + bx + c$	hyperbole-hyperbole
[23]	$x^3 + ax^2 = bx + c$	hyperbole-hyperbole
[24]	$x^3 + bx = ax^2 + c$	cercle-hyperbole
[25]	$x^3 + c = ax^2 + bx$	hyperbole-hyperbole

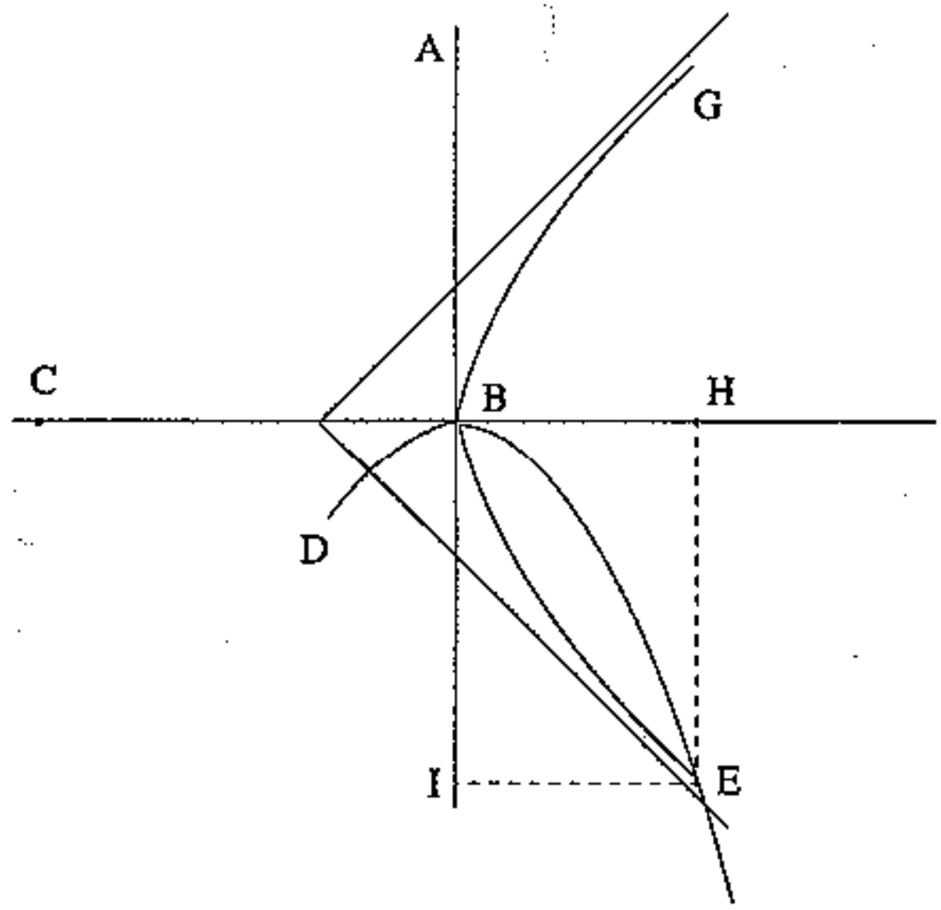
- Al-Khayyam discute les conditions de possibilité des racines positives et remarque explicitement qu'une équation du 3e degré peut avoir 2 racines positives (mais manque la possibilité de 3 racines positives).

I. L'algèbre d'Al-Khayyam : exemple [R. Rashed et B. Vahabzadeh 1999]

« ***Un cube est égal à des côtés plus un nombre.***

Posons AB le côté d'un carré égal au nombre des côtés, et construisons un solide dont la base soit le carré de AB, et qui soit égal au nombre donné ; que sa hauteur BC soit perpendiculaire à AB.

Prolongeons AB et BC, construisons une parabole de sommet le point B, d'axe sur le prolongement de AB [c'est-à-dire BI] et dont le côté droit soit AB ; soit DBE. Elle est de position connue, et elle est tangente à la droite BC, comme l'a montré Apollonius dans la proposition 58 du livre I.

