Université Denis Diderot Paris 7 (2013-2014)

TD Maths, Agro

Mathieu Merle : `merle@math.univ-paris-diderot.fr`

`www.proba.jussieu.fr/~merle`

Feuille d'exercices 7 : Changement de bases - Valeurs et vecteurs propres - Déterminants

1 Changement de bases

Préambule : Considérons $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note B la matrice $n \times n$ dont les colonnes sont respectivement $\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}$.
Rappelons que dans la feuille précédente on a montré que

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \text{ base} \quad &\Leftrightarrow \quad B \text{ inversible} \\ &\Leftrightarrow \quad [\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \ B\mathbf{y} = \mathbf{z} \text{ possède une unique solution }]. \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \exists! \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : y_1\mathbf{b_1} + ... + y_n\mathbf{b_n} = \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Pour un $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ donné, l'unique $\mathbf{y}$ solution de $B\mathbf{y} = \mathbf{z}$ n'est autre que $B^{-1}\mathbf{z}$.
Ceci permet de définir un nouveau système de coordonnées, on parlera de *coordonnées dans la base $\mathcal{B}$*.

1.1 Changement de base pour les coordonnées d'un vecteur

Définition. *Soit $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.*
On dit que les coordonnées de l'unique $\mathbf{y}$ solution de $y_1\mathbf{b_1} + ... + y_n\mathbf{b_n} = \mathbf{z}$ sont les coordonnées du vecteur $\mathbf{z}$ dans la base $\mathcal{B}$. On note :

$$\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{z} =: [\mathbf{z}]_{\mathcal{B}}.$$

On remarquera qu'on a également pour tout $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, que

$$\mathbf{z} = A[\mathbf{z}]_{\mathcal{B}}.$$

Exercice 1 On considère $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Retrouver les coordonnées originales du vecteur $\mathbf{z}$ lorsque $[\mathbf{z}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
3. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 On considère $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Retrouver les coordonnées originales de $\mathbf{z}$ lorsque $[\mathbf{z}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_4}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Soient $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}\}$, $\mathcal{C} = \{\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_n}\}$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. On note B, C les matrices correspondantes, définies comme plus haut.

1. Montrer que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on a $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{x}$, et $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = C^{-1}\mathbf{x}$.
2. Déduire de la question précédente une expression de $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ en fonction de $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$.
3. Exprimer $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ en fonction de $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$.

D'après l'exercice précédent on peut donc, pour deux bases de $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ quelconques, aller simplement (il suffit d'effectuer un produit matriciel) du système de coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ au système de coordonnées dans la base $\mathcal{C}$, et réciproquement.

1.2 Changement de base pour un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même), dont la matrice représentative est donnée par M. On rappelle (cf feuille 6) que la i-ième colonne de M n'est autre que $u(\mathbf{e_i})$. Fixons alors, comme dans le paragraphe précédent, $\mathcal{B} = \{\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_n}\}$ une base de $\mathbb{R}^n$, et B la matrice dont les colonnes sont les éléments de $\mathcal{B}$.
Remarquons que pour déterminer u, il suffirait alternativement de connaître les images respectives des éléments de $\mathcal{B}$. En effet, tout autre vecteur de $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ pouvant s'exprimer comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, on obtiendrait $u(\mathbf{z})$ par linéarité de u.
Exercice 4 Montrer que pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$[u(\mathbf{b_i})]_{\mathcal{B}} = B^{-1}M\mathbf{b_i}.$$

Pour représenter l'application linéaire u, on peut de façon alternative travailler dans la base $\mathcal{B}$ plutôt que dans la base canonique, et décrire les coordonnées des images des éléments de

$\mathcal{B}$ dans cette nouvelle base. D'après l'exercice précédent, la *matrice représentative*[1] *de u dans la base $\mathcal{B}$*, $[M]_{\mathcal{B}}$, est alors

$$[M]_{\mathcal{B}} := B^{-1}MB. \tag{1}$$

Question. *Existe-t-il une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice $[M]_{\mathcal{B}}$ représentative de l'endomorphisme u admet une forme simple ?*

Exercice 5 On considère la matrice de projection $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Calculer $[M]_{\mathcal{B}}$. Vérifier alors qu'il s'agit toujours d'une matrice de projection.

