Université Paris 7 – D. Diderot
Calcul Stochastique, Modèles de Diffusions
Examen (29–11–2007)

*Aucun document autorisé.*

*Les solutions des trois exercices seront rédigées sur trois copies différentes. Le candidat veillera à bien porter son nom sur chacune d'elles.*

*Les trois exercices sont indépendants. Dans chacun des exercices, il est possible d'admettre une ou plusieurs questions pour répondre aux suivantes.*

**Ex. I** On considère un $\mathcal{F}$-mouvement brownien réel $W$ sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et on pose $\tau := \inf\{t > 0 : W(t) \in (-A, B)^{\complement}\}$, avec $A$ et $B > 0$.

(1) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ le processus $X_\theta$ défini par

$$X_\theta(t) := \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 t\right) \cos\left(\theta\left(W(t) - \left(\frac{B-A}{2}\right)\right)\right), \quad t \geq 0,$$

est une martingale.

(2) $\tau$ est-il un temps d'arrêt ? Montrer que

$$X_\theta(\tau) = \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 \tau\right) \cos\left(\left(\frac{A+B}{2}\right)\theta\right).$$

(3) Montrer que si $\theta \in [0, \pi/(A+B))$ (on fera cette hypothèse pour la suite de l'exercice) alors $X_\theta^\tau$ (comme d'habitude $X_\theta^\tau(t) := X_\theta(t \wedge \tau)$) est une martingale positive.

(4) Déduire de (3) que

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 \tau\right)\right] \leq \frac{\cos\left((A-B)\theta/2\right)}{\cos\left((A+B)\theta/2\right)}.$$

(5) Montrer alors que $\mathbf{E}\sup_t |X_\theta^\tau(t)| < \infty$ et conclure que

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 \tau\right)\right] = \frac{\cos\left((A-B)\theta/2\right)}{\cos\left((A+B)\theta/2\right)}.$$

**Ex. II** Étant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t \geqslant 0}$ de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$, on considère l'équation différentielle stochastique

$$\forall t \geqslant 0,\ dX_t = X_t f(X_t)dt + \sqrt{f(X_t)}dB_t, \quad X_0 = 0, \qquad \text{(Eq 1)}$$

où $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\exists K, \lambda, \Lambda > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \leqslant f(x) \leqslant \Lambda,\ |f'(x)| \leqslant K\frac{1}{1+|x|}.$$

On pose également $\Phi : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \exp(-y^2)dy$. On rappelle $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \sqrt{\pi}$.

(1) Montrer que l'EDS (Eq 1) admet une unique solution $X$, appartenant à $M^2$.

(2) Montrer que le processus $(Y_t = \Phi(X_t))_{t\,\geqslant\,0}$ est une martingale.

(3) Pour $a > 0$ et $b > 0$ donnés, on définit

$$\sigma_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \leqslant -a\},\ \sigma_b = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant b\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Rappeler pourquoi $\sigma_a$, $\sigma_b$ et $\tau = \sigma_a \wedge \sigma_b$ sont des temps d'arrêt, puis, démontrer que

$$\forall t \geqslant 0,\ \mathbb{E}\big[Y^2_{t\wedge\tau}\big] = \frac{\pi}{4} + \mathbb{E}\int_0^{t\wedge\tau} \exp(-2X_s^2) f(X_s) ds.$$

(4) En déduire que $\mathbb{E}(\tau) < +\infty$.

(5) Calculer $\mathbb{E}[Y_{t\wedge\tau}]$ pour tout $t \geq 0$ et montrer que

$$\mathbb{P}\left(\sigma_b < \sigma_a\right) = \frac{\sqrt{\pi} - 2\Phi(-a)}{2\Phi(b) - 2\Phi(-a)}.$$

(6) Montrer que $\mathbb{P}(\sigma_b < +\infty) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\Phi(b)}$, puis que $\mathbb{P}\left(\sup\limits_{t\,\geqslant\,0} X_t = +\infty\right) = \dfrac{1}{2}$.

(7) Dans cette question, on admet que toute martingale positive et continue converge presque-sûrement. Montrer finalement que $(X_t)_{t\,\geqslant\,0}$ converge vers $+\infty$ avec probabilité $1/2$ lorsque $t$ tend vers l'infini.

**Ex. III**. Étant donnés un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\,\geqslant\,0}$ de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\,\geqslant\,0}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et deux réels $r \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, démontrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_1)$, équivalente à $\mathbb{P}$, sous laquelle le processus $(X_t)_{0\,\leqslant\,t\,\leqslant\,1}$, donné par,

$$\forall 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad X_t = \exp\big(rt + \sigma B_t\big),$$

soit une martingale.