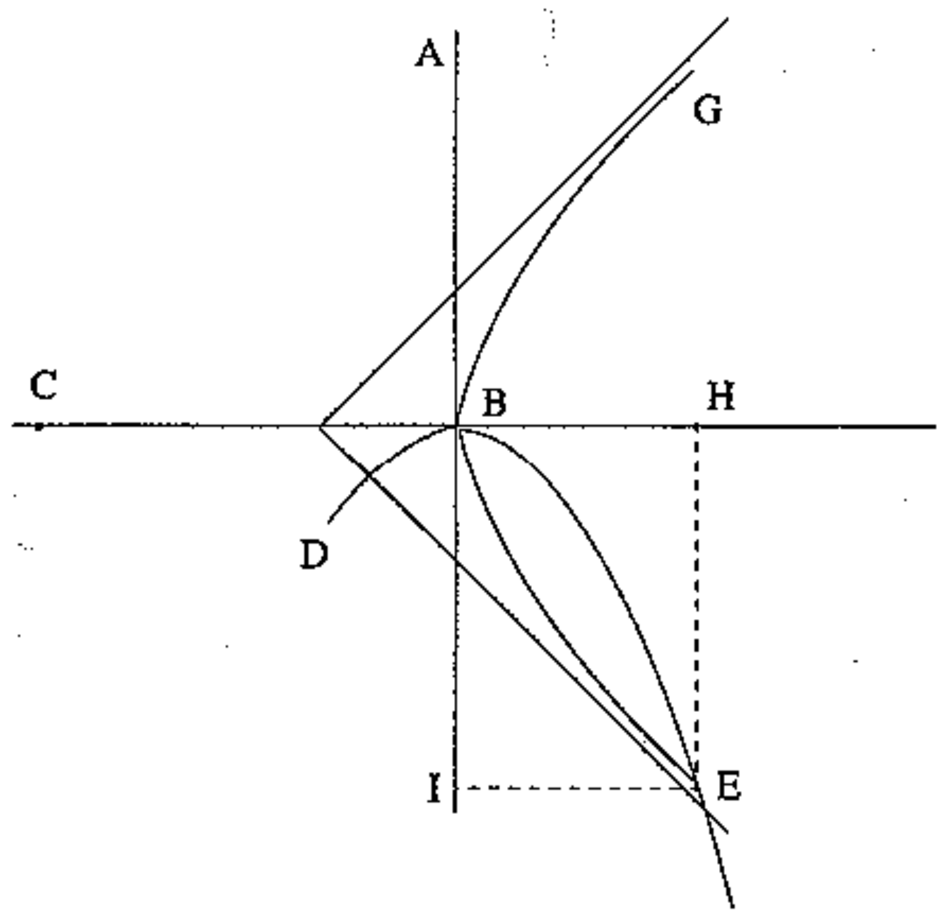


I. L'algèbre d'Al-Khayyam : exemple [R. Rashed et B. Vahabzadeh 1999]

Construisons une autre section, une hyperbole, de sommet le point B, d'axe sur le prolongement de BC et dont chacun des côtés droit et transverse soit égal à BC ; soit la section GBE. Elle est de position connue, et elle est tangente à la droite AB.

Les deux sections se coupent nécessairement. Qu'elles se coupent au point E. Le point E est alors de position connue. Menons du point E les deux perpendiculaires EI et EH ; elles sont de position et de grandeur connues.

Or, la droite EH est une ordonnée [de l'hyperbole], et, selon ce qui précède, son carré est donc égal au produit de CH par BH Le rapport de CH à EH est donc égal au rapport de EH à HB.

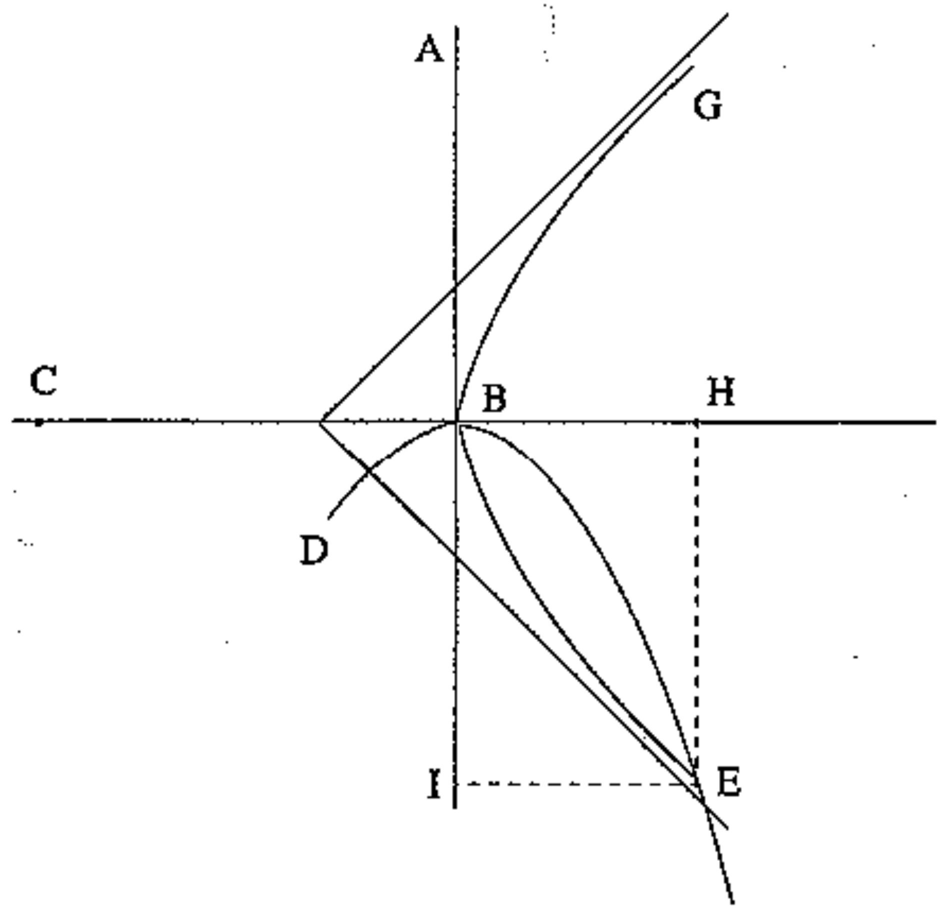


I. L'algèbre d'Al-Khayyam : exemple [R. Rashed et B. Vahabzadeh 1999]

Mais le rapport de EH (qui est égal à BI) à HB (qui est égal à EI qui, elle, est une ordonnée de l'autre section) est égal au rapport de EI à AB, laquelle est le côté droit de la section [parabolique].

