Master de Mathématiques – Sorbonne Université (M1)

UE 4M039 : Histoire des mathématiques

(Alexandre Guilbaud et Laurent Mazliak)

Semaine 4

La naissance du calcul différentiel et intégral : un pas décisif vers l'émergence du concept de fonction

Prologue (1/3) – Les académies

Jean-Baptiste Colbert présentant les membres de l'Académie royale des sciences à Louis XIV (H. Testelin, d'après une gravure de Lebrun)

Prologue (1/3) – Les académies

- Les académies qui naissent au XVII^e siècle signent l'abandon du travail solitaire.

- Les savants s'y réunissent de leur plein gré et de façon informelle pour : échanger des idées et réfléchir de façon collective sur un certain nombre de sujets / soumettre leurs travaux à la critique des autres membres / réaliser des observations et les commenter.

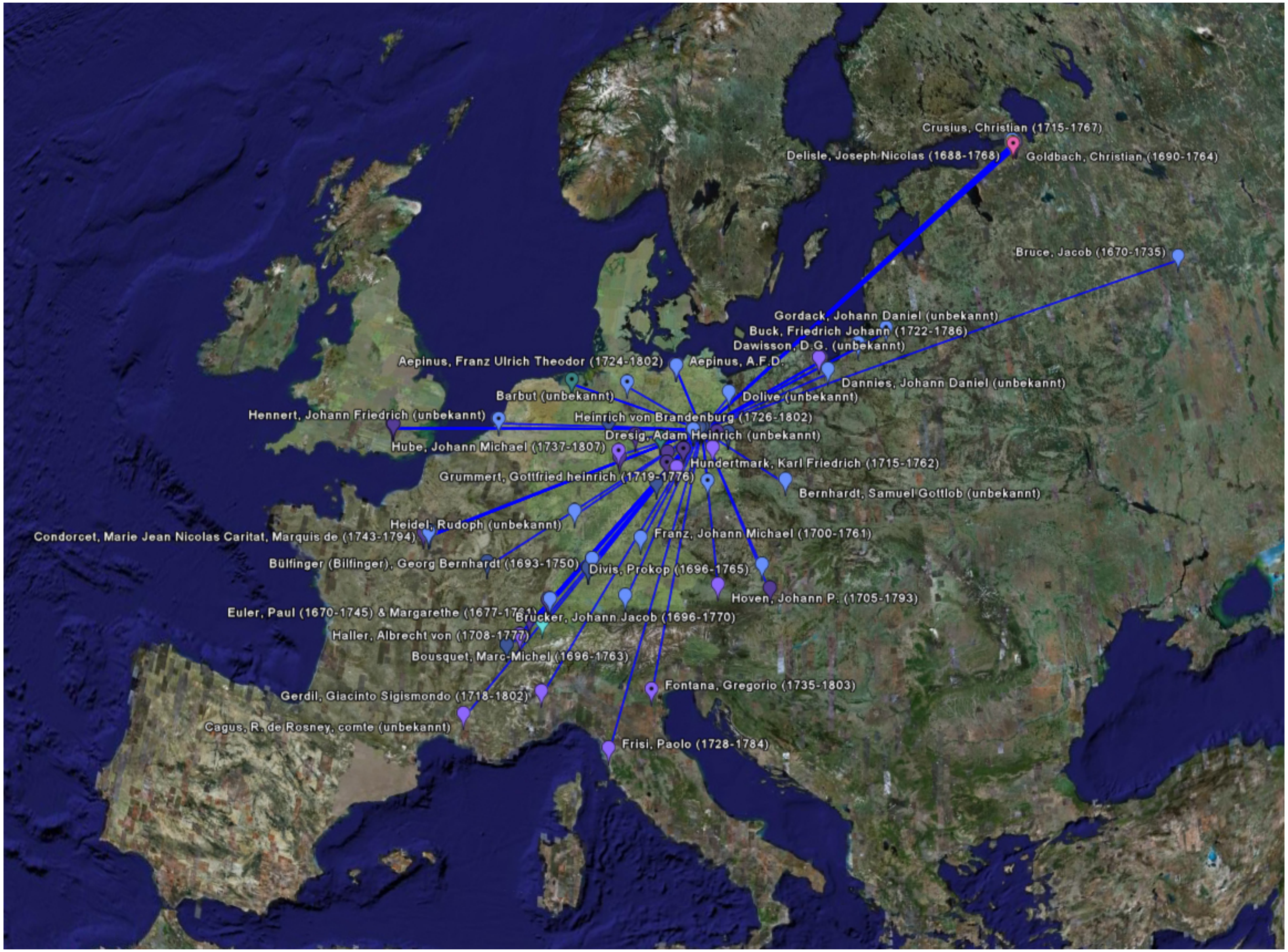
- Les « académies privées » :
  - ✓ L'Académie dei Lincei, fondée à Rome en 1603 (Galilée en est membre à partir de 1611)
  - ✓ L'Académie del Cimento à la brève existence (1657-1667)
  - ✓ L'académie napolitaine des Investiganti (1663-1670)
  - ✓ L'Académie par correspondance de Marin Mersenne (1588-1648) met en relation une quarantaine de savants (dont Descartes, Fermat, Galilée, Gassendi, Roberval, Huygens)
  - ✓ etc.

Prologue (1/3) – Les académies

- La Royal Society de Londres : existe depuis 1661, elle ne reçoit aucun financement de la couronne et vit des cotisations de ses membres (qui devinrent fort nombreux).

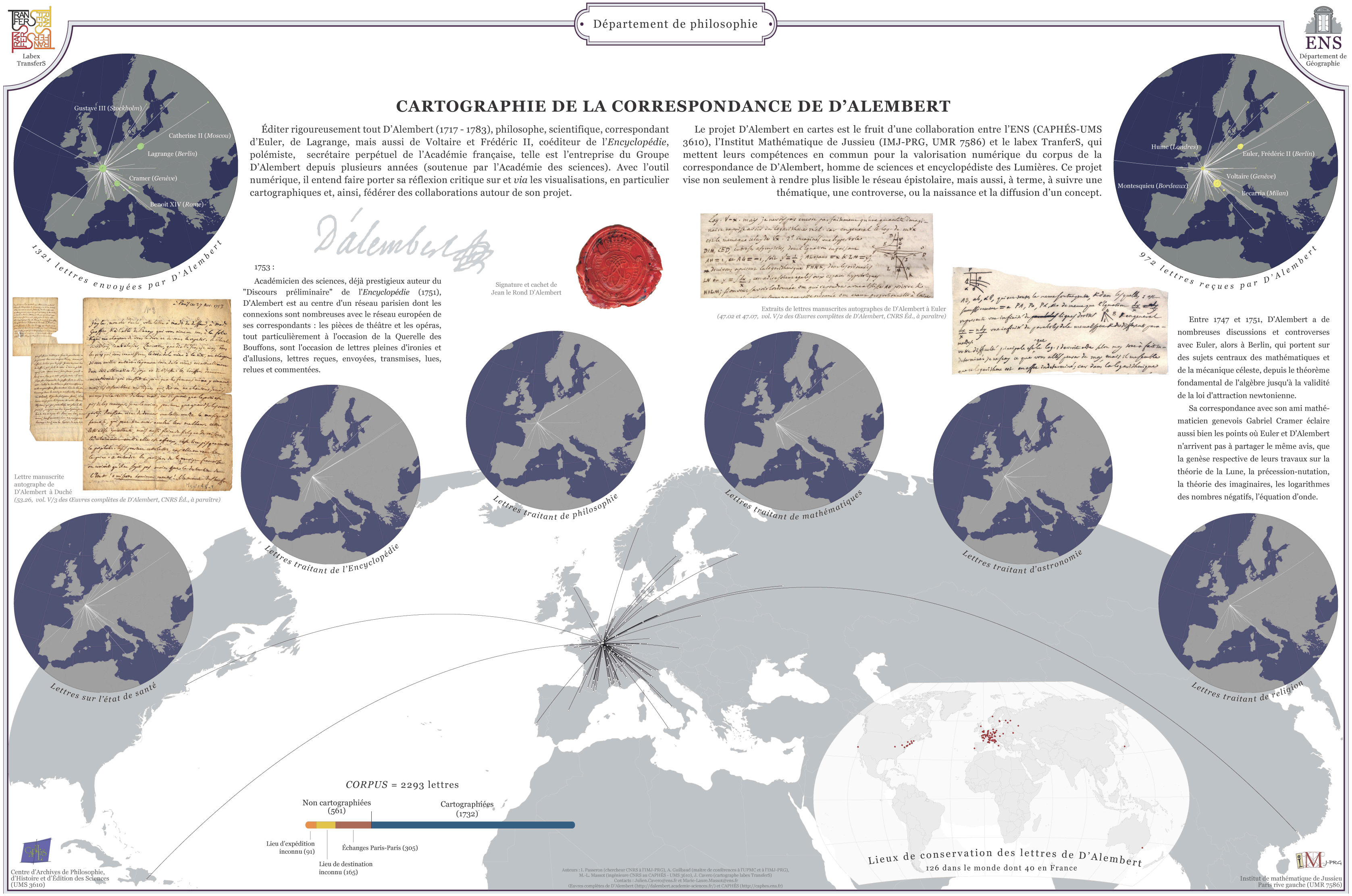
- L'Académie royale des sciences de Paris, créée par Colbert en 1666 :
    - l'Observatoire de Paris naît en 1667 sous l'impulsion de l'Académie.
    - le 20 janvier 1699, Louis XIV lui attribue son premier règlement. Elle reçoit le titre d'Académie royale et est installée au Louvre.