Exercice 6

1. On note $\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trouver un vecteur $\mathbf{b_3}$ orthogonal au plan $\Pi := \mathrm{Vect}\{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}\}$. Vérifier alors que $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit l'application linéaire u qui projette orthogonalement sur le plan Π. Déterminer la matrice représentative $[M]_{\mathcal{B}}$ de u dans la base $\mathcal{B}$.
3. En déduire la matrice M, représentative de u dans la base canonique.

Exercice 7 On considère l'application linéaire $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui effectue une rotation d'angle $\pi/3$ autour de l'origine.

1. Exprimer M, la matrice représentative de u dans la base canonique.
2. Soit $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right\}$. Exprimer $[M]_{\mathcal{B}}$.

2 Valeurs propres, Vecteurs propres

Soit u une application linéaire, de matrice M.

Définition. *Un* vecteur propre *de l'application linéaire u (resp. de la matrice M), associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, est un vecteur $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tel que*

$$u(\mathbf{x})(= M\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}.$$

1. En théorie, on pourrait imaginer, pour caractériser u, de donner la matrice qui décrit les coordonnées dans une base $\mathcal{C}$ des images respectives par l'application linéaire u des vecteurs d'une base $\mathcal{B}$. La matrice représentative serait alors

$$[M]_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = C^{-1}MB.$$

Mais cette définition plus générale est en fait assez peu utile !

Exercice 8 Soient
$M = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{r} = 11\mathbf{u} - 5\mathbf{v}, \mathbf{s} = \mathbf{v} + \mathbf{r}, \mathbf{t} = -3\mathbf{r}$. Lequels parmi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$ sont des vecteurs propres de la matrice M ? Quelles sont les éventuelles valeurs propres associées ?

Exercice 9 Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. Trouver *tous* les vecteurs propres associés à la valeur propre 2.

Exercice 10 Soit M une matrice de taille $n \times n$.
Montrer que λ est une valeur propre de M ssi $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
Montrer d'autre part que l'ensemble des vecteurs propres associé à la valeur propre λ est exactement $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Lorsque λ est une valeur propre de M, on appelle *espace propre* associé à la valeur propre λ l'ensemble des vecteurs propres associés à λ, auxquels on ajoute le vecteur nul (pour faire de cet espace propre un espace vectoriel) i.e. $\mathcal{E}_\lambda := \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$.
Exercice 11 Montrer que les valeurs propres d'une matrice triangulaire de taille $n \times n$ sont ses entrées diagonales.

Exercice 12 Trouver les valeurs propres, puis les espaces propres correspondants de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Même question avec la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 On suppose que la matrice M, de taille $n \times n$, possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_n$ associées respectivement aux vecteurs propres $\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_n}$.
Pour $p \in \{1, ..., n\}$, on note $\mathcal{F}_p = \{\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_p}\}$.

1. Montrer que si, pour un certain $p \in \{1, ..., n-1\}$ on a $\mathcal{F}_p$ libre et $\mathcal{F}_{p+1}$ liée, alors il existe des réels $c_1, ..., c_k$ (non tous nuls) tels que

$$\mathbf{x_{p+1}} = \sum_{k=1}^{p} c_k \mathbf{x_k}. \tag{2}$$

2. Sous l'hypothèse de la question précédente, montrer alors que

$$\lambda_{p+1} \mathbf{x_{p+1}} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k c_k \mathbf{x_k}.$$

En déduire alors que

$$\sum_{k=1}^{p} c_k(\lambda_k - \lambda_{p+1})\mathbf{x_k} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

3. Déduire des questions précédentes que $\mathcal{F}_n$ est libre. Conclure qu'il s'agit alors d'une base.
4. Exprimer $[M]_{\mathcal{F}_n}$.