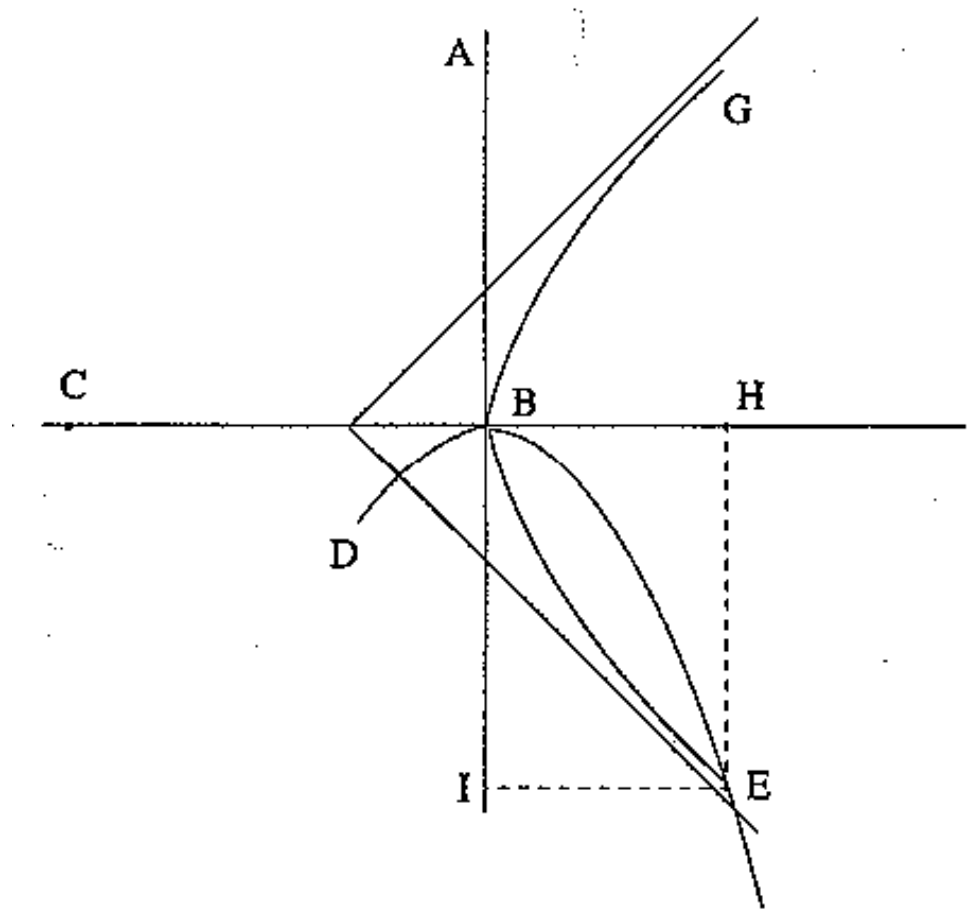
Les quatre droites sont donc en proportion : le rapport de AB à HB est donc égal au rapport de HB à BI et au rapport de BI à CH. Donc le rapport du carré de AB, la première, au carré de HB, la seconde, est égal au rapport de HB, la seconde, à CH, la quatrième.

Le cube de HB est donc égal au solide dont la base est le carré de AB et la hauteur CH, puisque les hauteurs sont inversement proportionnelles à leurs bases.

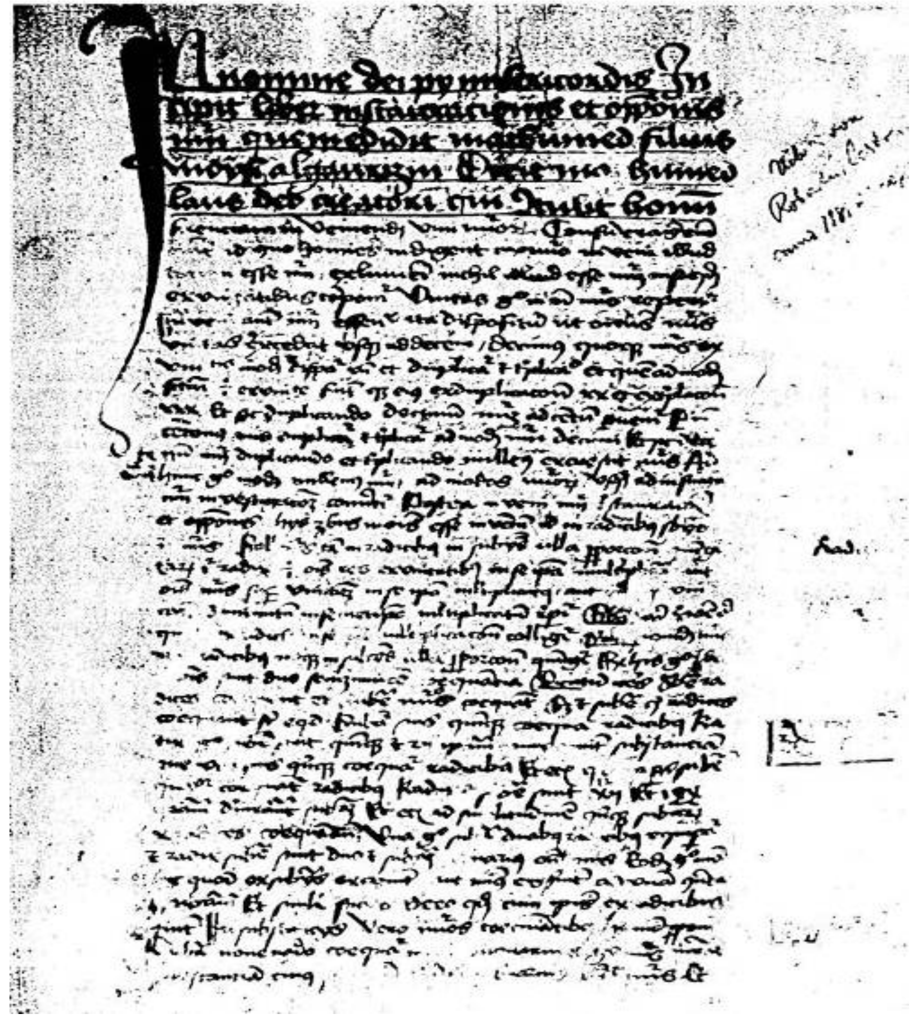


Mais ce solide est égal au solide dont la base est le carré de AB et la hauteur BC (que nous avons construit égal au nombre donné) plus le solide délimité par une base égale au carré de AB et par une hauteur BH, qui est égal au nombre donné des côtés du cube de BH. Le cube de BH est donc égal au nombre donné plus le nombre donné de ses côtés. Et c'est ce qu'on voulait.