- Au XVIII^{e} siècle, les Académies se multiplient en Europe :
    - l'Académie de Berlin, créée en 1700 sous l'impulsion de Leibniz, reconnue en 1711 et réorganisée par Frédéric II en 1744
    - l'Académie de Petersbourg, créée en 1724, accueille de nombreux savants étrangers (Daniel Bernoulli, Euler)
    - l'Académie de Turin (où Lagrange fait ses débuts)
    - les Académies de Bologne, de Lisbonne, de Göttingen, d'Edinburgh, etc.



Le réseau de correspondance d'Euler (1707-1783)
[document réalisé par S. Bodenmann]

Prologue (2/3) – Les correspondances

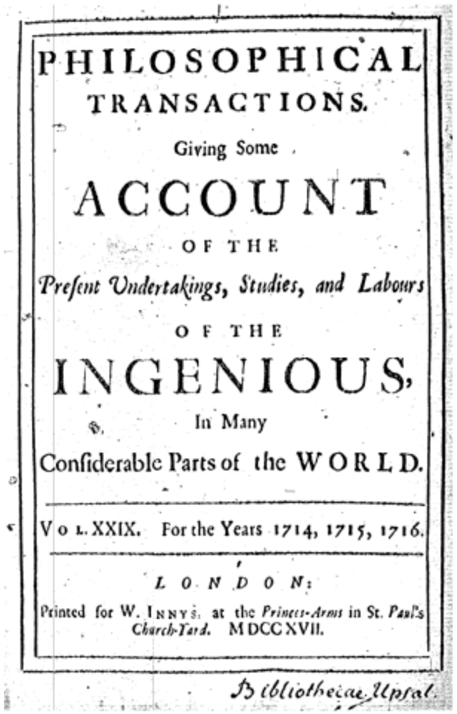


Le réseau de correspondance de D'Alembert (1717-1783)
[document réalisé par I. Passeron et A. Guilbaud]

Prologue (3/3) – Les journaux et les périodiques

- L'impressionnante masse de travaux scientifiques des académiciens (en particulier) se traduit par une multiplication des journaux, gazettes, revues et publications périodiques.

- Les périodiques académiques :

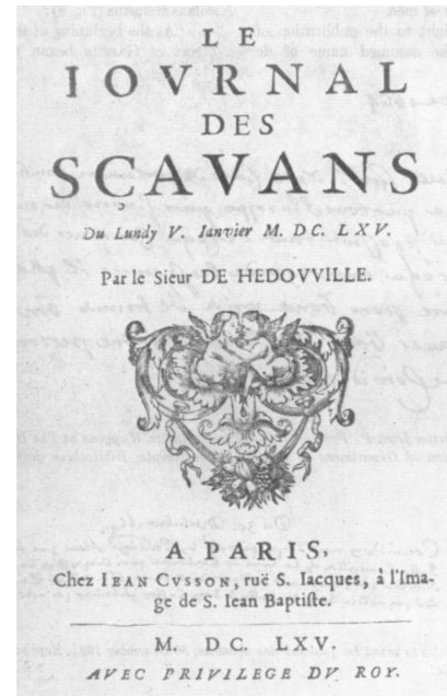

PHILOSOPHICAL
TRANSACTIONS.
Giving Some
ACCOUNT
OF THE
Prefent Undertakings, Studies, and Labours
OF THE
INGENIOUS,
In Many
Confiderable Parts of the WORLD.
Vol. XXIX. For the Years 1714, 1715, 1716.
LONDON:
Printed for W. Innys, at the Princes-Arms in St. Paul's Church-Yard. MDCCXVII.
Bibliothecae Upsal.

Fondées en 1665, les *Philosophical Transactions* correspondent à la première revue strictement scientifique.


HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES.
Année M. DCCXLIV.
Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année.
Tirez des Registres de cette Académie.
A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCXLVIII.

Les volumes de l'*Histoire de l'Académie royale des science* de Paris.

- Les journaux :


LE
IOVRNAL
DES
SCAVANS
Du Lundy V. Ianvier M. DC. LXV.
Par le Sieur DE HEDOVVILLE.
A PARIS,
Chez Iean Cusson, ruë S. Iacques, à l'Image de S. Iean Baptiste.
M. DC. LXV.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Le *Journal des savants* naît en 1665. Il traite de mathématiques, de philosophie naturelle, d'histoire, etc.

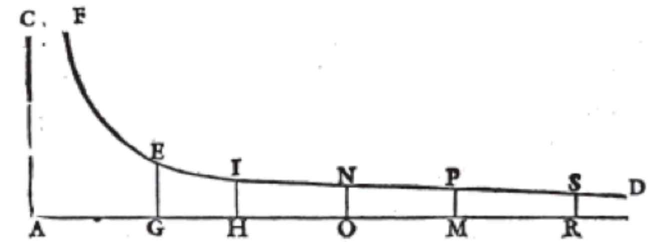
I. De la méthode d'exhaustion aux méthodes infinitésimales

- Développement de la méthode d'exhaustion par les savants arabes : Thabit ibn Qurra (IX^e siècle), Ibn Al-Haytham (fin du X^e siècle), etc.

- Au XVI^e siècle, Simon Stevin (1548-1620) et Luca Valerio (1552-1618) omettent le double raisonnement par l'absurde : le premier en ayant recours à la notion d'infini (héritage scholastique), le second en lui substituant un théorème général.

- Au XVIIe siècle :
  - Cavalieri (1598-1647), Torricelli (1608-1647), Roberval (1602-1675), Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), John Wallis (1616-1703) développent la méthode des indivisibles
  - Développement de méthodes de quadrature par Fermat (?-1665), Pascal (1623-1662), Brouncker, Mercator, etc. basées sur l'utilisation des séries infinies

Exponatur, ſi placet, hyperbola, cujus ea ſit proprietas, ut ſit ſemper ut quadratum rectæ H A, ad quadratum rectæ A G, ita recta G E, ad rectam H I, & ut quadratum



O A, ad quadratum A H, ita recta H I, ad rectam O N, &c. Aio ſpatium infinitum, cujus baſis G E, & curva E S, ex uno latere, ex alio vero aſymptotos infinita G O R, æquari ſpatio rectilineo dato. Fingantur termini progreſſionis geometricæ in infinitum extendendi, quorum primus ſit A G, ſecundus A H, tertius A O, &c. in infinitum, & ad ſe ſe per approximationem tantum accedant quantum ſatis ſit ut juxta Methodum Archimedæam, parallelogrammum rectilineum ſub GE, in G H, quadrilineo mixto G H E, adæquetur, ut loquitur Diophantus, aut ferè æquetur.

GE, in G H.

