Université Paris 7 – D. Diderot

Calcul Stochastique, Modèles de Diffusions

Examen (27–11–2008)

Trois heures. Aucun document autorisé.

Les deux exercices sont indépendants. Dans chacun, il est possible d'admettre une ou plusieurs questions pour répondre aux suivantes.

La barème est purement indicatif.

Ex. I

Partie A. (3,5 points) Étant données une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\,\geqslant\,0}$ et $(M_t)_{t\,\geqslant\,0}$ une sous-martingale continue à valeurs positives relativement à cette filtration, vérifiant $M_0 = 0$, on définit, pour un réel $a > 0$, la quantité $\tau := \inf\{t \geqslant 0 : M_t \geqslant a\}$ $(\inf \emptyset = +\infty)$.

(1) Rappeler pourquoi τ est un temps d'arrêt.

(2) Montrer, pour un réel $T > 0$, que

$$a\mathbb{P}\{\tau \leqslant T\} \leqslant \mathbb{E}\big[M_T \mathbf{1}_{\{\tau\,\leqslant\,T\}}\big].$$

En déduire

$$a^3\mathbb{P}\Big\{\sup_{0\,\leqslant\,t\,\leqslant\,T} M_t \geqslant a\Big\} \leqslant a^2\mathbb{E}\big[M_T \mathbf{1}_{\big\{\sup_{0\,\leqslant\,t\,\leqslant\,T} M_t \geqslant a\big\}}\big].$$

(3) En intégrant l'inégalité ci-dessus par rapport à a sur $]0, +\infty[$, montrer que

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\,\leqslant\,t\,\leqslant\,T} M_t^4\big] \leqslant (4/3)\mathbb{E}\big[M_T \sup_{0\,\leqslant\,t\,\leqslant\,T} M_t^3\big].$$

Indication : on rappelle que, pour $x \geqslant 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $x^p = p\int_0^{+\infty} a^{p-1}\mathbf{1}_{\{x\,\geqslant\,a\}}da$.

Partie B. (8 points) Étant donnés un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\,\geqslant\,0}$ relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\,\geqslant\,0}$ et un processus $(H_t)_{t\,\geqslant\,0}$ dans M^2_{loc}, on choisit

$$\forall t \geqslant 0, \quad M_t = \int_0^t H_s dB_s.$$

(1) Montrer que $(N_t = M_t^4 - 6M_t^2\langle M\rangle_t + 3\langle M\rangle_t)_{t\,\geqslant\,0}$ est une martingale locale.

(2) En définissant pour $n \in \mathbb{N}$, $\tau_n := \inf\{t \geqslant 0 : |M_t| + \langle M\rangle_t \geqslant n\}$, montrer que $(N_{t\wedge\tau_n})_{t\,\geqslant\,0}$ est une martingale.

(3) En déduire qu'il existe une constante universelle $C \geqslant 0$ telle que

$$\forall t \geqslant 0, \quad \mathbb{E}\big[M^4_{t\wedge\tau_n}\big] \leqslant C\mathbb{E}\big[\langle M\rangle^2_{t\wedge\tau_n}\big].$$

Montrer, pour la même constante C, que

$$\forall t \geqslant 0, \quad \mathbb{E}\big[M_t^4\big] \leqslant C\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_t^2\big].$$

(4) (Plus difficile.) En utilisant la partie A, montrer finalement qu'il existe une constante universelle $\Gamma \geqslant 0$ telle que

$$\forall T > 0, \quad \mathbb{E}\big[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} M_t^4\big] \leqslant \Gamma \mathbb{E}\big[\langle M \rangle_T^2\big].$$

Ex. II (8,5 points) Etant donnés une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ et un mouvement brownien réel $(B_t)_{t \geqslant 0}$ relativement à cette filtration, on considère l'EDS

$$\forall t \geqslant 0, \quad X_t = \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s, \tag{1}$$

les coefficients b et σ étant supposés bornés par une constante Λ et Lipschitz de constante K. La fonction σ est par ailleurs supposée minorée par une constante $\lambda > 0$.

(1) Montrer que (1) admet une unique solution X. A quel espace appartient-elle ?

Dans la suite, on appelle $\tau := \inf\{t \geqslant 0 : |X_t| \geqslant 1\}$ ($\inf \emptyset = +\infty$).

(2) On suppose $b = 0$. Montrer que

$$\forall t \geqslant 0, \quad \mathbb{E}\big[X_{t\wedge\tau}^2\big] = \mathbb{E}\bigg[\int_0^{t\wedge\tau} \sigma^2(X_s)ds\bigg].$$

En déduire que $\mathbb{E}(\tau)$ est bornée par une constante ne dépendant que de λ.

(3) On NE suppose PLUS $b = 0$. Montrer que l'on peut trouver $c > 0$, ne dépendant que de λ et Λ, tel que

$$\forall t \geqslant 0, \quad \mathbb{E}\big[\exp(cX_{t\wedge\tau})\big] \geqslant \mathbb{E}\bigg[\int_0^{t\wedge\tau} \exp(cX_s)ds\bigg].$$

En déduire que $\mathbb{E}(\tau)$ est bornée par une constante ne dépendant que de λ et Λ.

(4) Etant donnée une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, montrer, en appliquant la formule d'Itô, que

$$\forall t \geqslant 0, \quad \mathbb{E}\int_0^{t\wedge\tau} f''(X_s)\sigma^2(X_s)ds \leqslant C \sup_{|x| \leqslant 1} |f'(x)|,$$

pour une constante C ne dépendant que de λ et Λ.

(5) Etant donnée une fonction g continue sur $\mathbb{R}$, montrer qu'il existe une constante Γ ne dépendant que de λ et Λ telle que

$$\mathbb{E}\bigg[\bigg|\int_0^{\tau} g(X_s)ds\bigg|\bigg] \leqslant \Gamma \int_{-1}^{1} |g|(x)dx.$$