On a montré que cette espèce ne comporte pas différents cas, et qu'elle […] ne comprend rien d'impossible. Elle a été résolue par les propriétés de deux sections, une parabole et une hyperbole à la fois. »



- Les dénominations de l’inconnue introduites par Al-Khwarizmi – say (*chose*) ou gizr (*racine*) – deviennent *res* et *radix* au Moyen-Age dans les traductions latines de son *Kitāb al-jabr wa-al-muqābala* (celles de Robert de Chester, ou de Gérard de Crémone, au XII^{e} siècle)
- On retrouve ces dénominations dans le *Liber Abaci* (1202) de Léonard de Pise (alias Fibonacci).
- A la Renaissance :
  - la *cosa* des algébristes italiens
  - la *Coss* des algébristes allemands



Traduction latine de l’Algèbre d’Al-Khwariizmi par Robert de Chester (environ 1141) [Source : http://www.math.ens.fr/culturemath/video/html/Djebbar/icono.htm#2]

I. De l'algèbre arabe à l'algèbre de la Renaissance

Luca Pacioli avec son élève Guidobaldo I^er^ de Montefeltro (1495), musée Capodimonte de Naples

- En 1494, Luca Pacioli publie l'un des premiers livres imprimés contenant de l'algèbre (*Summa de arithmetica, geometria, proporzioni di proporzionalita.*
- L'ouvrage comporte deux volumes : le premier embrasse l'arithmétique théorique et pratique ainsi que l'algèbre, le second la géométrie.
- Une partie des acquis algébriques des arabes y est reprise et assimilée : Luca Pacioli précise que la *pratica speculativa*, vulgairement appelée « règle de la chose » (*regola della cosa*) ou « grand art » (*arte maggiore*) s'appelle aussi *algebra* ou *almucabala*.

II. L'*Ars magna* de Girolamo Cardano, dit Cardan (1545)

- Dans le chapitre XI :
  - Equation cubique du type « cube + nombres de choses = nombre » ($x^3+px=q$).
  - Historique de la solution (Scipione del Ferro, Antonio Maria del Fior, Nicollo Fontana de Brescia, dit Tartaglia) // querelle des équations cubiques
  - Preuve (géométrique) de la solution.
  - Enoncé de la règle
  - Exemples.

- Cardan reconnaît la possibilité de multiplicité des racines et mentionne aussi parfois des solutions négatives en fin de résolution (« nombres fictifs » ou « racines moins pures »).
- Il ne donne pas de formule générale unique et ne traite pas le cas irréductible.
- Il mentionne des solutions imaginaires dans un problème.

II. L'*Algebra* de Bombelli (1572)

- Bombelli consulte à Rome le manuscrit des *Arithmétiques* de Diophante et en intègre une partie dans son *Algebra* (1572).
- Il est le premier à intégrer des nombres « complexes » dans sa méthode de résolution et à les manipuler formellement, et, du coup, le premier à résoudre l'équation cubique dans le cas irréductible (et donc dans tous les cas).
- Il considère les racines des équations comme des sommes algébriques de nombres positifs affectés d'un des quatre signes suivants : *piu* (« + »), *meno* (« $-$ »), *piu di meno* (« $+i$ »), *meno di meno* (« $-i$ »)…
- Donne les règles de multiplication de ces quatre signes.

II. L'*Algebra* de Bombelli (1572)

J'ai trouvé une autre sorte de *R.c.* liées , très différente des autres, qui apparaît au Chapitre du Cube égal à des [Q]uantités [inconnues] et à un nombre quand le cube du tiers [du nombre] des quantités [inconnues] est plus grand que le carré de la moitié du nombre comme cela sera démontré dans ce Chapitre ; laquelle sorte de R.q. a dans son Algorithme des opérations différentes des autres et a un nom différent ; parce que, lorsque le cube du tiers [du nombre] des quantités est plus grand que le carré de la moitié du nombre, [la racine carrée de] leur différence ne peut être appelée ni plus ni moins, c'est pourquoi je l'appellerai plus de moins quand il faudra l'ajouter, et quand il faudra le soustraire je l'appellerai moins de moins , et cette opération est, absolument nécessaire, plus encore que l'autre racine R.c. L. , pour la réponse aux Chapitres des puissances de puissances , accompagnées de [C]ubes, ou de [Q]uantités, ou de tous les deux ensemble, pour lesquelles les cas d'égalisation où apparaît cette sorte de R. sont beaucoup plus nombreux que ceux où apparaît l'autre ; ce qui paraîtra à beaucoup plutôt sophistique que réel, et telle est l'opinion que moi aussi j'ai maintenu, jusqu'à ce que j'en ai trouvé la démonstration par les lignes (comme cela sera démontré par des surfaces planes dans le dit Chapitre) et d'abord je traiterai de la Multiplication, en proposant la règle du plus et du moins.

(Livre premier, traduction française par Jean-Pierre Le Goff)

II. L'*Algebra* de Bombelli (1572)

Plus par plus de moins, [cela] fait plus de moins.
Moins par plus de moins, [cela] fait moins de moins.
Plus par moins de moins, [cela] fait moins de moins.
Moins par moins de moins, [cela] fait plus de moins.
Plus de moins par plus de moins, [cela] fait moins.
Plus de moins par moins de moins, [cela] fait plus.
Moins de moins par plus de moins, [cela] fait plus.
Moins de moins par moins de moins, [cela] fait moins.