Item ut priora ex intervallis rectis proportionalium G H, H O, O M, & ſimilia ſint ferè inter ſe æqualia, ut commodè per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον, per circumſcriptiones & inſcriptiones Archimedæa demonſtrandi ratio inſtitui poſſit, quod ſemel monuiſſe ſufficiat, ne artificium quibuſlibet geometris jam ſatis notum inculcare ſæpius & iterare cogamur.

His poſitis, cum ſit ut A G, ad A H, ita A H, A O, & ita A O ad A M, erit pariter ut A G, ad A H : ita intervallum G H, ad H O, & ita intervallum H O, ad O M, &c. Parallelogrammum autem ſub E G, in G H, erit ad parallelogrammum ſub H I, in H O, ut parallelogrammum ſub H I, in H O, ad parallelogrammum ſub N O, in O M, cùm enim ratio parallelogralemi ſub G E, in G H, ad parallogrammum ſub H I, in H O, componatur ex ratione rectæ G E, ad rectam H I, & ex ratione rectæ G H, ad rectam H O : ſit autem ut G H, ad H O, ita A G, ad A H, ut præmonuimus. Ergo ratio parallelogrammi ſub E G, & G H, ad parallelogrammum ſub H I, in H O, componitur ex ratione G E, ad H I; & ex ratione A G, ad A H, ſed ut G E, ad H I, ita ex conſtructione H A, quadratum, ad quadratum G A, ſive propter proportionales : ita recta A O, ad rectam G A. Ergo ratio parallelogrammi ſub E G, in G H, ad parallelogrammum ſub H I, in H O, componitur ex ratione A O, ad A G, & A G, ad A H, ſed ratio A O ad A H, componitur ex illis duabus. Ergo parallelogrammum ſub G E, in G H, eſt ad parallelogrammum ſub H I, in H O, ut O A, ad H A; ſive ut H A, ad A G.

Similiter probabitur parallelogrammum ſub H I, in H O, eſſe ad parallelogrammum ſub O N, in O M, ut A O, ad H A, ſed tres rectæ quæ conſtituunt rationes parallelogrammorum, rectæ nempe A O, H A. G A, ſunt proportionales ex conſtructione.

Fermat, « Quadrature de l'hyperbole », 1636 (publié à titre posthume en 1679)

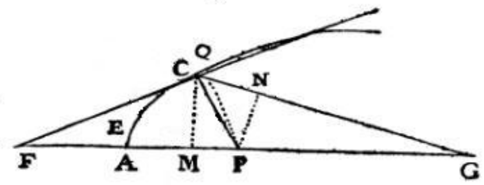
I. De la méthode d'exhaustion aux méthodes infinitésimales

- Apparition du problème des tangentes au milieu du XVII^e siècle :
  - méthodes analytiques de Descartes (1596-1650) et de Fermat
  - méthode géométrique d'Isaac Barrow (1630-1677).

342 LA GEOMETRIE.

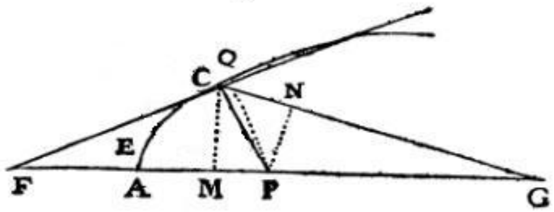
tels de leurs poins qu'on voudra choiſir. Et i'oſe dire que c'eſt cecy le problèſme le plus vtile, & le plus general non ſeulement que ie ſçache, mais meſme que i'aye iamais deſiré de ſçauoir en Geometrie.

Façon generale pour trouuer des lignes droites, qui coupent les courbes données, ou leurs contingentes, a angles droits.



Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie ſuppoſe la choſe deſia faite, & que la ligne cherchée eſt C P, laquelle ie prolonge iuſques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie ſuppoſe eſtre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E : en ſorte que faiſant M A ou C B ∞ y, & C M, ou B A ∞ x, i'ay quelque equation, qui explique le rapport, qui eſt entre x & y. Puis ie fais P C ∞ s, & P A ∞ v, ou P M ∞ $v - y$, & a cauſe du triangle rectangle P M C i'ay ss, qui eſt le quarré de la baze eſgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui ſont les quarrés des deux coſtés. c'eſt a dire i'ay x ∞ $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien y ∞ $v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oſte de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui eſt ayſé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete ſomme au lieu d'xx, & ſon cube au lieu d'x^3, & ainſi des autres, ſi c'eſt x que ie veuille oſter ; oubien tels de leurs poins qu'on voudra choisir. Et i'ose dire que c'est cecy le problesme le plus vtile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçauoir en Geometrie.

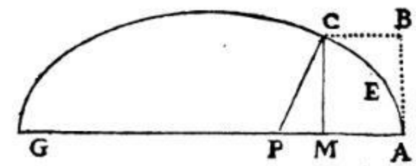
Façon generale pour trouuer des lignes droites, qui couppent les courbes données, ou leurs contingentes, a angles droits.



Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie suppose la chose desia faite, & que la ligne cherchée est C P, laquelle ie prolonge iusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie suppose estre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E : en sorte que faisant M A ou C B ∞y, & C M, ou B A ∞x, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui est entre x & y. Puis ie fais P C ∞s, & P A ∞v, ou P M $\infty v - y$, & a cause du triangle rectangle P M C iay ss, qui est le quarré de la baze esgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les quarrés des deux costés. c'est a dire iay $x \infty \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien $y \infty v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oste de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui est aysé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete somme au lieu d'xx, & son cube au lieu d'x^3, & ainsi des autres, si c'est x que ie veuille oster ; oubien

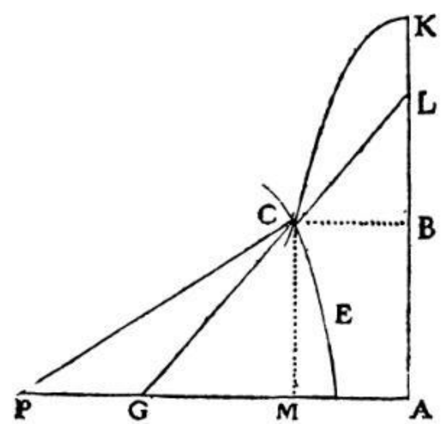
si c'est y, en mettant en son lieu $v + \sqrt{ss - xx}$, & le quarré, ou le cube, &c. de cete somme, au lieu d'yy, ou y^3 &c. De façon qu'il reste tousiours aprés cela vne equation, en laquelle il ny a plus qu'vne seule quantité indeterminée, x, ou y.

Comme si C E est vne Ellipse, & que M A soit le segment de son diametre, auquel C M soit appliquée par ordre, & qui ait r pour son costé droit, & q pour le trauersant, on à par le 13 th. du 1 liu. d'Apollonius.



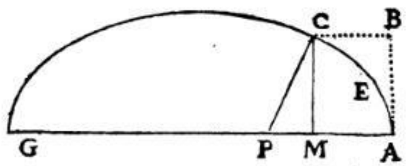
$xx \infty ry - \frac{r}{q}yy$, d'on ostant xx, il reste $ss - vv + 2vy - yy \infty ry - \frac{r}{q}yy$. oubien,

$$yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$$ esgal a rien. car il est mieux en cet endroit de considerer ainsi ensemble toute la somme, que d'en faire vne partie esgale a l'autre.



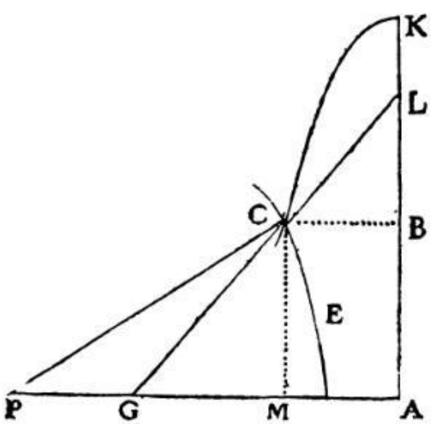
Tout de mesme si C E est la ligne courbe descrite par le mouuement d'vne Parabole en la façon cy dessus expliquée, & qu'on ait posé b pour G A, c pour K L, & d pour le costé droit du diametre K L en la parabole : l'equatiō qui explique le rapport qui bien ſi c'eſt y, en mettant en ſon lieu $x + \sqrt{ss - xx}$, & le quarré, ou le cube, &c. de cete ſomme, au lieu d'yy, ou y^3 &c. De façon qu'il reſte touſiours aprés cela vne equation, en laquelle il ny a plus qu'vne ſeule quantité indeterminée, x, ou y.