D'après la première partie concernant les changements de base, et l'exercice précédent, on a prouvé

Théorème. *Supposons que la matrice M de taille $n \times n$ possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_n$ associées aux vecteurs propres $\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_n}$.*
On note P la matrice dont les colonnes sont $\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_n}$.
Alors P est inversible, et $P^{-1}MP = D$, où D est une matrice diagonale dont les entrées diagonales sont respectivement $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

En fait, la conclusion du théorème reste valable dès qu'on a une base de vecteurs propres (et ce, même si on a strictement moins de n valeurs propres). Cependant, il est important de noter que toute matrice n'est pas diagonalisable. Par exemple, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ne possède pas de base de vecteurs propres, et n'est donc pas diagonalisable.
De façon un peu plus subtile, la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable "dans $\mathbb{R}$", i.e. en tant que matrice représentative d'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. En effet, une telle matrice ne possède tout simplement aucune valeur propre réelle.
En revanche, en tant que matrice représentative d'une application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$, la matrice M est bien diagonalisable. On montre alors facilement que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres, associés respectivement aux valeurs propres complexes $i, -i$.

3 Déterminants

3.1 Définition. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Préambule : Il existe une formule générale qui permet de définir le déterminant d'une matrice $n \times n$. Pour mémoire (et sans rentrer dans le détail), si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ on a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

Cette formule sert dans un cadre théorique, mais elle ne vous sera quasiment d'aucune utilité dans le cadre d'exemples simples.

Il est beaucoup plus parlant de définir le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$ par récurrence sur n.

Tout d'abord, lorsque $n = 1$, et $A = (a_{11})$, on définit $\det(A) = a_{11}$. On admet alors le théorème-définition suivant :

Théorème. *Soit A une matrice de taille $n \times n$, avec $n \geq 2$. Pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, on définit A_{ij} la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ qui est obtenue en effaçant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.*
Pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $1 \leq j \leq n$ on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj}) \end{aligned}$$

On appelle la première égalité ci-dessus *le développement du déterminant de A par rapport à sa i-ième ligne*. De même, la deuxième égalité est le développement du déterminant de A par rapport à sa j-ième colonne.
Exercice 14 Lorsque A est une matrice de taille 2×2, retrouver à partir du théorème précédent la formule

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exercice 15 Lorsque A est une matrice de taille 3×3, montrer que

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}),$$

et que ceci correspond au calcul habituel du déterminant d'une matrice 3×3.

Exercice 16 Calculer $\det(A)$ lorsque

$$1.A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2.A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad 3.A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

3.2 Algorithme du pivot ... revisité

Pour une matrice A à n lignes, la première opération que l'on effectue dans le cadre de l'algorithme du pivot sur cette matrice A afin de produire la matrice B, est toujours l'une des trois suivantes :

1. pour un certain $i \in [|1, n|]$, $j \in [|1, n|]$ avec $i \neq j$ et un $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on ajoute α fois la $j$ième ligne de A à sa i-ième ligne pour produire la matrice B.
2. pour un certain $i \in [|1, n|], j \in [|1, n|]$, avec $i \neq j$, on échange les lignes i et j de A pour produire la matrice B.
3. on multilplie la i-ième ligne de A par $\alpha \in \mathbb{R}^*$ pour produire la matrice B.