(Livre premier, traduction française par Jean-Pierre Le Goff)

II. L'*Algebra* de Bombelli (1572) : exemple

On peut encore, dans la résolution de ce Chapitre, procéder en cette manière. Soit égalé 1 $\overset{3}{\cup}$ à 15 $\overset{1}{\cup}$ p. 4 ; on prend le tiers [du nombre] des Quantités, qui est [égal à] 5 ; on l'élève au cube, ce qui fait 125 ; on ôte cela du carré de la moitié du nombre, qui est 4, et il reste m. 121 (en ce cas on parlera de "plus de moins") ; quand on prendra la R.q. de ce [nombre], cela donnera p. de m. 11, qui, jointe à la moitié du nombre, fait 2 p. de m. 11 ; une fois prise la racine cubique de cela et jointe à son résidu, on obtient 2 p. de m. 1 et 2 m. de m. 1, qui, jointes ensemble

$\overset{3}{\cup}$ 1. Égal à	$\overset{1}{\cup}$ 15.	p.	4.
	5.		2.
	5.		2.
	25.		4.
	5.		125.
	125.	R.q. p. de m. 121.	

Somme 2 p. R.q. p. de m. 121. Reste 2 m. R.q. p. de m. 121.

R.c. ⌊ 2. p. de m. 11. ⌋ R.c. ⌊ 2. m. de m. 11. [⌋]

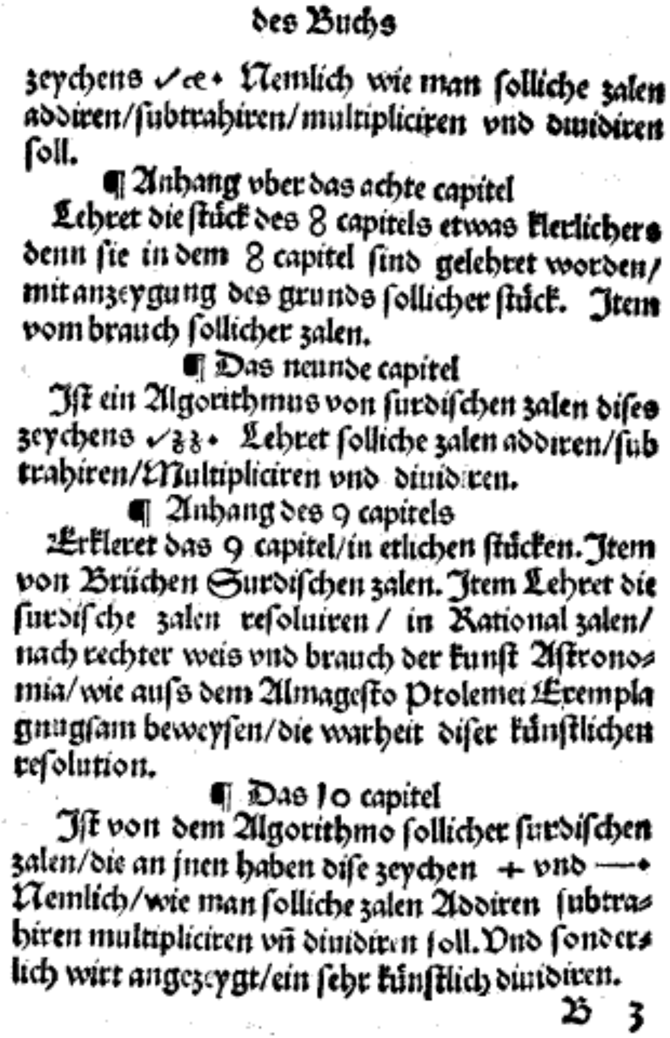
Racine c. : 2. p. de m. 1. 2. m. de m. 1.

Additionnés, ils font 4. qui est la valeur de la Quantité.

(Livre second, traduction française par Jean-Pierre Le Goff)

II. Les « Coss » de langue allemande

- En 1525, Christoff Rudolff publie le premier manuel d'algèbre en langue allemande (*Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen Regeln Algebre so gemeinicklich die Coss genennt*)
  - inspiré de la *Coss* d'Adam Ries (1524), restée inédite
  - utilisation courante des signes « + » et « – »
  - notation  pour l'inconnue
  - introduction de signes pour la notation des racines (ex. : √ pour la racine quarrée)
- Les Allemands se rallient majoritairement à la notation de Rudolff, notamment :
  - Michael Stifel, dans son *Arithmetica integra* (1544),
  - Christopher Clavius, dans son *Algebra* (1608)


des Buchs

zeychens √ce. Nemlich wie man solliche zalen addiren/subtrahiren/multipliciren vnd diuidiren soll.

¶ Anhang vber das achte capitel

Lehret die stück des 8 capitels etwas klerlichers denn sie in dem 8 capitel sind gelehret worden/ mit anzeygung des grunds sollicher stück. Item vom brauch sollicher zalen.

¶ Das neunde capitel

Ist ein Algorithmus von surdischen zalen dises zeychens √ʒʒ. Lehret solliche zalen addiren/subtrahiren/Multipliciren vnd diuidiren.

¶ Anhang des 9 capitels

Erkleret das 9 capitel/in etlichen stücken. Item von Brüchen Surdischen zalen. Item Lehret die surdische zalen resoluiren / in Rational zalen/ nach rechter weis vnd brauch der kunst Astronomia/ wie auss dem Almagesto Ptolemei Exempla gnugsam beweysen/ die warheit diser künstlichen resolution.

¶ Das 10 capitel

Ist von dem Algorithmo sollicher surdischen zalen/ die an jnen haben dise zeychen + vnd —. Nemlich/ wie man solliche zalen Addiren subtrahiren multipliciren vnd diuidiren soll. Vnd sonderlich wirt angezeygt/ ein sehr künstlich diuidiren.

B 3

Die Coss Christoffs Rudolffs [...] durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt,1553.