Comme ſi CE eſt vne Ellipſe, & que MA ſoit le ſegment de ſon diametre, auquel CM ſoit appliquée par ordre, & qui ait r pour ſon coſté droit, & q pour le trauerſant, on à par le 13 th. du 1 liu. d'Apollonius. $xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$, d'on oſtant xx, il reſte $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q}yy$. oubien,



$yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ eſgal a rien. car il eſt mieux en cet endroit de conſiderer ainſi enſemble toute la ſomme, que d'en faire vne partie eſgale a l'autre.

Tout de meſme ſi CE eſt la ligne courbe deſcrite par le mouuement d'vne Parabole en la façon cy deſſus expliquée, & qu'on ait poſé b pour GA, c pour KL, & d pour le coſté droit du diametre KL en la parabole: l'equatiõ qui explique le rapport qui

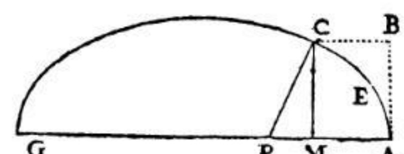


nes; & enfin elles ſont entierement eſgales, s'ils ſont tous deux ioins en vn; c'eſt a dire ſi le cercle, qui paſſe par C, y touche la courbe CE ſans la coupper.

De plus il faut conſiderer, que lorſqu'il y a deux racines eſgales en vne equation, elle a neceſſairement la meſme forme, que ſi on multiplie par ſoy meſme la quantité qu'on y ſuppoſe eſtre inconnuë moins la quantité connue qui luy eſt eſgale, & qu'aprés cela ſi cete derniere ſomme n'a pas tant de dimenſions que la precedente, on la multiplie par vne autre ſomme qui en ait autant qu'il luy en manque; affin qu'il puiſſe y auoir ſeparement equation entre chaſcun des termes de l'vne, & chaſcun des termes de l'autre.

Comme par exemple ie dis que la premiere equation trouuée cy deſſus, a ſçauoir

$yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ doit auoir la meſme forme que celle qui ſe produiſt en faiſant e eſgal a y, & multipliant $y - e$ par ſoy meſme, d'où il vient $yy - 2ey + ee$, en ſorte qu'on peut comparer ſeparement chaſcun de leurs termes, & dire que puiſque le premier qui eſt yy eſt tout le meſme en l'vne qu'en l'autre, le ſecond qui eſt en l'vne $\frac{qry - 2qvy}{q - r}$ eſt eſgal au ſecõd de l'autre qui eſt $-2ey$, d'où cherchant la quantité v qui eſt la ligne PA, on à $v \propto e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, oubiẽ a cauſe que nous auons ſuppoſé e eſgal a y, on a $v \propto y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. Et ainſi



I. De la méthode d'exhaustion aux méthodes infinitésimales

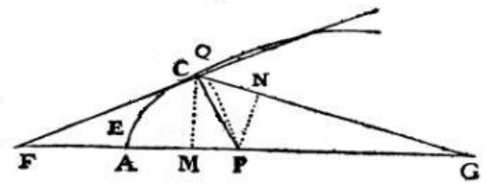
- Apparition du problème des tangentes au milieu du XVII[e] siècle :
  - méthodes analytiques de Descartes (1596-1650) et de Fermat
  - méthode géométrique d'Isaac Barrow (1630-1677).

- Isaac Barrow serait le premier à clairement faire apparaître le problème de la quadrature et le problème des tangentes comme inverses l'un de l'autre. Mais son approche géométrique l'empêchera de tirer parti de cette intuition.

342 LA GEOMETRIE.

tels de leurs poins qu'on voudra choiſir. Et i'oſe dire que c'eſt cecy le problesme le plus vtile, & le plus general non ſeulement que ie ſçache, mais meſme que i'aye iamais deſiré de ſçauoir en Geometrie.

Facon generale pour trouuer des lignes droites, qui couppent les courbes données, ou leurs contingentes, a angles droits.

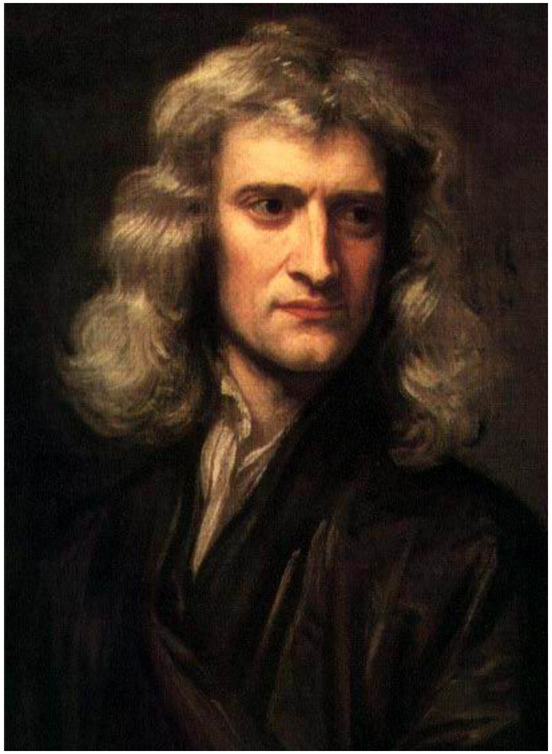


Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie ſuppoſe la choſe deſia faite, & que la ligne cherchée eſt C P, laquelle ie prolonge iuſques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie ſuppoſe eſtre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E : en ſorte que faiſant M A ou C B $\propto y$, & C M, ou B A $\propto x$, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui eſt entre x & y. Puis ie fais P C $\propto s$, & P A $\propto v$, ou P M $\propto v - y$, & a cauſe du triangle rectangle P M C iay ss, qui eſt le quarré de la baze eſgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui ſont les quarrés des deux coſtés. c'eſt a dire iay $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oſte de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui eſt ayſé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete ſomme au lieu d'xx, & ſon cube au lieu d'x^3, & ainſi des autres, ſi c'eſt x que ie veuille oſter ; oubien

II. La naissance d'un nouveau calcul

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

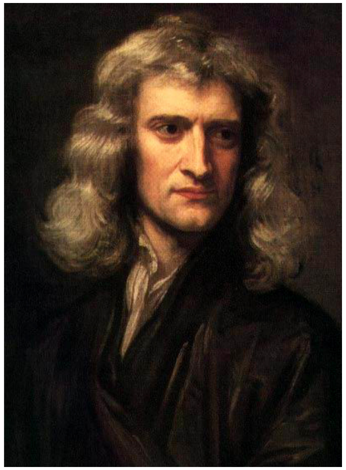
Isaac Newton
(1643-1727)



II. La naissance d’un nouveau calcul

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Isaac Newton (1643-1727)



- Indépendamment l'un de l'autre, Newton et Leibniz réordonnent et systématisent l'ensemble de ces résultats.