Pour $i \in [|1, n|], j \in [|1, n|]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, notons alors :

– I_n la matrice identité de taille $n \times n$,
– E_{ij} la matrice de taille $n \times n$ qui possède le coefficient 1 au croisement de sa i-ième ligne et sa j-ième colonne, et des coefficients nuls partout ailleurs.
– $T_{\alpha,i,j} = I_n + \alpha E_{ij}$,
– $S_{i,j} = I_n + E_{ij} + Eji - E_{ii} - E_{jj}$,
– $D_{\alpha,i} = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$.
Enfin on note $\mathcal{T} = \{T_{\alpha,i,j}, S_{i,j}, D_{\alpha,i}, 1 \leq i \neq j \leq n, \alpha \in \mathbb{R}^*\}$.
Exercice 17 Soit A une matrice à n lignes. Exprimer

1. $T_{\alpha,i,j}A$,
2. $S_{i,j}A$,
3. $D_{\alpha,i}A$.

Exercice 18 Montrer que quelque soient $1 \leq i \neq j \leq n, \alpha \neq 0$, $T_{\alpha,i,j}, S_{i,j}, D_{\alpha,i}$ sont inversibles. Déteminer leurs inverses respectifs.

Exercice 19 (*) Soit A une matrice de taille $n \times n$, inversible. Montrer que A^{-1} peut être écrit comme un produit d'éléments de $\mathcal{T}$ (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 9 de la feuille 6).
En déduire que A est inversible ssi il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $T_1, ..., T_k \in \mathcal{T}$ tels que

$$A = \prod_{i=1}^{k} T_i.$$

3.3 Un algorithme de calcul du déterminant basé sur l'algorithme du pivot

Il est facile de décrire l'effet des différentes opérations de l'algorithme du pivot sur le déterminant d'une matrice.

Théorème. *Soit A une matrice $n \times n$, quelque soient $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ avec $i \neq j$, et $\alpha \in \mathbb{R}$,*
– *Si on ajoute un multiple de la $j$ième ligne de A à sa i-ième ligne pour produire la matrice B, alors $\det(B) = \det(A)$*
– *Si on échange les lignes i et j de A pour produire la matrice B alors $\det(B) = -\det(A)$.*
– *Si on multilplie la i-ième ligne de A par α pour produire la matrice B, alors $\det(B) = \alpha\det(A)$.*

On démontre le théorème par récurrence sur n : on le vérifie d'abord aisément lorsque $n = 1, 2$. Lorsque $n \geq 3$, la matrice possède au moins 3 lignes, et quelque soit l'une des actions décrite dans le théorème on peut toujours choisir i tel que la ligne i est inchangée par cette action. On choisit alors de développer le déterminant de B par rapport à cette ligne i. Or, chacune des matrices $B_{ij}, 1 \leq j \leq n$ sont obtenues à partir des matrices $A_{ij}, 1 \leq j \leq n$ en effectuant le même type d'action. On a donc, par hypothèse de récurrence, que $\det(B_{ij}) = \eta\det(A_{ij})$, avec $\eta = 1, -1, \alpha$ suivant qu'on considère une action du premier, deuxième ou troisième type, ce qui permet de conclure. $\square$

Ce théorème nous fournit un algorithme simple du calcul d'un déterminant. En effet, il suffit de suivre les étapes de l'algorithme du pivot, et d'extraire au fur et à mesure les facteurs multiplicatifs qui modifient le déterminant lors de chacune de ces étapes. Plus précisément, on se sert à chaque étape de :

$$\forall T \in \mathcal{T}, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \det(TM) = \det(T)\det(M) \tag{4}$$

Reprendre alors l'exercice précédent pour recalculer, en utilisant cette nouvelle méthode, les déterminants des trois matrices.

Exercice 20 Montrer que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Exercice 21 Calculer

$$a.\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ -3 & 10 & -6 & 8 \end{pmatrix}, \quad b.\det\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{pmatrix}, \quad c.\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22 (*) Montrer que pour toutes matrices A, B, toutes deux de taille $n \times n$ on a

$$\det(A \times B) = \det(A)\det(B).$$

On pourra commencer par montrer que le résultat est trivial si l'une des deux matrices n'est pas inversible.

Dans le cas A et B sont inversibles, on pourra utiliser le résultat de l'exercice 3.2.