II. L'inconnue dans tous ses états

- Les Italiens abrégent *cosa* en *co*, par exemple
  - Luca Pacioli, *Summa der Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalita* (1494).
  - Tartaglia et Cardan (utilisent aussi le mot latin *positiones* et son abréviation *pos*).
- Une autre voie (on ne désigne pas l'inconnue, mais on marque sa présence par l'indication de sa puissance à côté de son coefficient) est explorée par certains mathématiciens :
  - Nicolas Chuquet, dans *Le triparty en la science des nombres* (1484)
  - Bombelli, dans l'*Algebra* (1572)
  - Stevin, dans l'*Arithmétique* (1585), puis Girard dans l'*Invention nouvelle en algèbre* (1629).

Soit 1③ esgale à 6①+40

le $\frac{1}{3}$ du 6 est 2 | $\frac{1}{2}$ est 20
son cube 8 | son □ est 400
ostez 8

392
sa √ est √ 392
lequel adjousté à 20
& soubstraict de 20,
viendra $\begin{cases} 20 + \sqrt{392} \\ 20 - \sqrt{392} \end{cases}$
la racine cubicque de
chacun est $\begin{cases} 2 + \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{cases}$

la somme est 4 pour la valeur de 1①

Pour Chuquet : $1^1, 1^2, 1^3, 1^4, \ldots$

Pour Bombelli : $1\overset{1}{\smile}, 1\overset{2}{\smile}, 1\overset{3}{\smile}, 1\overset{4}{\smile} \ldots$

Pour Stevin : 1 ①, 1 ②, 1 ③, 1 ④, …

III. L'art analytique de François Viète (1540-1603)

- Plusieurs œuvres sur l'algèbre, dont :
  - *In artem analyticem Isagoge* (*Introduction à l'art analytique*), 1591
  - *Zeteticorum libri quinque* (*Cinq livres des Zététiques*), 1593
  - *Ad logisticem speciosam Notae priores* (*Premières notes sur la logistique spécieuse*), postérieur à 1631

L'INTRODVCTION
EN L'ART ANALYTIQVE.
OV
ALGEBRE NOVVELLE.

CHAPITRE PREMIER.

De la definition, & diuiſion de l'Analyſe, & des choſes qui ſeruent à la Zeteticque.

IL ſe rencontre dans les Mathematiques vne certaine maniere & façon de rechercher la verité, laquelle on dit auoir eſté premierement inuentée par Platon, que Theon a appellée Analyſe, & par luy definie la ſuppoſition de ce que l'on cherche, comme s'il eſtoit concedé pour paruenir à vne verité cherchée, & ce par le moyen des conſequences; comme au contraire la Syntheſe eſt la ſuppoſition d'vne choſe concedée pour paruenir à la cognoiſſance de ce que l'on cherche par le moyen des conſequences. Et combien que les an-

III. L'art analytique de François Viète (1540-1603)

- Une méthode pour résoudre tous les problèmes grâce à une invention nouvelle :

  La logistique spécieuse : *un calcul avec des symboles, un calcul littéral*

  → **Une nouvelle algèbre**

« *Tous les mathématiciens savaient que sous leur Algèbre ou Almulcabale qu'ils vantaient, et qu'ils nommaient le Grand Art, étaient cachées des masses d'or incomparables, mais il ne les trouvaient pas. Aussi vouaient-ils des hécatombes, faisaient-ils des sacrifices à Apollon et aux Muses lorsqu'ils parvenaient à la solution d'un seul de ces problèmes que je résous spontanément par dizaines, par vingtaines ; ce qui prouve que notre art est la méthode d'invention la plus certaine en mathématiques.* »

« La science de bien trouver dans les mathématiques »

« L'Art analytique s'attribue justement le magnifique problème des problèmes qui est : résoudre tout problème »

« Mais la forme sous laquelle on doit aborder la recherche exige les ressources d'un art spécial, qui exerce sa logique non sur des nombres, suivant l'erreur des analystes anciens, mais au moyen d'une logistique nouvelle… »

« Logistique spécieuse est celle qui est exposée par des signes ou des figures, par exemple, par des lettres de l'alphabet »

III. L'art analytique de François Viète (1540-1603)

- Première utilisation des lettres pour désigner les inconnues et les coefficients.
- Respect de la loi des homogènes.
- La désignation entière ou abrégée de la puissance est accolée à l'inconnue en utilisant, au-delà du cube, la terminologie combinée de Diophante et des cossistes allemands.
- En 1631, Harriot remplace les lettres majuscules de Viète par des minuscules…

« Afin que la mise en équation soit aidée par quelque artifice, on distinguera les grandeurs données des grandeurs inconnues et cherchées en les représentant par un symbole constant, invariable et bien clair, par exemple, en désignant les grandeurs cherchées par la lettre A ou par toute autre voyelle E, I, O, U, Y, et les grandeurs données par les lettres B, C, D ou par toute autre consonne. » (*In artem analyticem Isagoge*, 1591)

THEOREMA IV.

Si A quadrato-cubus — B — D — G — H — K in A quad. quad. + B in D + B in G + B in H + B in K + D in G + D in H + D in K + G in H + G in K + H in K in A cubum — B in D in G — B in D in H — B in D in K — B in G in H — B in G in K — B in H in K — D in G in H — D in G in K — D in H in K — G in H in K in A quad. + B in D in G in H + B in D in G in K + B in D in H in K + B in G in H in K + D in G in H in K in A, æquetur B in D in G in H in K: A explicabilis est de qualibet illarum quinque B, D, G, H, K.

1QC — 15QQ + 85C — 225Q + 274N, *aequatur* 120. *Fit* 1N 1, 2, 3, 4, *vel* 5.

Atque hæc elegans & perpulchræ speculationis sylloge, tractatui alioquin effuso, finem aliquem & Coronida tandem imponito.