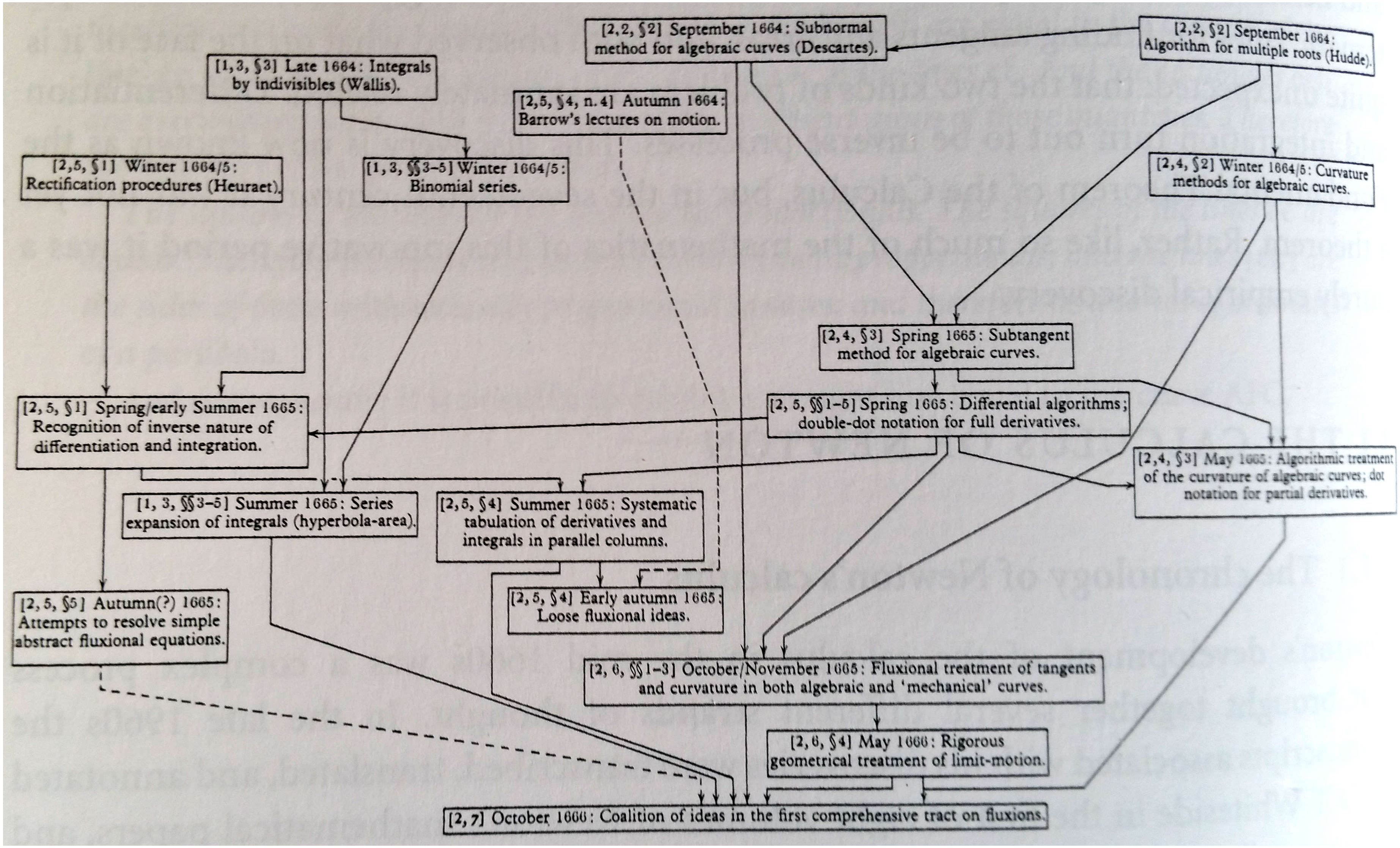
- Ils inventent des procédés algorithmiques de calcul facilement utilisables.

- Ils identifient et manipulent le problème des tangentes comme le problème inverse des quadratures, et vice-versa.

- La généralité de leurs méthodes va permettre à l'analyse infinitésimale de devenir une branche autonome, indépendante de la géométrie.

- Leurs travaux dans ce domaine ne sont pas dénués de considérations métaphysiques (dans le cadre de leurs tentatives de justification du nouveau calcul)...

II. La genèse du calcul fluxionnel newtonien



[Source : D. T. Whiteside (ed.), *The mathematical papers of Isaac Newton*, vol. I, 1967, p. 154]

II. Le calcul fluxionnel newtonien

- Entre 1664 et les années 1690, Newton élabore trois versions du calcul infinitésimal :

1669 – Il communique son *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* à quelques mathématiciens anglais (mais ne le publiera pas avant 1711)

Il y énonce trois règles :

Règle 1 : Si $y = ax^{\frac{m}{n}}$, alors l'aire sous y est $\dfrac{an}{n+m}x^{1+\frac{m}{n}}$.

Règle 2 : Si y est donné par la somme de plusieurs termes (ou par un nombre infini de termes), alors l'aire sous y est donnée par la somme des aires de tous les termes.

Règle 3 : Pour calculer l'aire sous une courbe $f(x,y) = 0$, il faut exprimer y comme une somme de termes de la forme $y = ax^{\frac{m}{n}}$ et appliquer les règles 1 et 2 [règle fondée sur l'application du binôme de Newton].

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + x^n$$

1670-1671 – Rédaction du *De methodis serierum et fluxionum* (publié en 1736 !)

Newton définit un algorithme de calcul d'inspiration **cinématique** :

- cet algorithme s'applique à des quantités qui « fluent » au cours du temps (le mouvement d'un point génère une ligne, celui d'une ligne une surface, etc.)
- les quantités générées par ce mouvement sont appelées les « fluentes »

$\dot{x}$ — les vitesses instantanées correspondantes sont appelées « fluxions »

$\dot{x}o$ — les « moments » correspondent aux incréments infiniment petits par lesquels les quantités augmentent au cours de chaque intervalle infinitésimal de temps.

avec *o* un intervalle infinitésimal de temps (notations introduites par Newton dans le courant des années 1690).

II. Le calcul fluxionnel newtonien

1670-1671 – Rédaction du *De methodis serierum et fluxionum* (publié en 1736 !)

PROBLEME I.

Etant donnée la Relation des Quantités Fluentes, trouver la Relation de leurs Fluxions.

II. Exemple I. Si la Relation des Quantités Fluentes x & y est $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, disposez d'abord les Termes suivant x, & ensuite suivant y, & multipliez-les comme vous voyez.

Multipliez	x^3	$-ax^2$	$+axy$	$-y^3$	$-y^3$	$+axy$	$\begin{matrix}-ax^2\\+x^3\end{matrix}$
par	$\frac{3\dot{x}}{x}$.	$\frac{2\dot{x}}{x}$.	$\frac{\dot{x}}{x}$.	0	$\frac{3\dot{y}}{y}$.	$\frac{\dot{y}}{y}$.	0
Vous aurez	$3\dot{x}x^2$	$-2a\dot{x}x$	$+a\dot{x}y$	$*$	$-3\dot{y}y^2$	$+a\dot{y}x$	$*$

Mais… Dans le courant des années 1670, Newton prend ses distances avec la « nouvelle analyse » et abandonne le calcul des fluxions « analytique » au profit d'une géométrie des fluxions sans infiniment petits.

II. Le calcul fluxionnel newtonien

1680 (env.) – Newton compose le *Geometrica curvilinea*

Il y introduit la méthode des « première et dernières raisons » et propose, grâce à elle, une reformulation du calcul des fluxions. Les quantités considérées sont géométriques et ne sont plus infinitésimales.

Notion de limite d'un rapport de deux quantités

LEMME PREMIER.

Les quantités & les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.

1687 – Publication des *Principia mathematica philosophiae naturalis*

Les *Principia* contiennent un exposé du calcul des fluxions (le premier à être publié par Newton !) proche de celui du *Geometrica curvilinea*.

1691-1692 – Rédaction du *De quadratura curvarum* (publié en 1704)

Le traité contient une version analytique du calcul exposé dans le *Geometrica curvilinea* et les *Principia*.