Remarque importante : Pour un calcul efficace, en particulier lorsque les coefficients de la matrice dépendent d'un ou plusieurs paramètres, il est parfois plus commode de combiner plusieurs méthodes pratiques de calcul de déterminant, en particulier on peut parfois combiner algorithme du pivot et développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Par exemple, pour le calcul du déterminant de $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 5-a & 1/3 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$, il semble un peu long de développer par rapport à une ligne ou une colonne.

On peut plutôt commencer par appliquer l'algorithme du pivot afin de voir que

$$\det(A) = 6\det\begin{pmatrix} 1 & -1/6 & 1/6 \\ 0 & 5-2a/3 & 0 \\ 0 & -1+a/6 & 1-a/6 \end{pmatrix}.$$

Cependant il est malaisé de poursuivre l'algorithme, il faudrait par exemple disjoindre suivant les cas $a = 15/2, a \neq 15/2$. Mais à ce stade, en développant par rapport à la première colonne, on trouve très facilement que

$$\det(A) = 6\det\begin{pmatrix} 5-2a/3 & -1/3 \\ -1+a/6 & 1-a/6 \end{pmatrix} = 6(5-2a/3)(1-a/6).$$

En particulier, on voit que A est inversible pourvu que $a \notin \{6, 15/2\}$.

4 Polynôme caractéristique, application à la réduction

Définition. *Soit A une matrice carrée. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note*

$$\xi_A(x) = \det(A - xI_n).$$

La fonction ξ_A est un polynôme de degré n, on dit que c'est le polynôme caractéristique *de la matrice A.*

On admet les théorèmes suivants :

Théorème.

$$\lambda \text{ valeur propre}^2 \text{ de } A \Leftrightarrow \xi_A(\lambda) = 0.$$

Théorème ("$\mathbb{C}$ est algébriquement clos"). *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(P) = n$. Il existe $a \neq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$, et $(n_1, ..., n_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ tels que $n_1 + ... + n_p = n$ et*

$$P(X) = a \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{n_i}.$$

On dit alors que λ_i est racine de P avec multiplicité n_i.

Pour λ_i racine de ξ_A on rappelle que $\mathcal{E}_{\lambda_i}$ est l'espace propre associé à λ_i.

Théorème. *Soient A une matrice de taille $n \times n$, et $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les racines (complexes) du polynôme caractéristique ξ_A de A, de multiplicités respectives $n_1, ..., n_k$.*
Lorsque

$$\dim(\mathcal{E}_{\lambda_1}) + ... + \dim(\mathcal{E}_{\lambda_k}) = n_1 + ... + n_k = n,$$

alors la matrice A est diagonalisable.
Plus précisément, si on note
$(\mathbf{x_1}, ...\mathbf{x_{n_1}}), (\mathbf{x_{n_1+1}}, ..., \mathbf{x_{n_1+n_2}}), ..., (\mathbf{x_{n_1+...+n_{k-1}+1}}, ..., \mathbf{x_{n_1+...+n_k}})$ *des bases respectives de $\mathcal{E}_{\lambda_1}, ..., \mathcal{E}_{\lambda_k}$, et $P = [\mathbf{x_1} \dots \mathbf{x_n}]$, alors P est inversible et*

$$P^{-1}AP = D,$$

avec D une matrice diagonale, dont les entrées diagonales successives sont

$$\underbrace{\lambda_1, ...\lambda_1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, ...\lambda_2}_{n_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_k, ...\lambda_k}_{n_k \text{ fois}}.$$

Exercice 23 Pour chacune des matrices A suivantes :

$$a.A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, b.A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}, \quad c.A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad d.A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad e.A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix},$$

1. Exprimer ξ_A, et déterminer ses racines. Quelles sont les valeurs propres de A ?
2. Trouver des bases des espaces propres correspondants.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, détailler D, P, P^{-1}.