Université Denis Diderot — Année 2009-2010
Paris VII — **M2 modèles aléatoires**

Examen final

Durée : trois heures. Pas de document, ni de note, ni de calculatrice, ni de téléphone portable autorisés.
Le barème approximatif est 3/6/11.

Exercice 1 Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, , \mathbb{P})$. Soient $r, \sigma \in]0, \infty[$. Démontrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_1)$, équivalente à $\mathbb{P}$, sous laquelle le processus $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ donné par

$$X_t = \exp(rt + \sigma B_t)$$

est une martingale.

Exercice 2 Soient $(B_t, \tilde{B}_t)$ un MB bi-dimensionnel. On pose

$$X_t = \int_0^t B_s d\tilde{B}_s - \int_0^t \tilde{B}_s dB_s$$

1. Montrer que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale de carré intégrable.
2. Soit $\lambda > 0$. Justifier que
$$\mathbb{E}\big[e^{i\lambda X_t}\big] = \mathbb{E}\big[\cos(\lambda X_t)\big]$$
3. Soient g et h deux fonctions déterministes de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$. Ecrire les processus suivants sous forme de processus d'Itô :
$$Y_t = \cos(\lambda X_t), \quad Z_t = h(t) - \frac{g(t)}{2}(B_t^2 + \tilde{B}_t^2)$$
Calculer le crochet $\langle Y, Z \rangle$.
4. Montrer que $Y_t e^{Z_t}$ est une martingale si les fonctions g et h vérifient le système d'équations différentielles ordinaires :
$$\frac{dg}{dt}(t) = g(t)^2 - \lambda^2, \qquad \frac{dh}{dt}(t) = g(t) \tag{1}$$
5. Soit $r > 0$. Vérifier que les fonctions
$$g(t) = \lambda \tanh\big(\lambda(r-t)\big), \qquad h(t) = -\log\big[\cosh\big(\lambda(r-t)\big)\big]$$
sont solutions du système (1).
6. En déduire $\mathbb{E}[e^{i\lambda X_t}]$.

Exercice 3 Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien réel et $b(x)$ et $\sigma(x)$ deux fonctions satisfaisant les conditions d'Itô. Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x$$

On note

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x}$$

Pour $\alpha < x < \beta$ on introduit le temps de sortie

$$\tau = \inf\{t \geqslant 0, X_t \in]\alpha, \beta[^c\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à support compact. En utilisant la formule d'Itô, montrer que pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{E}_x\big[f(X_{t\wedge\tau})\big] = f(x) + \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{t\wedge\tau} \mathcal{L}f(X_s)ds\Big]$$

2. *Supposons qu*'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^2([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{L}u(x) \leqslant -1$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$. Montrer que $\mathbb{E}_x[\tau] < \infty$ et $\tau < \infty$ $\mathbb{P}_x$-ps.
3. (a) *Supposons qu*'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^2([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{L}u(x) = -1$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$ et $u(\alpha) = u(\beta) = 0$. Montrer que $u(x) = \mathbb{E}_x[\tau]$.
   (b) Si $\sigma : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ et $b = 0$, montrer que $\mathbb{E}_x[\tau] < \infty$ et $\tau < \infty$ $\mathbb{P}_x$-ps. Trouver une expression de $\mathbb{E}_x[\tau]$ en fonction de σ.
   Calculer $\mathbb{P}_x(X_\tau = \alpha)$ et $\mathbb{P}_x(X_\tau = \beta)$ (vérifier que ces probabilités ne dépendent pas de σ).
   (c) Si $\sigma = 1$ et $b = 0$ (X_t est alors le mouvement brownien issu de x), montrer que $\mathbb{E}_x[\tau] = (x-\alpha)(\beta - x)$.
4. Soit $\lambda > 0$.
   (a) Supposons qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^2([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{L}u(x) = \lambda u(x)$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$ et $u(\alpha) = u(\beta) = 1$. Montrer que $\mathbb{E}_x[\exp(-\lambda\tau)] = u(x)$.
   Indication : on pourra considérer $e^{-\lambda t}u(X_t)$.
   (b) Si $\sigma = 1$ et $b = 0$, montrer que

$$\mathbb{E}_x[\exp(-\lambda\tau)] = \cosh\big[\sqrt{2\lambda}(x-\alpha)\big] + \frac{1 - \cosh\big[\sqrt{2\lambda}(\beta-\alpha)\big]}{\sinh\big[\sqrt{2\lambda}(\beta-\alpha)\big]}\sinh\big[\sqrt{2\lambda}(x-\alpha)\big]$$

   (c) On considère $\tau_0 = \inf\{t \geqslant 0, B_t = 0\}$.
   Montrer que pour tout $x > 0$ et $\lambda > 0$ on a $\mathbb{E}_x[\exp(-\lambda\tau_0)] = \exp(-\sqrt{2\lambda}x)$. Montrer que $\tau_0 < \infty$ $\mathbb{P}_x$-ps mais $\mathbb{E}_x[\tau_0] = \infty$.