II. Le calcul différentiel et intégral leibnizien

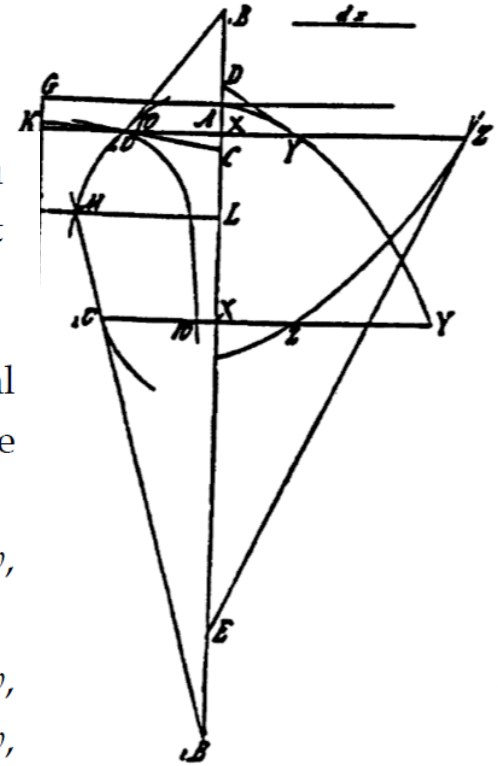
✓ « Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus », *Acta Eruditorum*, **octobre 1684**.

- Texte court, elliptique et confus (publié à la hâte par crainte d'une indélicatesse de Tschirnhaus)
- Introduction de la différentielle (« differentia ») et de sa notation
- Enoncé des principales règles de la différentiation
- Introduction du quotient *dy/dx* pour exprimer la pente de la tangente en un point d'une courbe.

✓ « De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum », *Acta Eruditorum*, **juin 1686**.

- Le mémoire traite du problème des quadratures
- Il est inspiré d'un mémoire de John Craig consacré aux quadratures et utilisant la notation différentielle introduite par Leibniz en 1684
- Leibniz y introduit le symbole d'intégration et définit les opération de « sommation » et de « différentiation » l'une par rapport à l'autre.

II. Le calcul différentiel et intégral leibnizien



"Appelons alors *dx* un segment de droite choisi arbitrairement et *dv* (*dw*, *dy* ou *dz*), c'est-à-dire la différence de *v* ("differentia") (de *w*, de *y* ou de *z*) un segment qui soit avec *dx* comme *v* (*w*, *y* ou *z*) avec *XB* (*XC*, *XD* ou *XE*)".

"Soit a une constante donnée, *da* sera égal à *0* et $\overline{dax}$ sera égal à *adx*. Si *y* est égal à *v* (c'est-à-dire toute ordonnée de la courbe *YY* égale à l'ordonnée correspondante de la courbe *VV*), *dy* sera égal à *dv*.

Maintenant l'*Addition et la Soustraction* : si $z - y + w + x$ est égal à v, $\overline{dz - y + w + x}$ ou dv sera égal à $dz - dy + dw + dx$.

Multiplication : $\overline{dxv}$ est égal à $xdv + vdx$, c'est-à-dire, en posant *y* égal à *xv*, on aura *dy* égal à $xdv + vdx$. Car on a tout loisir d'employer, soit l'expression *xv*, soit à sa place pour abréger, une lettre, par exemple *y*. Remarquons que dans ce calcul, *x* et *dx* sont traités de la même façon, de même que *y* et *dy*, ou toute autre lettre indéterminée et sa différentielle. Remarquons également que la démarche inverse, à partir de l'équation différentielle, n'est pas toujours possible, si ce n'est avec une certaine précaution dont nous parlerons ailleurs.

Ensuite, la *Division* : $d\frac{v}{y}$ ou (en posant z égal à $\frac{v}{y}$) dz est égal à $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$

II. La polémique sur l'invention du nouveau calcul

✓ La querelle est initiée par Nicolas Fatio de Duillier, proche de Newton, dans son *Linea brevissimi descensus investigatio geometrica* (1699) :

> « Convaincu par l'évidence des faits, je reconnais que Newton fut le premier et de plusieurs années le plus ancien inventeur de ce calcul. »

✓ Excessivement longue et violente, elle implique de nombreux proches des deux savants et gagne le terrain des mathématiques en 1713, suite à l'implication de Jean Bernoulli par Leibniz, qui répondait lui même à une accusation de plagiat émanant de John Keill, proche de Newton (en 1711).

✓ Un comité de la Royal Society est nommé pour arbitrer la dispute. Il tranche en faveur de Newton, qui préside l'institution depuis 1703 et rédige lui-même le compte-rendu (publié de façon anonyme en 1715) :

> « Il faut […] qu'il [Leinitz] renonce au droit qu'il prétend avoir à la méthode différentielle de M. Newton en tant que second inventeur : les seconds inventeurs n'ont pas de droit ».

✓ Elle finit par prendre des accents nationalistes, s'élargit aux newtoniens s'opposant au leibniziens puis aux Britanniques contre les Continentaux…

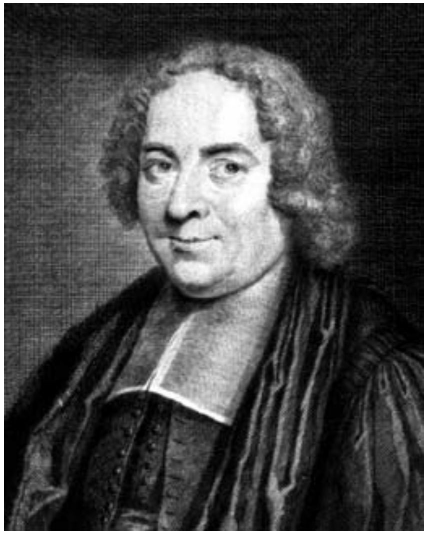
III. La diffusion du calcul leibnizien

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Jacques Bernoulli (1654-1705)

Jean I Bernoulli (1667-1748)

Guillaume de l'Hospital (1661-1704)



Pierre Varignon (1654-1722)

III. Les premiers pas du calcul différentiel et intégral en Europe

- Dans une lettre du 15 décembre 1687, Jacques Bernoulli demande des précisions à Leibniz sur son nouveau calcul.

- Leibniz, en voyage en Allemagne, en Autriche et en Italie, met trois ans à répondre... Jacques Bernoulli, de même que son frère Jean, s'initient donc seuls entre 1687 et 1690.

Jacques Bernoulli (1654-1705)

Jean I Bernoulli (1667-1748)

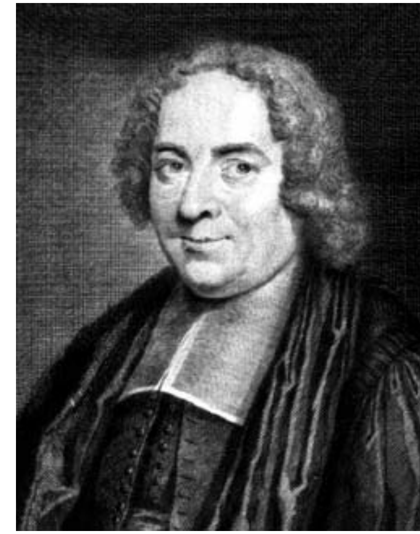
- En contact étroit, Leibniz, Jacques et Jean Bernoulli appliquent le nouveau calcul à différents problèmes lancés sous forme de défis (d'abord aux cartésiens par Leibniz, puis à la communauté savante en général par l'un des trois géomètres).

- Les trois savants sont rejoints par le Marquis Guillaume de l'Hospital après son initiation au nouveau calcul par Jean Bernoulli à l'occasion du voyage de ce dernier à Paris à l'hiver 1691-1692.

III. L'introduction du calcul à l'Académie royale des sciences de Paris

✓ Guillaume de l'Hospital entre à l'Académie des sciences de Paris en juin 1693. En mai et août 1693, puis en juin 1694, il soumet trois mémoires utilisant – sans les détailler – les méthodes du calcul leibnizien.

✓ En juin, juillet, septembre et novembre 1695, Pierre de Varignon fait la lecture de quatre mémoires utilisant le nouveau calcul.



Pierre Varignon (1654-1722)

ANALYSE

DES

INFINIMENT PETITS,

Pour l'intelligence des lignes courbes.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DC. XCVI.

✓ En juin 1696, Guillaume de l'Hospital publie le premier traité de calcul différentiel : l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*.

✓ Suite à cette parution, Sauveur présente le même mois le nouveau calcul devant l'Académie.

Guillaume de l'Hospital (1661-1704)

III. Les résistances de l'Académie de Paris à l'introduction du nouveau calcul

✓ En février 1697, Philippe de La Hire (1640-1718) présente un court mémoire intitulé « Remarque sur l'usage qu'on doit faire de quelques suppositions dans la méthode des infiniment petits » :

- sans précautions, la « méthode des infinis » peut conduire à des erreurs
- la « géométrie ordinaire » (ou « géométrie des anciens ») demeure un garde fou nécessaire.