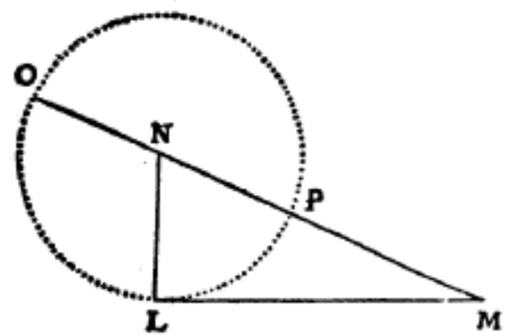
III. La géométrie analytique de René Descartes (1540-1603)

- La *Géométrie* (1637), annexe au *Discours de la méthode* :

- La « méthode » : choisir des lignes (= segments) à partir desquels exprimer le problème sous forme d'équations. La solution peut être des points en nombre fini ou un « lieu » géométrique.

  - Nouveau traitement des équations : notations (lettres minuscules, les dernières de l'alphabet pour les inconnues, les premières pour les coefficients, adoption d'un signe d'égalité) / relations entre coefficients et racines, nombre de racines d'une équation de degré *n*.

  - Redéfinition d'un corpus de courbes à étudier : celles associées à une équation (*courbes algébriques*, en termes modernes)



$$z^2 \;\infty\; az + bb$$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à *b* racine quarrée de la quantité connue *bb*, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par *z* que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle, iuſques a O, en ſorte qu'N O ſoit eſgale a N L, la toute O M eſt *z* la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete ſorte

$$z \;\infty\; \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}.$$

III. La géométrie analytique de René Descartes (1540-1603)

Les anciens ont fort bien remarqué qu'entre les problèmes de géométrie, les uns sont plans, les autres solides et les autres linéaires, c'est-à-dire que les uns peuvent être construits en ne traçant que des lignes droites et des cercles; au lieu que les autres ne le peuvent être, qu'on n'y emploie pour le moins quelque section conique; ni enfin les autres, qu'on n'y emploie quelque autre ligne plus composée. Mais je m'étonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué divers degrés entre ces lignes plus composées, et je ne saurois comprendre pourquoi ils les ont nommées mécaniques plutôt que géométriques. Car de dire que c'ait été à cause qu'il est besoin de se servir de quelque machine pour les décrire, il faudroit rejeter par même raison les cercles et les lignes droites, vu qu'on ne les décrit sur le papier qu'avec un compas et une règle, qu'on peut aussi nommer des machines. Ce n'est pas non plus à cause que les instruments qui servent à les tracer, étant plus composés que la règle et le compas, ne peuvent être si justes; car il faudroit pour cette raison les rejeter des mécaniques, où la justesse des ouvrages qui sortent de la main est désirée, plutôt que de la géométrie, où c'est seulement la justesse du raisonnement qu'on recherche, et qui peut sans doute être aussi parfaite touchant ces lignes que touchant les autres. Je ne dirai pas

(*La Géométrie*, début du livre II)

III. Géométrie analytique chez René Descartes et Pierre Fermat

- **René Descartes**, dans *La Géométrie* (1637) :

  « *Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi, on aura une infinité de divers points tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrit la ligne courbe demandée.* »

  ✓ Descartes fait le lien entre une équation en x et y et la dépendance entre deux quantités variables…

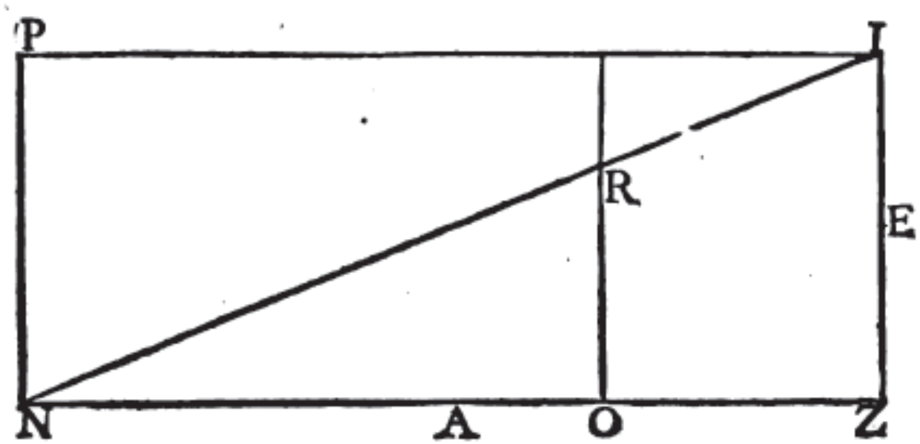
  ✓…mais restreint cette relation aux courbes « géométriques » (c'est-à-dire algébriques) et en exclut donc les courbes « méchaniques » (c'est-à-dire transcendantes).

- **Pierre Fermat**, dans son *Ad locos planos et solidos isagoge* (communiqué à Mersenne en 1637, publié en 1679) :

  « *Aussitôt que deux quantités inconnues apparaissent dans une ultime égalité, il y a un lieu et le point terminal de l'une des deux quantités décrit une ligne droite ou courbe.* »

III. Fermat, extrait de l'*Ad locos planos et solidos isagoge*

$A^2 \infty DE$. Si A^2 æq. D in E, punctum I, est ad Parabolem.



constituantur N Z, & Z I, ad quemcumque angulum Z.

Fiat N P, Parallela Z I, & circa diametrum N P describatur parabole, cujus rectum latus recta D, datæ, & applicatæ sint parallellæ N Z. punctum I. erit ad parabolem hanc positione datam. Ex constructione rectangulum sub D, in N P, æquabitur quadrato P I, hoc est, si P I, intelligatur esse A, & N P, intelligatur esse E, D, in E, æquabitur A^2.

Ad hanc æquationem facillimè reducentur omnes in quibus A,^{2} miscetur homogeneis sub datis in E, aut E,^{2} homogeneis sub datis in A, idemque continget, licèt homogenea omnino data æquationibus misceantur.