✓ D'autres savants partagent les doutes de Philippe de La Hire, en particulier l'abbé Bignon, le père Gouye, l'abbé Gallois et Michel Rolle.

✓ Le 6 août 1697, Varignon écrit à Jean Bernoulli :

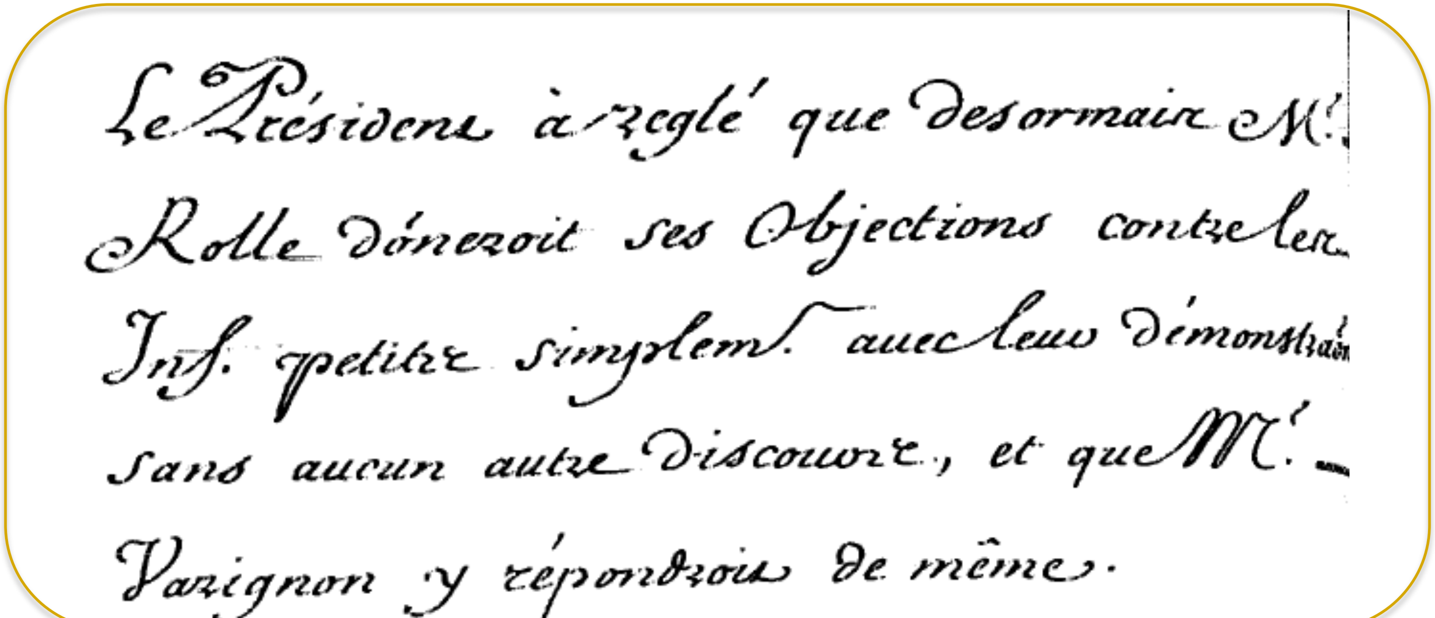
> *« M. le Marquis de l'Hospital est encore à la campagne de sorte que je me trouve seul ici chargé de la défense des infiniment petits, dont je suis le vray martyr tant j'ay desja soutenu d'assauts pour eux contre certains mathématiciens du vieux stile, qui chagrins de voir que par ce calcul les jeunes gens les attrapent et même les passent, font tout ce qu'ils peuvent pour la décrier, sans qu'on puisse obtenir d'eux d'écrire contre ».*

✓ Le 17 juillet 1700, le débat débute avec la lecture d'un mémoire de Michel Rolle critiquant le manque de rigueur des concepts et principes fondamentaux du calcul différentiel et intégral leibnizien.

✓ En l'absence du Guillaume de l'Hospital, Pierre Varignon prend la défense du nouveau calcul et répond à Rolle dans un mémoire présenté les 7 et 11 août 1700.

✓ Dans quatre autres mémoires, Michel Rolle tente de montrer, à partir de l'étude de plusieurs exemples de courbes, que le nouveau calcul conduit à l'erreur…

Registres manuscrits des procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris, t. 20, f. 183 r° - v° (séance du 21 mai 1700)


Le Président a reglé que desormais Mr.
Rolle dóneroit ses Objections contre les
Inf. petites simplem. avec leur démonstration
sans aucun autre discours, et que Mr.
Varignon y répondroit de même.

III. Les résistances de l'Académie de Paris à l'introduction du nouveau calcul

✓ Les trois difficultés soulevées par Michel Rolle contre le nouveau calcul dans son premier mémoire du 17 juillet1700 (d'après la réponse de Varignon) :

- « **Difficulté I.** Si en geometrie il y a des infiniment grands, infinis les uns des autres ; et des infiniment petits, infiniment les uns des autres ».

  « L'Analyse ordinaire ne traite que des grandeurs finies : celle-ci pénètre jusques dans l'infini même. Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies ; elle découvre les rapports de ces différences : et par là elle fait connoitre ceux des grandeurs finies qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini : car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisiemes, quatriemes, et ainsi de suite, sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'infini ; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis. »
  (Guillaume de l'Hospital, *Analyse des infiniment petits*, préface, p. 1-2)

- « **Difficulté II.** Si une grandeur plus ou moins sa différentielle, peut estre prise pour egale a cette même grandeur ».

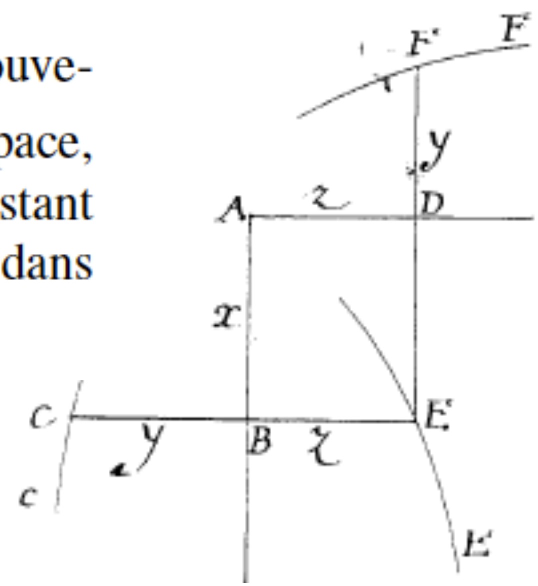
- « **Difficulté III.** Si les différentielles sont des zéros absolus ».

III. L'algorithmisation de la science du mouvement

✓ Dans deux mémoires présentés les 5 juillet et 6 septembre 1698, Pierre Varignon élabore le concept de « vitesse dans chaque instant » :

> « Pour le voir (tous les angles rectilignes de la figure qu'on voit icy, etant droits) soient $AB = x$ les espaces parcourus en quelque sens qu'on voudra, $BE = z$ les temps employez à les parcourir, et $BC = y = DF$ les vitesses à chaque point B de ces espaces.
>
> [...]
>
> De sorte que cette vitesse (y), dans chaque instant pouvant être regardée comme uniforme, a cause que $y \pm dy = y$, la notion seule des vitesses uniformes donnera $y = \frac{dx}{dz}$ pour la regle de tous les mouvemens variés comme on voudra, c'est a dire quelque rapport d'espace, de temps, ou de vitesse, qu'on suppose ; la vitesse de chaque instant etant toujours et par tout egale au quotient de l'espace parcouru dans chaque instant divisé par cette même differentielle de temps. »

(*Registres manuscrits des procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris*, t. 17, f. 298 v° - 299 r. [« 1er mémoire »])



III. Le nouveau calcul appliqué à des problèmes mécaniques

- A partir des années 1690, les rares savants initiés au nouveau calcul (Leibniz, Jean Bernoulli, Jacques Bernoulli, Guillaume de l'Hospital et Varignon) se soumettent différents problèmes sous forme de défis par l'intermédiaire de journaux, de périodiques, ou dans le cadre de leur correspondance (Huygens y participe aussi le plus souvent, mais sans utiliser le calcul différentiel et intégral, auquel il reste réfractaire).