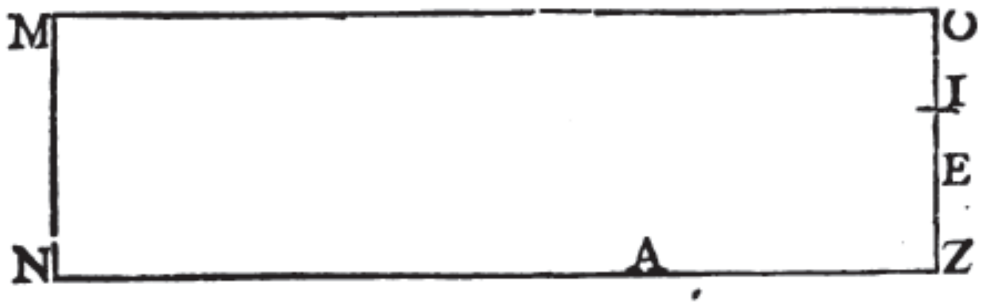
Sit E,^{2} æquale D in A.

$E^2 \infty DA$. In præcedenti figura vertice N, circa diametrum N Z, describatur parabole, cujus rectum latus sit D, & applicatæ rectæ N P, parallela, præstabit propositum, ut patet,

III. Fermat, extrait de l'*Ad locos planos et solidos isagoge*

$B^2 - A^2 \infty$ DE $B^2 - DE \infty A^2$.

Ponatur $B^2 - A^2$ æqu. D in E. Ergo B^2 — D in E æquabitur A^2.



Applicetur B^2 ad D, & ſit æquale D. in R.

Ergo D in R — D in E, æquabitur A^2 Ideoque D in R — E æquabitur A^2.

Ideoque hæc æquatio reducetur ad præcedentem. Recta quippe R — E, ſuccedet ipſi E.

Fiat quippe N M, parallela Z I, & æqualis R, & per punctum M ducatur M O, parallela N Z, datur punctum M, & recta M O, poſitione, in hac conſtructione O I, æquatur R — E. ergo D. in O I, æquabitur N E quad. ſive M O quad vertice M. circa diametrum M N, deſcripta parabole, cujus dextrum latus D, & applicatæ ipſi N Z, parallelæ, præſtabit propoſitum, ut patet ex conſtructione.

Si $B^2 + A^2$ æqu. D in E.

D in E — B^2 æquabitur A^2 &c. vt ſupr. ſimiliter omnes æquationes affectæ conſtruentur.

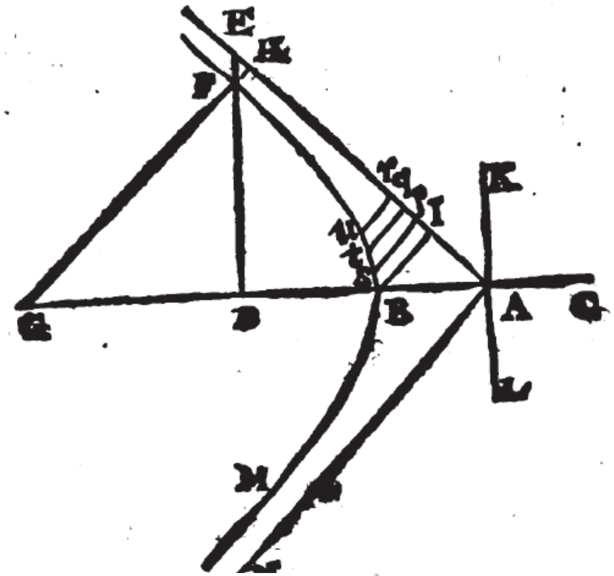
Sed A^2 miſcetur ſæpe E^2 & homogeneis omnino datis.

$B^2 - A^2$ æquetur E^2.

Punctum I eſt ad circulum poſitione datum, quando angulus N Z I. eſt rectus.

Conclusion intermédiaire…

- A la fin du XVII^{e} siècle, la notion de fonction en tant qu'objet mathématique n'est pas encore isolée.
- Mais les méthodes de quadrature de certaines courbes se multiplient.
- L'introduction de la méthode de développement en séries entières va permettre de représenter analytiquement les courbes transcendantes laissées de côté par Descartes.



Exemple : dans le *Logarithmotechnia* (1668), Nicolas Mercator exprime une hyperbole équilatère grâce à la réduction en série géométrique de *1/(1+x). Il intégrera ensuite cette série terme à terme…*

Applica $\overset{b}{1}+\overset{c}{a}$ ad $\overset{d}{1}$, oritur $\overset{e}{1}$; tum $\overset{e}{1}$ in $\overset{b}{1}+\overset{c}{a}$ producit $\overset{f}{1}+\overset{g}{a}$ ſubducendum ex $\overset{d}{1}$, & reſtat $\overset{h}{0}-\overset{i}{a}$. Rurſus $\overset{b}{1}+\overset{c}{a}$ applicetur ad $\overset{h}{0}-\overset{i}{a}$, oritur $\overset{k}{-a}$; tum $\overset{k}{-a}$ in $\overset{h}{0}-\overset{i}{a}$ producit $\overset{l}{-a}\overset{m}{-aa}$, ſubducendum ex $\overset{h}{0}-\overset{i}{a}$, & reſtat $\overset{n}{0}+\overset{o}{aa}$. Ad hoc applica $\overset{b}{1}+\overset{c}{a}$, oritur $\overset{p}{+aa}$; quod ductum in $\overset{b}{1}+\overset{c}{a}$ gignit $\overset{q}{aa}+\overset{r}{a^3}$, ſubducendum ex $\overset{n}{0}+\overset{o}{aa}$, & reſtat $\overset{s}{0}-\overset{t}{a^3}$. Atque ita continuatâ operatione, deprehenditur $\frac{1}{1+a} = 1-a+aa-a^3+a^4$ (&c.) $= FH$.