- Une large part de ces problèmes a pour objet la détermination de trajectoires décrites, sous certaines conditions, par des corps en mouvement :

  - le problème de la courbe isochrone : détermination de l'équation de la courbe suivie par un corps décrivant des espaces égaux en des temps égaux.

  - le problème de la courbe brachystochrone : détermination de l'équation de la courbe décrite entre deux points dans le temps le plus bref par un corps soumis à la pesanteur.

  - le problème de la caténaire ou de la « chaînette » : détermination de la courbe formée par un fil suspendu à ses extrémités et soumis à la pesanteur (donc à son propre poids, réparti de façon uniforme).

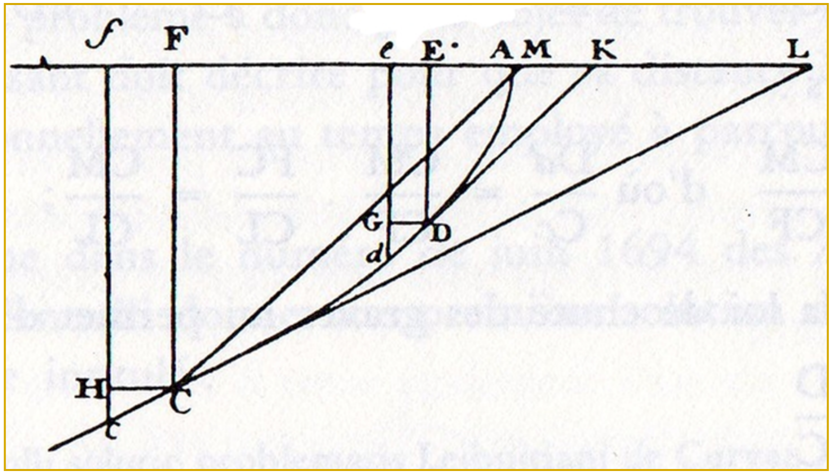
  - le problème de la tractrice (courbes aux tangentes égales), etc.

III. Le nouveau calcul appliqué à des problèmes mécaniques

Le problème de la courbe isochrone

- En septembre 1687, Leibniz lance un défi aux cartésiens :

« Trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descend uniformément, et approche également l'horizon en temps égaux. L'Analyse de Messieurs les cartésiens le donnera peut-être aisément. »
(*Nouvelles de la République des Lettres*, 1687, p. 956)



- Octobre 1687 : publication d'une première solution par Christiaan Huygens ne faisant pas usage du calcul différentiel et intégral.

- Avril 1689 : Leibniz publie sa solution mais n'y a pas explicitement recours au nouveau calcul.

- Mai 1690 : solution de Jacques Bernoulli (1$^{\text{ère}}$ apparition du terme « intégration »)

- 1690 [?] : solution de Jean Bernoulli

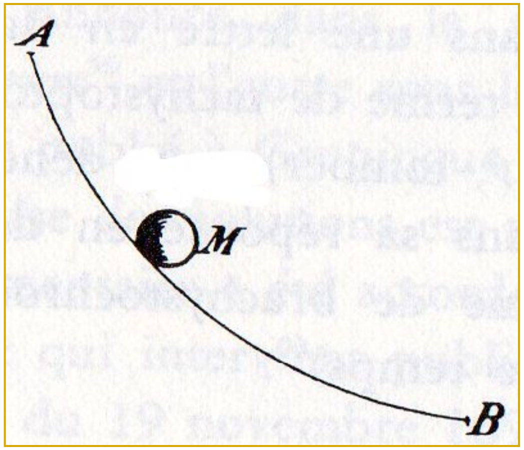
Solutions en deux parties :
- 1$^{\text{ère}}$ partie : le problème physique est ramené à un problème de géométrie
- 2$^{\text{e}}$ partie : résolution de ce problème grâce au calcul différentiel et intégral.

III. Le nouveau calcul appliqué à des problèmes mécaniques

Le problème de la courbe brachystochrone

- En juin 1696, Jean Bernoulli lance un nouveau défi :

« Datis in plano verticali duobos punctis A et B, assignaremobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B. »
(*Acta Eruditorum*, juin 1696, p. 269)



- Dans sa lettre du 16 juin 1696, Leibniz fait parvenir une solution à Jean Bernoulli.

- Publication des solutions de Jacques Bernoulli, Jean Bernoulli et Guillaume de l'Hospital dans le numéro de mai 1697 des *Acta Eruditorum*.

- Toujours des solutions obtenues en deux étapes :

  - 1ère étape : le problème physique est ramené à un problème de géométrie

  - 2e étape : résolution de ce problème grâce au calcul différentiel et intégral.

La courbe cherchée est un arc de cycloïde…

III. La première définition du concept de fonction, par Jean Bernoulli (1718)

N°. CIII.

REMARQUES

SUR CE QU'ON A DONNÉ JUSQU'ICI DE SOLUTIONS DES PROBLEMES SUR LES ISOPERIMETRES;

Avec une nouvelle méthode courte & facile de les resoudre sans calcul, laquelle s'étend aussi à d'autres Problèmes qui ont raport à ceux-là.

Par Mr. *Jean* BERNOULLI, Professeur à *Bâle*. *

III. La première définition du concept de fonction, par Jean Bernoulli (1718)

LEs curieux du progrès de la ſublime Géométrie peuvent ſe reſſouvenir, qu'il y a environ vingt ans qu'ayant propoſé le probléme de la *Brachyſtochrone*, ou de la courbe de la plus vite deſcente, mon Frére me propoſa la queſtion des *Iſopérimétres*, laquelle fut long-tems débatuë entre nous deux. Ce que cette conteſtation a produit ſe trouve dans les *Actes de Leipſick* de 1700, pag. 261, de 1701, pag. 213, ‡ & *dans les Mémoires de l'Academie Royale des Sciences* de 1706, pag. 304. † Voyez auſſi la pag. 67 du Livre de Mr. TAYLOR, intitulé *Methodus Incrementorum directa & inverſa*.

Mémoires de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris. 1718. pag. 100. Edit. de Paris. pag. 123. Edition de Hollande.

Je réſolus cette queſtion des Iſopérimétres en deux manieres différentes; & pour raiſons que j'avois alors, j'en tins la ſolution ſecrette ſans la faire voir à d'autres qu'à l'Illuſtre Mr. LEIBNITZ, [dont le monde ſavant pleure encore la mort,] à qui je la communiquai d'abord, & qui me marqua l'approuver; ce qu'il a aſſuré encore quelque part. Au commen-

Gg 2 cement

* La même Piece ſe trouve en latin dans les *Act. Erud. Lipſ.* 1718 Janv. pag. 16. & Fevr. pag. 74. ‡ N° præced.

† Ci-deſſus N°. LXXV. pag. 424. *Tom. I.*

III. La première définition du concept de fonction, par Jean Bernoulli (1718)

DEFINITION.

On appelle ici *Fonction* d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque maniére que ce soit de cette grandeur variable & de constantes.

PROBLEME I.

Entre une infinité de Courbes de même longueur, comprises entre les mêmes points B, C, *en trouver une* BaeC *telle que les semblables fonctions quelconques de ses ordonnées* aN, eS, CT *&c. fassent un* plus grand *ou un* plus petit, *qui soit une aire* BMLET *résultante de ce que le prolongement vers* M, L, E, *&c. de ces ordonnées* aN, eS, CT, &c. *lui en produit d'autres* NM, SL, TE, &c *semblablement composées chacune de chaque correspondante de celles-là, & de constantes : tellement, dis-je, qu'il en résulte une aire* BMLET, *qui soit la plus grande ou la plus petite de tout ce qui s'en peut former de cette maniére.*

TAB. XXXII. *Fig.* 2.